

論文

크리깅을 이용한 최적화 알고리즘

박정선*, 노영희**, 임종빈**

An Optimization Algorithm Using Kriging

Young-Hee Ro*, Jung-Sun Park** and Jong-Bin Im**

ABSTRACT

Kriging has been effectively used to approximate for optimization. This study has been devised to improve efficiency and accuracy of approximate optimal design using Kriging. The design of experiments(DOE), the classical design and space-filling design, are used to provide maximum information using minimum number of design of experiments. The proposed methodology is applied to the designs of 3-bar truss and Sandgren's pressure vessel.

Key Words : Kriging(크리깅), Design of experiments(실험계획법), Three-bar truss(3부재 트러스), Pressure vessel(압력용기)

1. 서론

최근 공학적 설계 문제들은 과거에 비해 그 규모가 커지고, 단일 분야뿐만이 아닌 다분야에 걸친 공학문제에 대한 최적설계가 진행됨으로써 설계변수간의 복잡한 상호작용과, 다양한 제한조건을 동시에 만족해야 하는 등 그 복잡성이 더해간다[1]. 따라서 현재의 최적화 문제에 있어 전반적인 해석 비용의 증가는 필연적이며, 그 해결방안 중 하나가 근사모형을 이용한 근사 최적설계이다.

그 중 비선형성이 강한 모델에 대해 적합하다고 알려진 근사모형이 크리깅이며, 이것은 다른 근사모형에 비해 다소 구현하기 어렵고 오랜 계산시간이 소요되며, 특성상 경험적인 방법에 의한 상관함수의 선택이 근사모형의 정확성에 영향을 미치게 된다. 본 연구에서는 크리깅을 이용한 최적화 알고리즘을 제안함으로써 근사최적화 시 그 정확성과 신뢰성의 향상이 그 목적이라 하겠

다.

우선 본 논문에서는 적은 실험점으로 가능한 많은 정보를 얻음으로써 크리깅 모델의 효율성을 높이기 위하여 고전적인 실험계획법(classical design of experiments) 중 대표적인 중심합성계획법(central composite design, CCD)과 공간충진 실험계획법(space filling experiments) 중 균일 계획법(uniform design, UD)을 사용하여 각각의 결과에 대한 특징을 비교·분석하였다.

본 연구에서 제안된 최적화 알고리즘은 기존의 최적화 예제 중 하나인 3부재 트러스 구조물, Sandgren의 압력용기(pressure vessel) 예제에 적용함으로써 그 신뢰성과 타당성을 검증하고자 한다.

II. 크리깅 모델

크리깅은 지질통계학에 근거를 둔 통계적 기법으로써 공간적으로 상호 연관된 데이터를 예측하는데 유용하게 사용되고 있다[2]. 남아프리카의 광산기술자였던 D. G. Krige(1966)에 의해 개발된 후 전산실험에 적합하도록 통계적, 수학적으로 정립되면서 새로운 크리깅 모델이 제시되었으며, 그것이 현재 최적설계분야에서 사용되고 있

* 정회원, 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부
연락처, Email: jungsun@mail.hankong.ac.kr
경기도 고양시 화전동 한국항공대학교

** 정회원, 한국항공대학교 대학원

는 크리깅의 이론적 배경으로 전산 실험(design and analysis computer experiments, DACE)모델이라고도 불린다[3].

Sacks 등은 크리깅 모형을 다음과 같은 선형모형(linear model)과 잔차(departure)의 합으로 표현하였다.

$$y(x) = f(x) + Z(x) \tag{1}$$

여기서 $y(x)$ 는 우리가 알고자 하는 함수이며, $f(x)$ 는 주어진 실험점을 이용해서 구할 수 있는 전역모델(global model)이다. 이러한 전역모델은 반응표면모델과 유사한 다항함수(polynomial function)로 표현되며 이때 계산 횟수 및 모형의 복잡성에 대한 효율적인 면을 고려하여, 많은 경우에 상수항 β 로 처리하고 있다[4]. 또한 $Z(x)$ 는 전역모델로부터 나온 지역적 편차를 생성하며, 이로 인하여 크리깅 모형이 추출된 데이터 점을 보간하게 된다. 이때 $Z(x)$ 의 공분산(covariance)은 다음과 같이 정의된다.

$$Cov[Z(x^i), Z(x^j)] = \sigma^2 R[R(x^i, x^j)] \tag{2}$$

여기서 σ^2 은 $Z(x)$ 의 분산이며, R 은 상관행렬(correlation matrix), $R(x^i, x^j)$ 는 n_s 개의 실험점 내 임의의 두 점 사이의 상관함수이다. 이때의 상관함수는 설계자에 의해서 경험적인 방법으로 결정되며, 어떠한 함수를 사용하느냐에 따라 얼마나 유연하게 실험점을 보간 해 주는가가 결정된다. 기존의 연구에서는 변수들 간의 관계가 해석적(analytic)이고 반응면이 매끄러운 것으로 알려져 있는 가우시안 상관함수(Gaussian correlation function, GCF)를 대부분 사용하였으나, 본 논문에서는 가우스 상관함수를 포함하여 Sacks, Guinta 등에 의해 제안된 5개의 상관함수를 사용하여 각각의 결과를 비교하였다.

식(3)은 지수상관함수(exponential correlation function, ECF)이며, 알려진 실험점들에서 ECF에 의해 보간되어진 크리깅 모델은 미분 불능점을 포함하게 되어 부드럽지 못하게(rough) 보간되어지는 특징을 가진다[5].

$$R(d_k) = \prod_{k=1}^{n_{dv}} \exp(-\theta_k |d_k|) \tag{3}$$

여기서 d_k 는 이미 알려진 실험점들의 거리이며, n_{dv} 는 설계변수의 수, θ_k 는 미지의 상관매개변

수이다. 다음으로 기존의 연구에서 가장 많이 사용되는 가우시안 상관함수는 식(4)와 같이 정의된다.

$$R(d_k) = \prod_{k=1}^{n_{dv}} \exp(-\theta_k |d_k|^2) \tag{4}$$

3차상관함수(cubic correlation function, CCF)는 식(5)와 같이 정의되며, 설계변수가 단일 변량일때 3차 스플라인 상관함수(cubic spline correlation function)이라고도 불린다[6].

$$R(d_k) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n_{dv}} [1 - 6(\theta_k |d_k|)^2 + 6(\theta_k |d_k|)^3] & \theta_k |d_k| < \frac{1}{2} \\ \prod_{k=1}^{n_{dv}} [2(1 - \theta_k |d_k|)^3] & \frac{1}{2} \leq \theta_k |d_k| < 1 \\ 0 & \theta_k |d_k| \geq 1 \end{cases} \tag{5}$$

CCF는 본 논문에서 사용된 상관함수들 중 θ_k 값에 가장 큰 영향을 받으며, 비선형성이 강한 함수의 보간에 효과적이다. 마지막으로 Bessel function의 변형된 형태인 Matern 상관함수(Matern correlation function, MCF $\nu=3/2, 5/2$)를 사용하였으며, 이는 변수 ν 를 제어하여 미분 가능 횟수를 제어함으로써 크리깅 모형의 유연성(flexibility)을 다른 상관함수에 비해 제어하기가 용이하다. 하지만 계산의 복잡성 등을 고려하여 Stein에 의해 제안된 $\nu=3/2, 5/2$ 일 때의 MCF가 식(6)과 같다[7].

$$R(d_k) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n_{dv}} [1 + \theta_k |d_k|] \exp(-\theta_k |d_k|) & \nu = \frac{3}{2} \\ \prod_{k=1}^{n_{dv}} [1 + \theta_k |d_k| + \frac{\theta_k^2 |d_k|^2}{3}] \exp(-\theta_k |d_k|) & \nu = \frac{5}{2} \end{cases} \tag{6}$$

앞선 상관함수들은 그 형태에 따라 실제함수로 보간 될 때 각각의 특징을 가지므로 실제 함수형태에 있어 선형성과 비선형성에 대한 적절한 상관함수의 선택은 정확한 근사모델을 구현하는데 중요한 역할을 한다. 다음으로 실제모델 $y(x)$ 와 오차를 최소화 시키는 $\hat{y}(x)$ 가 크리깅 모델이 된다.

$$\hat{y} = \hat{\beta} + x^T(x) R^{-1}(y - \hat{\beta}f) \tag{7}$$

여기서 $\hat{\beta} = (f'R^{-1}f)^{-1}f'R^{-1}y$ 은 β 의 일반화된 추정량이며, 식(7)의 우변에 있는 두 항은 상호 연관되지 않으며, 일반화된 최소제곱 예측값을 얻은 다음 회귀모형이 없는 것처럼 잔차를 보간하게 된다. 그리고 실제 함수의 분산에 해당하는 σ^2 과 상관매개변수 θ_k 를 구하기 위해 특정한 확률분포의 가정하에서 정의되는 최우추정법에 의한 최우추정량(maximum likelihood estimation, MLE)을 이용해 가장 적합한 값을 구하게 되며, σ^2 에 대한 추정량은 식(8)와 같다.

$$\hat{\sigma}^2 = 1/n_s (y - f\hat{\beta})R^{-1}(y - f\hat{\beta}) \quad (8)$$

$\gamma(x)$ 는 관측된 지점과 추정하려는 지점에서의 반응값 사이에서의 상관벡터(correlation vector)이며 f 는 길이가 표본의 수이고 모든 요소가 1인 벡터를 의미하고, y 는 표본에서의 반응들로 이루어진 벡터이다. 마지막으로 상관매개변수 θ_k 는 다음의 수식을 최대화함으로써 결정된다.

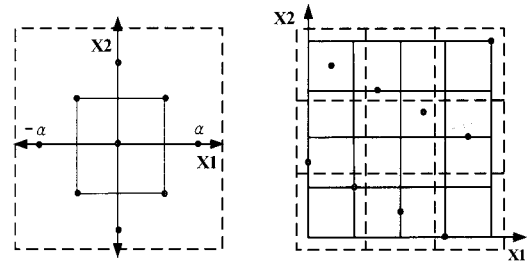
$$\text{Maximize: } -(det R)^{\frac{1}{n_s}} \hat{\sigma}^2 \quad (9)$$

여기서 det 는 행렬식을 의미하며, n_s 는 표본의 수, 즉 실험점의 수이다.

본 연구에서는 최적의 크리깅 모델을 구성하기 위해 이산변수에 대한 최적화에 사용되는 simulated annealing을 이용하여 식(9)를 최대화하는 θ_k 를 구하였다[8].

III. 실험계획법

크리깅 모델은 보간법에 의해 생성되는 모델로 실험점의 선정에 큰 영향을 받는다. 계통적인(systemic) 오차의 성질을 갖는 크리깅 모델의 특성 상 실험점들 간의 거리에 따라 보간되어지는 오차들의 크기가 큰 영향을 받기 때문에 적은 실험횟수로도 최대의 효율을 얻기 위한 적절한 추출법이 필요하며, 본 연구에서는 여러 실험 계획법 중 크게 기존의 고전적인 실험 계획법(classical experimental design)과 전산실험계획법(computer experimental design)이라고도 불리는 공간 충전 개념의 실험 계획법(space-filling experimental designs)의 두 종류의 실험 계획법으로 분류하여 각 실험계획법들의 특징과 좀 더 효율적인 실험점의 선택방법을 제시하고자 한다.



(a) CCD (b) UD

Fig. 1. Design of experiments

3.1 고전적인 실험계획법

실제 물리적인 실험에서는 임의의 오차(random error)가 존재하기 때문에 랜덤화의 원리, 반복의 원리, 블록화의 원리 등을 적용하여 실험의 정도가 좋고 분석이 용이한 실험계획을 구상하는 형태로 발전하였으며, 이런 물리적인 실험에 적합하도록 개발된 실험계획법을 고전적 실험계획법(classical experimental design)이라 하고, 본 논문에서는 이 중 대표적으로 많이 사용되는 중심합성계획법을 사용하였다. 중심합성 계획법(CCD)은 여러 고전적인 실험계획법 중 상대적으로 설계변수의 개수가 적을 때 실험의 횟수를 최소화 하고 효율을 증대시킬 수 있으며, 그 구성은 요인점(factorial points), 축점(axial points), 중심점(center points)의 세부분으로 구성되고 직교성(orthogonality)과, 회전가능성(rotatability)의 장점을 가진다[9]. 그리고 설계변수의 개수 n , 중심점의 개수 n_0 에 대한 실험의 횟수가 $2^n + 2n + n_0$ 로 정해지고, 설계변수 $n=2$ 이고 중심점이 1개일 때의 실험점의 위치는 Fig. 1의 (a)와 같으며, 본 연구에서는 중심점 $n_0=2$ 일 때의 중심합성계획법을 사용하였다.

3.2 공간충진 실험계획법

시뮬레이션과 같이 컴퓨터를 이용한 전산실험(computational experiments)에서는 물리적인 실험과는 달리 동일한 입력값에 대해 항상 같은 결과값을 나타내므로 임의의 오차가 존재하지 않는다. 따라서 전산실험에서는 실제 실험과 달리 랜덤 오차가 발생하지 않기 때문에 정해진 실험의 개수를 가지고 설계영역을 고르고 빈틈없이 탐색

하여 실험점을 선택하는 공간충진(space-filling) 계획법이 적합하다고 알려져 있다[10]. 이런 공간충진 계획법은 기존의 실험계획법이 실험횟수에 대해 정해진 실험점의 수만 선택할 수 있는데 반해 실험점의 수를 유연하게(flexible) 선택할 수 있으며, 반복이 없이 모든 실험영역을 고려할 수 있고 많은 비용과 시간이 드는 실험을 비교적 적게 할 수 있는 장점이 있다. 특히 라틴 하이퍼큐브 계획(latin hypercube design, LHD)이 대표적으로 많이 사용되며 본 논문에서는 라틴 하이퍼큐브계획에 직교배열(orthogonal-array)의 직교성을 결합시킨 균일계획법(UD)을 사용하였다. 균일계획법은 1960년대 Korobov와 Hlawka에 의하여 고안, 발전되었으며 그 후 1994년 Fang과 Wang에 의해 정리되고 기술되었다[11]. 실험점의 수를 상대적으로 유연하게 선택할 수 있지만 고전적인 실험계획법인 중심합성계획법과의 비교를 위해 설계변수가 2개일 때 실험점의 수를 9개로 하고 Fig. 1의 (b)와 같이 표현된다. (b)에서 알 수 있듯이 실험점들이 점선으로 나타난 분할된 공간에 고루 퍼져 있음을 확인할 수 있다.

IV. 최적화 예제

4.1 3부재 트러스

본 논문에서 제안한 알고리즘의 검증을 위하여 기본적인 예제인 3부재 트러스구조물에 대한 최적화를 수행하였으며, 그 형상은 Fig. 2와 같다.

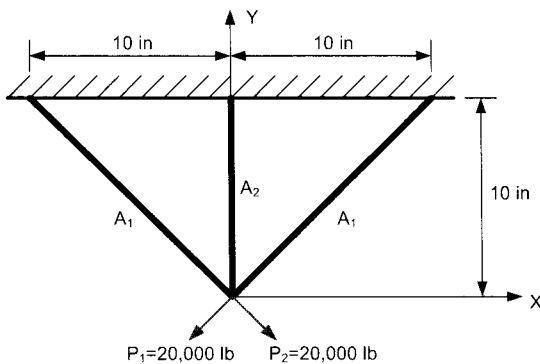


Fig. 2. 3-bar truss

설계변수는 트러스의 면적 A_1 , A_2 이며 목적함수는 트러스 전체의 부피이고, 식(10)과 같이 정식화 하였다. 그리고 부재의 면적에 따른 응력과 변위에 대한 제한조건을 식(11)-(12)와 같이 정식화 하였다[12].

$$\text{Minimize: } OBJ = 2\sqrt{2}A_1 + A_2 \quad (10)$$

Subject to:

$$G_1 = \frac{2A_1 + \sqrt{2}A_2}{2A_1(A_1 + \sqrt{2}A_2)} - 1.0 \leq 0.0 \quad (11)$$

$$G_2 = \frac{1.0}{A_1 + \sqrt{2}A_2} - 1.0 \leq 0.0 \quad (12)$$

$$0.01 \leq A_1, A_2 \leq 100.0$$

Fig. 2에 대한 최적화 결과를 변형 유용 방향 탐색법(method of modified feasible directions, MFD)의 결과와 비교함으로써 본 논문에서 제안한 알고리즘의 효율성을 보이고자 하며, 그 결과를 Table 1에 정리하고, Fig. 3에 목적함수의 수렴과정을 도식화 하였다. 이때 크리깅 모델의 최적화 결과값은 앞서 기술한 5개의 상관함수에 따른 결과값을 비교하여 가장 좋은 값을 얻을 수 있었던 중심합성계획법에서 Matern $\nu = 3/2$ 상관함수, 균일계획법에서는 가우시안 상관함수를 사용한 결과를 정리한 것이다. 반복수행은 실험계획법에 의해 실험점을 선택하고, 크리깅 모델을 만든 후 최적화 알고리즘을 사용하여 국부최적값을 계산하는 전 과정을 1회로 보며, 설계변수가 2개일 때 실험계획법에 의해 반복수행 당 9번의 유한요소 해석을 시행하게 되므로 CCD와 UD의 9, 8회의 반복수행에 대한 총 유한요소 해석 수는 81회, 72회를 의미한다. 또한 중심합성계획법을 이용한 크리깅 모델에서 $2.633in^3$, $2.634in^3$ 로 MFD의 $2.633in^3$ 과 비슷한 결과를 얻을 수 있었고, 정확한 목적함수값은 크리깅 모델에 의해 구해진 설계변수의 최적값을 직접 식에 대입하여 계산한 실제 값과의 오차값이며 0-0.13%이므로 크리깅 모델에 의해 구해진 최적값이 정확한 값이라 할 수 있다.

Table 1. Comparison of optimum results

3-bar truss	Initial	MFD	Kriging	
			CCD	UD
OBJ(in ³)	3.828	2.633	2.633	2.634
Design variables(in ²)	A ₁	1.000	0.799	0.791
	A ₂	1.000	0.372	0.395
No. of iterations	-	-	9	8
Exact objective function	-	-	2.633	2.637
Error(%)	-	-	0.00	0.13

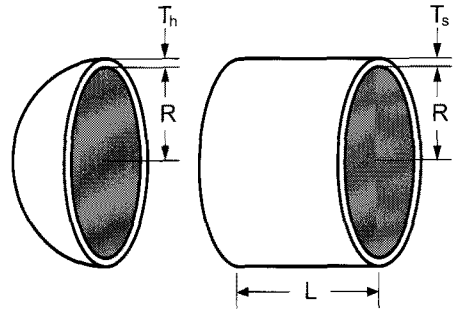


Fig. 4. Sandgren's pressure vessel

설계변수는 반지름(R), 원통의 길이(L) 및 두께 (T_s), 그리고 구형의 상단부분 두께(T_h)이며, 전체 시스템의 비용을 최소화 하는데 그 목적이 있으므로 용접, 재료 등의 비용 등에 대해 전체 시스템의 비용을 정식화 하여 나타낸 식(13)을 최소화 하는 것이다. 식(14)-(15)에서 G_1 과 G_2 는 최소 외벽 두께 T_s 와 T_h 에 대한 미국기계학회 ASME의 규정에 따른 제한조건식 이며, G_3 는 최소 압력용기 부피에 대한 제한조건식이다. 이 압력용기 재료는 탄소강 ASME SA 203 grade B이며, 3,000psi의 압력에 의해 압축된 공기 750ft³을 저장한다[13].

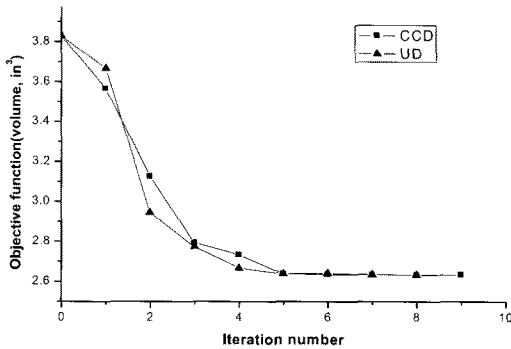


Fig. 3. The history of objective function

4.2 Sandgren의 압력용기

본 논문에서 제안한 최적화 알고리즘과 크리깅 모델의 특성 상 제한조건이 복잡하고 설계변수가 많아 설계변수의 분포를 잘 제어해 줄 수 있는 경우 더욱 효율적이다. 따라서 두 번째 예제는 4개의 설계변수와 3개의 제한조건을 가지는 압력용기(pressure vessel)의 최적화 예제에 적용해 보았다. Fig. 4에서의 압력용기는 Sandgren에 의해 1990년에 연속변수 최적화 방법에 의해 계산되어진 문제이며, 이를 본 연구의 알고리즘에 적용한 결과와 비교하여 그 효율성 및 정확성을 비교, 분석하였다.

Minimize:

$$OBJ = 0.6224 T_s R L + 1.7781 T_h R^2 + 3.1661 T_s^2 L + 19.84 T_s^2 R \quad (13)$$

$$Subject\ to : G_1 = T_s - 0.0193 R \geq 0 \quad (14)$$

$$G_2 = T_h - 0.00954 R \geq 0 \quad (15)$$

$$G_3 = \pi R^2 L + (4/3)\pi R^3 - 1.296 E 6 \geq 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 25\ in &\leq R \leq 150\ in \\ 1.0\ in &\leq T_s \leq 1.375\ in \\ 25\ in &\leq L \leq 240\ in \\ 0.625\ in &\leq T_h \leq 1.0\ in \end{aligned} \quad (17)$$

마찬가지로 본 논문에서 제안한 알고리즘에 의한 크리깅 모델의 최적화 결과를 Sandgren에 의한 최적화 결과값과 비교하여 Table 2에 정리하였으며, Fig. 5는 목적함수의 수렴과정을 보여준다.

Table 2. Comparison of optimum results

Pressure vessel	Initial	Sandgren's optimum	Kriging		
			CCD	UD	
OBJ	10013.1	7867.0	7550.57	7545.9	
Design variables (in)	R	50.000	47.408	51.614	52.024
	T _s	1.200	1.100	1.000	1.001
	L	120.000	117.701	103.355	100.484
	T _h	0.800	0.600	0.607	0.600
No. of iterations	-	-	19	23	
Exact objective function	-	-	7550.1	7546.1	
Error(%)	-	-	0.006	0.002	

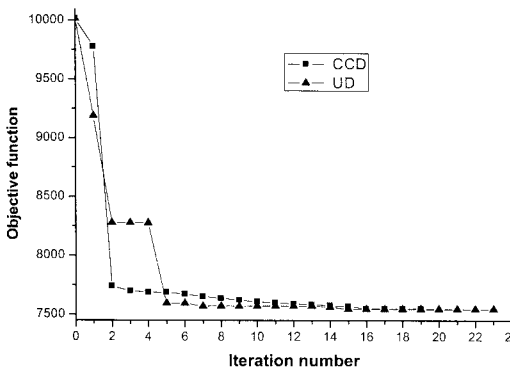


Fig. 5. The history of objective function

Table 2에 정리한 결과값은 본 논문에서 사용한 5개의 상관함수 중 가장 좋은 결과를 보였던 중심합성계획법에서는 3차 상관함수, 균일계획법에서는 Matern $\nu = 5/2$ 상관함수에 대한 결과를 정리하였다. 또한 5가지의 상관함수에 대한 결과값에서 Sandgren에 의한 최적값 보다 더 향상된 결과를 보임으로써, 본 논문에서 제안한 알고리즘의 효율성을 검증하였으며, 실제 함수값과의 오차에서 0.002-0.006%로 정확한 최적화 값을 크리깅 모델에서 얻을 수 있었다.

V. 결론 및 향후과제

본 논문에서는 최근 복잡해진 설계문제에 있어 전반적인 해석 비용의 감소를 위해 통계적 근사화 기법 중 하나인 크리깅을 이용한 최적화 알고리즘을 제안하였다. 최소의 실험점으로 최대의 정보를 얻고자 고전적 실험계획법 중 중심합성계획법과 공간충진 실험계획법 중 균일계획법을 사용하여 실험점을 추출하고, 그 특징을 비교, 분석 하였다. 또한 본 논

문에서 제안한 알고리즘을 최적화 문제에 적용하기 위하여 3부재 트러스 구조물, Sandgren의 압력용기에 대한 최적화를 수행하였다. 그 결과 기존의 최적화 결과보다 크리깅 모델을 이용한 최적화 결과가 더 향상되었음을 알 수 있었으며, 신뢰성과 정확성에 대한 검증을 하였다. 또한 경험적인 방법에 의한 상관함수의 선택이 결과에 영향을 미침을 알 수 있었으며, 실험계획법에 의해서도 결과값이 영향을 받을 수 있다. 하지만 여전히 경험적인 상관함수의 선택에 따른 반복수의 증가에 대한 문제점이 있으므로 상관함수의 선택에 대해 수학적 접근이 필요하며, 이에 대한 연구가 진행 중이다.

후 기

본 연구는 스마트무인기기술개발사업 및 국방과학연구소 그리고 서울대학교 비행체특화연구센터의 연구비 지원에 의한 연구결과입니다. 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 1) Sack, J., Welch, W. J., Mitchell, T. J., and Wynn, H. P., "Design and Analysis of Computer Experiments," *Statistical Science*, Vol. 4, No. 4, 1989, pp. 409~435.
- 2) Currin, C., Mitchell, T., Morris, M., and Ylvisaker, D., "Bayesian Prediction of Deterministic Functions, With Application to the Design and Analysis of Computer Experiments," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 86, No. 416, 1991, pp. 953~963.
- 3) Shinkyu, J., Kazuomi Y., and Shigeru, O., "Kriging-Based Probabilistic Method for Constrained Multi-Objective Optimization Problem," *AIAA 1st Intelligent Systems Technical Conference 20-22*, 2004, pp. 2-5
- 4) Welch, W. J., Buck, R. J., Sack, J., Wynn, H. P., Mitchell, T. J., and Morris, M. D., "Screening, Predicting, and Computer Experiments," *Technometrics*, Vol. 34, No. 1, 1992, pp. 15~25.
- 5) Tzannetakis, N., "Numerical Methods for Modeling and Optimization of Noise Emission Applications," *ASME Symposium in Acoustics and Noise Software*, Detroit, MI, USA,

1997.

6) Deceneiere, E., Forgnat, C., and Meyer, F., "Applications of Kriging to image sequence cooling," *Signal processing; Image communication*, 13, 1998, pp. 227-249.

7) Matern, B., "Spatial Variation(2nd Ed.)," Springer-Verlag Berlin, 1986

8) Goffe, W. L., Ferrier, G. D., and Rogers, J., "Global Optimization of Statistical Functions with Simulated Annealing," *Journal of Econometrics*, Vol. 60, No. 1-2, 1994, pp. 65~100.

9) 성내경, "실험설계와 분석," 자유 아카데미, pp. 401-403

10) Hinkelmann and Kempthorne, "Design and analysis of experiments," Vol. 1: *Introduc-*

tion to experimental design, Wiley, 1994

11) Jin, R., Chen, W., and Sudjianto, A., "An Efficient Algorithm for Constructing Optimal Design of Computer Experiments," *Proceedings of DETC'03, Chicago, Illinois USA*, 2003, DETC2003/DAC-48760.

12) Lin, Y., Mistress, F., Allen, J. K., and Tsui, K., "Sequential Metamodeling in Engineering Design," *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 2004, pp. 1-13.

13) Simpson, T. W., "A Concept Exploration Method for Product Family Design," PH.D. Thesis Appendix, Georgia Institute of Technology, 1998, pp. 280-281.