

평치차 시스템 진동의 이론적 해석

○ 전 재 진, 이 병 호
* 한국과학기술원, 한국과학기술원

Theoretical Analysis on the Vibration of the Spur Gear System

○ Jeon, Jae Jin, Lee, Byung Ho
* KAIST, KAIST

I. 서론

동력전달기구를 형성하고 있는 치차들은 그들을 지지하고 있는 축의 처짐으로 진동이 발생되는 것과, 구동치차와 피동치차의 상대적 운동의 불안정 요소에 의해 기어 System은 진동하게 된다. 불안정 요소로는 치형 결함, 치형 오차, Backlash 등이 있다. 그리고 구동하는 동안 기어 이빨사이의 접촉비의 변화로 이빨의 Stiffness의 변화를 초래하여 이빨사이에 작용하는 동하중에 변화하여 동력전달에 변화가 발생하게 된다.

위에서 열거된 현상들에 대해 Buckingham.E.[1]D. R.Houser[2] A.Seireg[3] 등은 기어시스템의 동적 특성을 비틀림운동으로 해석을 했으며, H.Fukuma[4]는 3-direction의 진동을 고려 이론적으로 해석하고 치차 소음과의 관련성을 연구했다. Terauchi[5]는 소음레벨에 대한 치형 수정 효과를 실험적으로 보여주고 있고, Azar[7]는 이빨접촉을 충격 현상으로 고려 해석 제안했다.

이 연구에서는 기어시스템을 간단히 구동계와 피동계의 조합으로 구성해서 운동 방정식을 세우고 수치 해석적 방법으로 계산해서 치차의 진동 현상을 파악하고자 한다. 본 연구에서는 세 방향의 진동(원주, 축, 축직각 방향) 모두를 고려했으며 gyroscopic effect까지 고려하고 있다. 또한 운동 방정식에서 가진력으로 작용하는 항들은 치형오차와 Backlash에 의한 동하중의 변화를 고려하고 이들 변화를 tooth mesh frequency와 시간의 함수로 가정했다. 운동방정식은 4th order Runge-Kutta method를 이용해서 풀었다.

II. System의 해석

2-1. 피동계의 운동방정식과 그 해석

기어시스템은 구동부분, 치차부분 외부로 동력을 전달하는 피동부분이 축으로 연결되어 있다. 치차의

편심량은 없다고 가정하고 베어링 지지는 단순 지지로 고려했다.

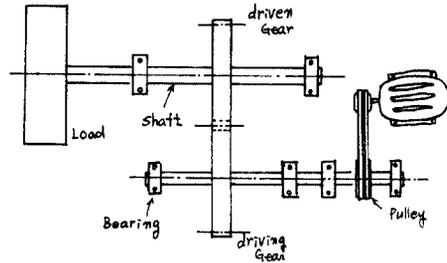


Fig 1. Schematic diagram of gear system.

위 그림에서 보는 바와 같은 계를 해석하려면 스프링 상수를 알아야 하므로 영향계수 (influence coefficient) [d]는

$$[d] = \frac{1}{EIz} \begin{bmatrix} \frac{c^2 L^2 (1-c)^2}{3} & \frac{-aL^2 c(1-c^2)}{6} & \frac{cL^2 (1-c)(1-2c)}{3} & \frac{cL^2 (c^2-1)}{6} \\ \frac{-aL^2 c(1-c^2)}{6} & \frac{L^2 (L+a)}{3} & \frac{aL(c^2-1/3)}{2} & \frac{(2La+3a^2)}{6} \\ \frac{cL^2 (1-c)(1-2c)}{3} & \frac{aL(c^2-1/3)}{2} & L(c^2-c+1/3) & L(c^2-1/3)/2 \\ \frac{cL^2 (c^2-1)}{6} & \frac{(3a^2+2La)}{6} & \frac{L(c^2-1/3)}{2} & \frac{L}{3}+a \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

여기서 $0 < c < 1$, a는 플라이 휠의 베어링과의 거리 식 (1)로부터 stiffness matrix [K]를 구하면,

$$[K] = [d]^{-1} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

Fig1에 대한 운동방정식을 세우기 전 가정을 몇 가지 하면,

- 1) 기어 이빨사이의 마찰은 무시한다.
- 2) 축의 길이는 고려하지 않는다.
- 3) 베어링 지지점의 변위는 없다고 한다.

이들 가정 아래 계의 운동에너지는,

$$2T = J_1 \dot{\phi}_1^2 + J_2 \dot{\phi}_2^2 + m_1 (\dot{x}_v^2 + \dot{x}_H^2) + m_2 (\dot{y}_v^2 + \dot{y}_H^2) + I_1 (\dot{\phi}_{1v}^2 + \dot{\phi}_{1H}^2) + J_2 (\dot{\phi}_{2v}^2 + \dot{\phi}_{2H}^2) + J_3 \dot{\phi}_1 (\dot{\phi}_{1H} \phi_{2v} - \dot{\phi}_{1v} \phi_{2H}) + J_2 \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_{2H} \phi_{2v} - \dot{\phi}_{2v} \phi_{2H}) \dots \dots \dots (3)$$

여기서 $I = m(B^2/3 + D^2/4)$ B:치폭, D:기어나 플라이휠지름.

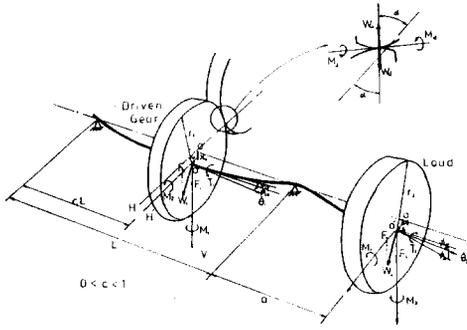


Fig 2. Forces and moments acting on a pair of gears.

Lagrange's Equation 을 이용해서 운동방정식을 구하면,

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{\theta}_1 + J_1 (\ddot{\phi}_{1H} \phi_{1V} - \dot{\phi}_{1V} \dot{\phi}_{1H}) + C (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K_{\theta 1} (\theta_1 - \theta_2) &= T_1(t) \\
 J_2 \ddot{\theta}_2 + J_2 (\ddot{\phi}_{2H} \phi_{2V} - \dot{\phi}_{2V} \dot{\phi}_{2H}) + C (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + K_{\theta 2} (\theta_2 - \theta_1) &= T_2(t) \\
 m_1 \ddot{x}_V + C_{\chi} \dot{x}_V + K_{11} x_V + K_{12} y_V + K_{13} \phi_{1V} + K_{14} \phi_{2V} &= F_1(t) \\
 m_1 \ddot{x}_H + C_{\chi} \dot{x}_H + K_{11} x_H + K_{12} y_H + K_{13} \phi_{1H} + K_{14} \phi_{2H} &= F_2(t) \\
 m_2 \ddot{y}_V + C_{\chi} \dot{y}_V + K_{21} x_V + K_{22} y_V + K_{23} \phi_{1V} + K_{24} \phi_{2V} &= F_3(t) \\
 m_2 \ddot{y}_H + C_{\chi} \dot{y}_H + K_{21} x_H + K_{22} y_H + K_{23} \phi_{1H} + K_{24} \phi_{2H} &= F_4(t) \\
 I_1 \ddot{\phi}_{1V} - J_1 \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_{1H} - J_1 \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_{1H} + C \phi_1 \dot{\phi}_{1V} + K_{31} x_V + K_{32} y_V + K_{33} \phi_{1V} + & \\
 K_{34} \phi_{2V} &= M_1(t) \\
 I_1 \ddot{\phi}_{1H} + J_1 \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_{1V} + J_1 \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_{1V} + C \phi_1 \dot{\phi}_{1H} + K_{31} x_H + K_{32} y_H + K_{33} \phi_{1H} + & \\
 K_{34} \phi_{2H} &= M_2(t) \\
 I_2 \ddot{\phi}_{2V} - J_2 \dot{\theta}_2 \phi_{2H} - J_2 \dot{\theta}_2 \phi_{2H} + C \phi_2 \dot{\phi}_{2V} + K_{41} x_V + K_{42} y_V + K_{43} \phi_{1V} + & \\
 K_{44} \phi_{2V} &= M_3(t) \\
 I_2 \ddot{\phi}_{2H} + J_2 \dot{\theta}_2 \phi_{2V} + J_2 \dot{\theta}_2 \phi_{2V} + C \phi_2 \dot{\phi}_{2H} + K_{41} x_H + K_{42} y_H + K_{43} \phi_{1H} + & \\
 K_{44} \phi_{2H} &= M_4(t)
 \end{aligned} \tag{4}$$

로 주어진다.

2-2. 계의 동하중 해석

2-2-1. 치차 이빨의 강성 결정

위의 식 (4) 에 주어진 동하중을 결정해 주기 위해서는 치차 이빨의 강성과 치형오차를 알아야 한다.

치차 이빨의 강성을 구하기 위해 앞서 몇가지 가정울 세우면,

- 1) 치차는 이빨을 제외하고는 외력에 의한 변형이 없다.
- 2) 접촉선의 변형은 단지 작용면상에서 일어난다.
- 3) 접촉선을 따라 일어나는 변형은 이빨에 수직인 방향으로 일어나는 양보다 작아 무시할 수 있다.

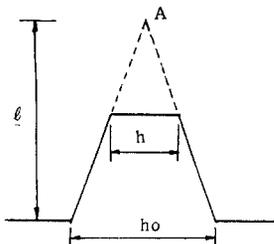


Fig 3. Gear tooth model.

인볼류트 치차의 형상을 Fig 3 과 같이 가정하면 외팔모의 해석을 이용해서 이빨의 처짐양을 구할 수 있다. 처짐은,

$$d = \frac{P}{B} \left[\frac{E_1 Z_1 + E_2 Z_2}{E_1 Z_1 + E_2 Z_2} \right] \tag{5}$$

$$Z = \frac{y}{0.242 + 7.25 y} \tag{6}$$

로 주어지며 여기서 B는 치폭 y는 tooth-form factor로 Lewis가 구한 값을 이용했고 1, 2는 구동, 피동축 나타내는 첨자이다. 그러므로 치차 이빨의 강성은,

$$K_s = \frac{P}{d} = \frac{E_1 Z_1 E_2 Z_2}{E_1 Z_1 + E_2 Z_2} B \tag{7}$$

로 나타나게 된다.

2-2-2. 동하중 해석

식 (4) 에서 나타나는 힘의 항은 정적인 하중과 동적인 하중으로 크게 구분할 수 있다.

동적하중은 치형오차가 없다면,

$$Wd = K_s(t) \delta(t) \tag{8}$$

δ : 이빨의 상대적 변형 양

로 주어지며, δ 는

$$\delta = r\theta - x_V \cos \alpha - x_H \sin \alpha \tag{9}$$

로 주어진다. $r\theta$ 는 상대적 각 변위양이다.

치차계에서 주요 가진력은 δ 의 변화와 이빨 사이의 접촉비 (contact ratio) 의 변화에서 오며 이빨의 강성은,

$$K_s(t) = K_s (1 - C_1 \cos wft) \tag{10}$$

wf = tooth-mesh frequency

C_1 = 강성 변화의 크기

로 주어지게 된다.

치차의 치형오차를 고려하면 동하중은

$$Wd = K_s(t) (r\theta - x_V \cos \alpha - x_H \sin \alpha) - F \tag{11}$$

F 는 스프링상수와 치형오차의 함수로 주어진다.

치형오차를 동적인 상태로 표현하면 tooth mesh frequency로 표현할 수 있다. 치형 오차는,

$$e = C_2 \cos wft + C_3 \cos 2wft \tag{12}$$

로 주어지며 C_2, C_3 는 치형오차의 특성으로 정해지는 상수이다. 또한 치차가 축 방향의 진동을 하게되므로 접선 모멘트가 발생하게 된다. 접촉선에 대한 접선 모멘트는,

$$Md = K_s(t) B^2 (\phi_V \cos \alpha + \phi_H \sin \alpha) / 12 \tag{13}$$

로 주어진다.

δ 크기의 변화에 따라 계의 동적 하중은

$$1) e \leq 0$$

$$\text{if } |\delta| \leq |e|$$

$$Wd = 0, Md = 0 \tag{14}$$

- if $|\delta| \geq |e|$: 동하중 존재
 2) $e \geq 0$: 동하중 존재

로 결정된다.

위에 열거된 내용으로 외력을 결정하면,
 $F_1(t) = \{Wd + Ws\} \cos \alpha$
 $F_2(t) = \{Wd + Ws\} \sin \alpha$
 $F_3(t) = F_4(t) = 0$ (15)
 $M_1(t) = -Md \cos \alpha$
 $M_2(t) = -Md \sin \alpha$
 $M_3(t) = M_4(t) = 0$

로 주어지며 식 (14)의 조건 아래 성립된다. 상대적 각 변위 $r\theta$ 를 얻기 위해 구동 치차에 대하여 운동 방정식을 세우면,

$$J_G \ddot{\theta}_G + C_s(\dot{\theta}_G - \dot{\theta}_P) + K_T(\theta_G - \theta_P) = T_G(t)$$

$$J_P \ddot{\theta}_P + C_s(\dot{\theta}_P - \dot{\theta}_G) + K_T(\theta_P - \theta_G) = T_P(t)$$
 (16)

로 주어지며 G와 P는 치차와 풀리를 나타낸 첨자이다.

Torsional Stiffness는
 $K_T = \frac{GJ}{L}$ (17)

식 (16)에서 $r_G \theta_G$ 를 구하여 $r\theta$ 를 구하면
 $r\theta = r_1 \theta_1 - r_G \theta_G$ (18)

Torque는
 $T_1(t) = -r_1 Wd - T_0$
 $T_2(t) = T_0$ (19)
 $T_G(t) = r_G Wd - T_0$
 $T_P(t) = T_0$

감쇠는
 $C_x = 2 \zeta_x \sqrt{m_1 K_{11}}$, $C_y = 2 \zeta_y \sqrt{m_2 K_{22}}$
 $C_a = 2 \zeta_a \sqrt{J_1 K_{T1}}$, $C_{\phi_1} = 2 \zeta_{\phi_1} \sqrt{I_1 K_{\phi_1}}$ (20)
 $C_{\phi_2} = 2 \zeta_{\phi_2} \sqrt{I_2 K_{\phi_2}}$, $C_s = 2 \zeta_s \sqrt{J_G K_T}$

2-3. 계의 고유 진동수

계의 운동 방정식에서 지지점간의 간격이 좁으면 gyroscopic effect를 무시할 수 있다. 식 (4)에서 $x_v/\cos \alpha = x_H/\sin \alpha = x$, $y_v/\cos \alpha = y_H/\sin \alpha = y$, $\phi_v/\cos \alpha = \phi_H/\sin \alpha = \phi$ 를 이용하면 식은 간략화되며,
 $\ddot{u} + c(t)\dot{u} + \omega^2(t)u = Q$ (21)

로 나타나며 nonsymmetric eigenvalue 문제로 해석할 수 있다. 치차 이빨의 강성이 큰 값을 가지므로 접촉이 되지 않은 경우와 치차가 접촉하는 경우가 불규칙하게 존재하므로 어느 일정한 한 값으로는 경제하지 않는다. 그 예를 Table 2에서 볼 수 있다.

치차 본체의 진동은 원형평판의 진동으로 해석될 수 있으나, 수학적으로 해석하기에는 어려운 점이 많다. 치차 본체의 진동은 축이 연결됨으로서 고유진동수의 저하를 가져오게 되고 치수에 따라 원형평판의 해석에서 얻은 진동수 보다 낮은 값을 가지게

된다. 고유 진동수는 다음과 같은 실험식으로부터 구할 수 있다.

$$f_n' = (f_n \times \alpha) / D$$
 (22)

$$f_n = f_n' (1 - \beta)$$
 (23)

여기서 $f_n' = t$ 와 D의 비에 따른 단위원판의 고유 진동수
 $f_n' =$ 상당원판의 고유 진동수
 $f_n =$ 기어 본체의 진동수
 $\beta =$ 치수에 따른 보정율
 $\alpha = d/D$ 에 따른 보정 계수

치차 본체의 진동은 이 계에서 axial direction의 진동에 방향을 주게 되나 고려하지는 않았다.

2-4. Digital Simulation

식 (4)와 (16)은 nonlinear differential equation이므로 해석적인 해를 구할 수가 없다. 그렇기 때문에 Runge-Kutta method를 이용해서 수치 해석으로 변수들의 값을 구하고 각 방향에 대한 acceleration을 구한다. Acceleration이 수직, 수평 방향 성분으로 나누어져 구해지므로 실제 측정치와 비교하기 위해서 circumferential vibration은 $-r_1 \ddot{\theta}_1$, radial vibration은 $\ddot{x}_v \cos \omega t + \ddot{x}_H \sin \omega t$, axial vibration은 $r(\ddot{\phi}_v \cos \omega t + \ddot{\phi}_H \sin \omega t)$ 로 계산한다. 해석 순서는 Fig 4에서 Flow chart로 도시했다.

위에서 언급된 4th order Runge-Kutta method를 이용해서 비선형 미분 방정식을 풀고 시간의 변화에 따른 acceleration 값을 세 방향에 대해 256개의 data를 구하였다. 이 구한 data를 가지고 Cooly-Tukey algorithm을 이용하여 FFT(Fast Fourier Transform)을 취한 다음 PSD(power spectral density)를 구하였다. PSD의 frequency 간격은 19.5 Hz이다.

III. Discussion

이론적으로 수치해석적 방법을 이용해서 결과를 얻는 방법은 Fig 4에서 보는 바와 같이 이빨 한 개 한 개의 조건이 모두 동일하다고 가정하고 있으나 실제 실험에서는 항상 그렇지 않다.

Fig. 5는 원주방향의 진동에 관한 실험에서 얻은 PSD이다. peak를 나타내고 있는 곳의 frequency는 tooth mesh frequency (250Hz)이며, Fig. 6에서 이론적으로 구한 PSD와 비교해 볼 때 같은 frequency에서 peak를 가지고 있음을 보아 잘 일치하고 있다. Fig. 7은 축의 직각방향에 대한 PSD이며 peak를 나타내는 곳은 Fig. 8의 이론적으로 구한 것과 일치하고 있고, 그보다 작은 peak는 natural frequency의 영향이 실험에서 나타나고 있다. Fig. 9에서는 axial vibration에 대한 결과를 보여주고 있고, tooth mesh frequency에서 Fig. 10의 이론적 결과와 같은 경향을 가지고 있으나, 두번째 peak는 2nd tooth mesh frequency에 의해 system의 2nd harmonic근방의 natural frequency가 가진되어 크게 나타나고 있다. 또한 1.1KHz의 조그만 peak를 보이는 것은 기어 본체의 1-0 모드의 vibration을 나타낸다. 실험치의 분석은 Sensor (Accelerometer, Gap sensor)로부터 측정된 signal을 녹음한 다음, Digital signal analyzer를 통하여 분석을 했다.

Fig. 11에서는 실험에서 얻은 각 방향의 acceleration의 peak value와 이론에서 구한 값을 plot한 것이다. 이를 보면 이론치와 실험치의 값이 커다란 차이없이 같은 정도로 경향이 일치되어 간다. Fig. 12에서 profile error가 변화하면서 acceleration의 변화가 어떻게 되는지를 이론적으로 보여주고 있다. profile error가 증가하면 acceleration도 증가함을 알 수 있고, 거의 비례적인 관계를 볼 수 있다.

IV. 결 론

Spur gear system이 구동될 때, 과동기어의 동적특성을 파악하기 위해 model을 세우고 이론적으로 운동방정식을 세우고 그것을 수치해석적 방법으로 풀어 보았고 실험을 통하여 비교했다. 이론에서 gyroscopic effect와 profile error는 고려했다. 4개의 관성체로 이루어진 계에 대한 해석과 실험으로 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) system에서 동력전달에 사용되고 있는 기어의 세 방향 진동은 서로 연관지어져 있으며, 그 중 접선 방향의 진동이 굉장히 큰 값을 가지므로 접선 방향 진동만 안정하다면, 축 방향과 축의 직각방향의 진동은 따라서 안정하게 된다.
- 2) 작용선을 따라 기어의 profile error를 cosine 함수로 가정한 결과 실험과 잘 일치하고 있어 error의 양을 시간과 tooth mesh frequency의 cosine 함수로 전개한 표현이 타당함을 알 수 있다.
- 3) 치 차의 tooth profile error가 증가함에 따라

vibration도 증가한다. error가 50% 증가하면서 acceleration 양은 20~30%정도 증가함을 알 수 있어 error의 증가와 acceleration의 증가는 밀접한 관계를 가진다.

- 4) 치차 이빨의 강성변화를 시간과 tooth mesh frequency의 삼각함수로 전개하여 풀 것 과 실험이 잘 일치하고 있다.
- 5) Load가 가해지는 플라이 휠이 달린 곳까지 배어링 지지점에서 거리가 멀지않고 지지점간의 간격이 좁은 경우에 gyroscopic effect는 고려하지 않아도 된다.

V. 참고 문헌

1. Buckingham, E., Analytical Mechanics of Gears, Dover Publication, 1949. chapt. 20, 21.
2. D.R. Houser and A. Seireg, "An Experimental Investigation of Dynamic Factors in Spur and Helical gears", J. of Eng. for Ind. Trans. of ASME, Vol 92, Series B, May (1970) pp.495~503.
3. A. Seireg and D.R. Houser, "Evaluation of Dynamic factors for Spur and Helical Gears", J. of Eng. Ind., Trans of ASME Vol 92, Series B, May (1970) pp.504~515.
4. Hiroki Fukuma, "Fundamental Research on Gear Noise and Vibration 6th", Bulletin of JSME, Vol 16, No 97, Jul (1973) pp.1094~1107.
5. Yoshio Terbuchi, "On the Effect of the tooth Profile Modification on the Dynamic Load and Sound Level of the Spur Gear", Bulletin of JSME, Vol 25, No 207, Sept. (1982), pp.1474~1481.
6. William D. Mark, "Analysis of Vibration Excitation of Gear Systems", JASA, Vol 63, May (1978)
7. R.C. Azar, "Digital Simulation of Impact Phenomenon in Spur Gear Systems", J. of Eng. Inds. Trans. of ASME Vol 99, Series B, August (1977), pp.792~798.
8. M.R. Matausek, "On Warner's Algorithm for Solution of Boundary-value Problems for Ordinary Differential Equations", Journal of Optimization Theory and Application, Vol 20, No.1, Sept. (1976), pp.37~63.
9. 梅澤清彦, "齒車の振動騒音とその対策", 機械設計, 第26卷, 第3号, 1982, pp.37~42.

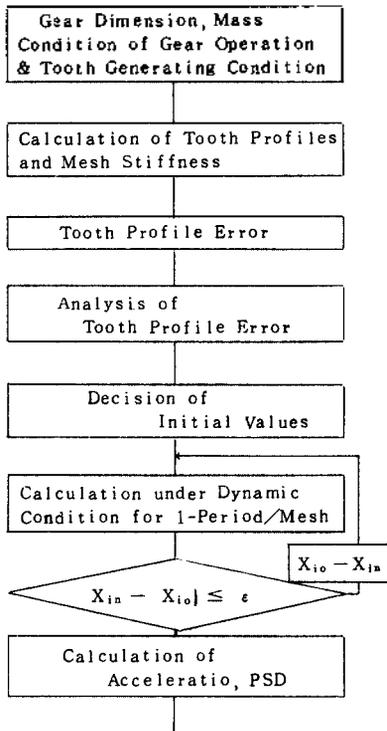


Fig. 4 Flow Chart

Sub-script	Polar moments of inertia (kg m ²)	Diametral moment of inertia(kgm ²)	Mass (kg)
1	0.0418359	0.0217721	8.36719
2	0.0597656	0.0323731	11.95312
G	0.0361602	-	7.23198
P	0.0015456	-	1.19787

$EI_z = 15159.58968 \text{ N/m}^2$
 $K_s = 213540009.3 \text{ N/m}$

Table 1. Values of the parameters

case Eigenvalue	Separation	Single contact	Double contact
λ_1	97960.60	13898013.30	27735984.50
λ_2	0	61743.44	61861.42
λ_3	1876809.12	1943430.99	2017487.49
λ_4	725827.14	721474.20	722306.42
λ_5	116286.53	109307.23	109403.86
λ_6	7815.03	7701.11	7712.11
λ_7	741018.51	731637.37	732142.49
λ_8	0	0	0

Table 2. Eigenvalues of system $\lambda \equiv \omega^2$

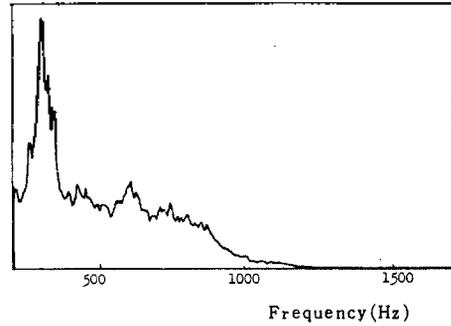


Fig.5 PSD of the acceleration in a circumferential direction:experimental result $\omega_f = 250 \text{ Hz}$

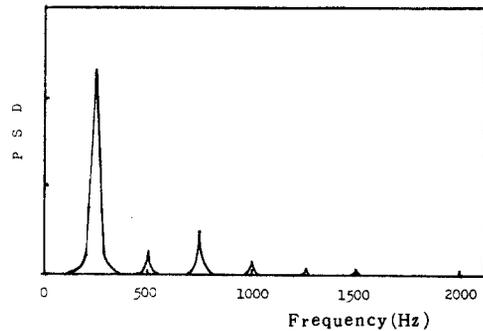


Fig.6 PSD of the acceleration in a circumferential direction:calculation result $\omega_f = 250 \text{ Hz}$

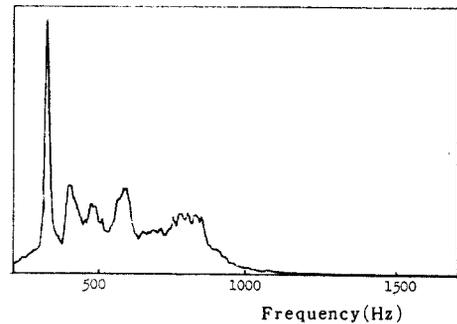


Fig.7 PSD of the acceleration in a radial direction:experimental result $\omega_f = 250 \text{ Hz}$

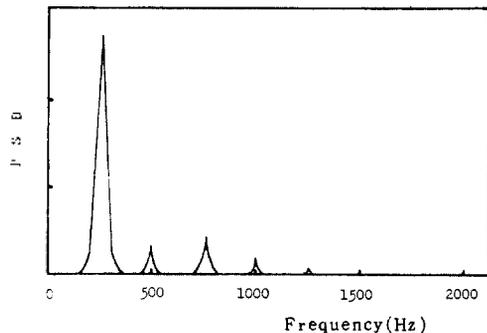


Fig.8 PSD of the acceleration in a radial direction:calculated result $\omega_f = 250 \text{ Hz}$

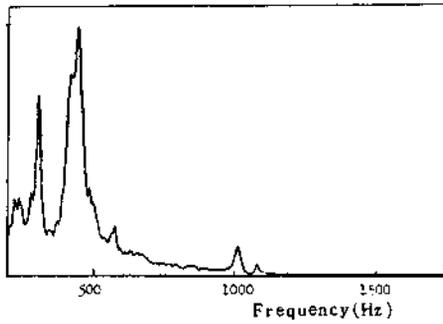


Fig.9 PSD of the acceleration in an axial direction:experimental result $\omega_H = 250$ Hz

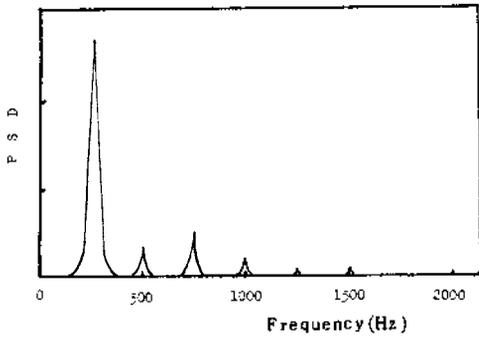


Fig.10 PSD of the acceleration in an axial direction:calculated result $\omega_H = 250$ Hz

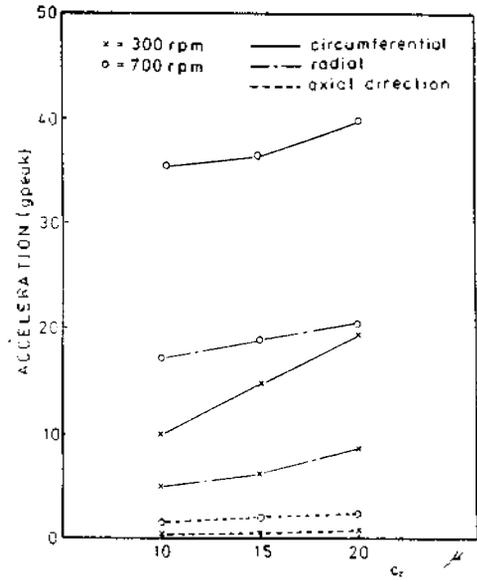


Fig.12 The peak values of accelerations due to the profile errors $T_0 = 1$ kgm

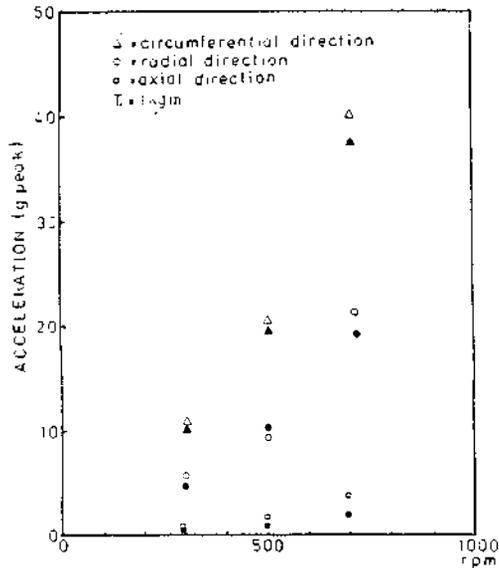


Fig.11 The peak values of accelerations
(solid:calculated result
void:experimental result)