

고체내에서 초음파 감쇠에 대한
음향자 작용과 열적 효과

○ 김 성규, 이 준하, 김 해운
*영남대학교 이과대학 물리학과

○ Kim Sung Kyu, Lee Jun Ha, Kim Ye Hyun

Abstract

The limitation and validity of Landau-Rumer theory and Akhieser method for the sound attenuation in crystalline quartz is discussed by comparing with some experimental facts.

It is turned out that Landau-Rumer theory is most likely satisfied at $T < 40^\circ\text{K}$ and Akhieser method at $T > 100^\circ\text{K}$.

1. 서론

진동수 10^8 이상의 초음파 생성, 측정이 가능하게 됨으로써, 실험에 있어서 나타난 흥미로운 양상의 하나는 고체내에서 thermal phonon과 sound phonon 사이의 상호작용으로 진동수 감쇄가 일어나는 현상이다. 그래서 attenuation을 구하기 위한 이론적 접근이 Landau-Rumer와 Akhieser에 의하여 이루어졌다. 먼저 L-R는 낮은 에너지 phonon의 beam으로서 음파를 간주했으며, 이들 sound phonon이 thermal phonon과 충돌함으로써 산란된 phonon 위 비를 구하여 attenuation을 계산하였다.

L-R는 비등방성이고 속도 분산을 모르는 하나의 sound phonon과 두 개의 thermal phonon을 포함하는 system의 충돌을 고려했으며, 그 후 많은 연구가들에 의하여 더 많은 phonon에 대한 충돌 효과를 설명할 수 있도록 L-R theory를 확장했으며, attenuation이 비등방성과 분산에 어떻게 영향을 미치는가를 연구하였다.

주목할 것은 thermal phonon의 polarization이 특수한 sound phonon의 polarization과 상호 작용한다는 제한으로 selection rule를 유도함으로써 이루어졌다.

selection rule은 phonon 사이의 충돌에서 에너지와 momentum이 보존되기 때문에 일어난다.

이들 법칙은 단지 thermal phonon의 평균 자유행로가 매우 긴 낮은 온도에서만 성립한다. 또 다른 attenuation을 구하기 위한 이론적 접근이 Akhieser에 의한 Boltzmann equation method이다. 이 이론에서 음파는 거시적 관점으로 취급된다. Akhieser는 thermal phonon의 진동수가 변형에 의존하기 때문에 일어나는 결합으로서, thermal phonon system에서 driving force에 의한 sound phonon의 변형을 생각하였다.

이 driving force 때문에, thermal phonon system은 평형으로부터 혼란되지만 thermal phonon 사이의 충돌 때문에 평형 상태로 돌아 가려고 하는 경향이 있다. Akhieser는 이들 충돌과 관계된 entropy에서 비가역적인 증가를 결정함으로써 attenuation을 계산하였다. 그 후 Woodruff와 Ehrenreich(1961)와 그의 많은 연구가들에 의하여 상세히 연구되었다. 이 이론은 thermal phonon의 평균 자유행로가 sound wave의 파장보다 짧은 높은 온도에서만 성립한다.

이 논문에서는 L-R theory와 Akhieser method와 실험치들을 비교 검토함으로써 온도 경계점에 관하여 알아보고 두 이론의 한계성과 정당성을 논한다.

2. Landau-Rumer Theory

harmonic 근사에서 Hamiltonian H는

$$H = \frac{1}{2} \sum_{qj} \hbar \omega(qj) [a(qj) + a'(qj) a(qj)] \dots (2-1)$$

여기서,

$$a(\vec{q}j) |1_m\rangle = [N(\vec{q}j)]^{\frac{1}{2}} |1_{j1}\rangle \quad \dots (2-2)$$

$$a^*(\vec{q}j) |1_m\rangle = [N(\vec{q}j)+1]^{\frac{1}{2}} |1_{j2}\rangle \quad \dots (2-3)$$

(2-1) 식에서 H에 대한 eigenvalue E는

$$E = \sum_{\vec{q}j} [N(\vec{q}j) + \frac{1}{2}] \hbar \omega(\vec{q}j) \quad \dots (2-4)$$

여기서 $N(\vec{q}j)$ 는 0이거나 양의 정수이다.

harmonic 근사에서 phonon 들은 완전히 독립이다.

만약 mode $\vec{q}j$ 를 갖는 에너지가 결정 속으로 유도된다면 이 에너지는 감소하지 않고 다른 mode 사이로 분배되어 진다. 유한한 감쇄를 얻기 위하여 harmonic 근사를 넘어 3차, 4차 potential energy 항을 고려해야 한다. Hamiltonian에 대한 anharmonic 기여는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} H_A &= \Phi_3 + \Phi_4 \\ &= \frac{1}{6} \sum_{\vec{q}\vec{q}'\vec{q}''} \Phi \alpha \beta \gamma \cdot \left(\frac{i\hbar^3}{q q q'} \right) u \alpha \left(\frac{i}{q} \right) \times u \beta \left(\frac{i}{q'} \right) u \gamma \left(\frac{i}{q''} \right) + \\ &\quad \frac{1}{24} \sum_{\vec{q}\vec{q}'\vec{q}''\vec{q}'''} \Phi \alpha \beta \gamma \delta \left(\frac{i\hbar^4}{q q q q'} \right) u \alpha \left(\frac{i}{q} \right) \times u \beta \left(\frac{i}{q'} \right) u \gamma \left(\frac{i}{q''} \right) \\ &\quad u \delta \left(\frac{i}{q'''} \right) \quad \dots (2-5) \end{aligned}$$

여기서

$$\Phi \alpha \beta \gamma \left(\frac{i\hbar^3}{q q q'} \right) \text{와 } \Phi \alpha \beta \gamma \delta \left(\frac{i\hbar^4}{q q q q'} \right) \text{는 3차, 4차 결합 요소이다.}$$

$a(\vec{q}j)$, $a^*(\vec{q}j)$ 의 operator로 (2-5)식을 표현하면,

$$\begin{aligned} H_A &= \frac{\hbar^3}{2^{\frac{3}{2}} \cdot 6 \cdot N} \sum_{j_1 j_2 j_3} \frac{\Phi(\vec{q}_1 j_1 \vec{q}_2 j_2 \vec{q}_3 j_3)}{(\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{\frac{3}{2}}} \times [a(\vec{q}_1 j_1) - \\ &\quad a^*(-\vec{q}_1 j_1)] [a(\vec{q}_2 j_2) - a^*(-\vec{q}_2 j_2)] [a(\vec{q}_3 j_3) - \\ &\quad a^*(-\vec{q}_3 j_3)] + \frac{\hbar^4}{2^{\frac{3}{2}} \cdot 24 \cdot N} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \frac{\Phi(\vec{q}_1 j_1 \vec{q}_2 j_2 \vec{q}_3 j_3 \vec{q}_4 j_4)}{(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad [a(\vec{q}_1 j_1) - a^*(-\vec{q}_1 j_1)] [a(\vec{q}_2 j_2) - a^*(-\vec{q}_2 j_2)] [\vec{q}_3 j_3) - \\ &\quad a^*(-\vec{q}_3 j_3)] [a(\vec{q}_4 j_4) - a^*(-\vec{q}_4 j_4)] \quad \dots (2-6) \end{aligned}$$

여기서 $\omega_1 = \omega(\vec{q}_1 j_1)$ 이며,

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{q}_1 j_1 \vec{q}_2 j_2 \vec{q}_3 j_3) &= \Delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \sum_{i\mu k} \frac{\Phi \alpha \beta \gamma \left(\frac{i\hbar^3}{\tau \mu k} \right)}{(M_\mu M_\mu M_\mu)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad e_\alpha(\vec{q}_1 j_1 \mu) e_\beta(\vec{q}_2 j_2 \mu) e_\gamma(\vec{q}_3 j_3 \mu) \exp \\ &\quad \{ 2\pi i [\vec{q}_1 \cdot \vec{x}(i) + \vec{q}_2 \cdot \vec{x}(i'')] \} \end{aligned}$$

함수 $\Delta(\vec{q})$ 는 역격자 vector이거나 zero vector이

면 1이고, 그 외의 경우는 0이다.

L-R 접근은 초기의 crystal이 온도 T에서 열적 평형 상태에 있다고 가정한다.

mode $\vec{q}j$ 에서 phonon의 가능한 수는 Bose-Einstein 분포 함수로 주어진다.

$$N_0(\vec{q}j) = \left\{ \exp\left[-\frac{\hbar \omega(\vec{q}j)}{k_B T}\right] - 1 \right\}^{-1} \quad \dots (2-7)$$

sound phonon의 도입은 mode $\vec{Q}J$ (\vec{Q} 는 sound의 wave vector이고, J는 polarization이다)를 포함하는 phonon과 같으며 총수는 $N(\vec{Q}J)$ 이다. 이곳은 열적 평형 상태의 수 $N_0(\vec{Q}J)$ 보다 크다. 문제는 anharmonic 항의 Hamiltonian에서 원래 mode 사이의 결합 때문에 산란되는 phonon의 비율 계산하는 것이다.

$$\frac{1}{\tau} = - \frac{1}{N(\vec{Q}J) - N_0(\vec{Q}J)} \frac{dN(\vec{Q}J)}{dt} \quad \dots (2-8)$$

(2-8) 식으로 주어지는 sound phonon에 대한 relaxation time τ 를 정의할 수 있으며, 이 τ 는

$$\tau = \frac{1}{2\Gamma S(\vec{Q}J)} \quad \dots (2-9)$$

로 주어지는 단위 거리당 wave 진폭의 감쇄와 관계되어 있다. $N(\vec{Q}J)$ 의 수가 하나만 변한다고 가정한다면 섭동 이론의 Golden Rule를 사용하여

$$\begin{aligned} \frac{dN(\vec{Q}J)}{dt} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f | \langle \phi f | H_A | \phi i \rangle |^2 \\ &\quad \delta(E_i - E_f) - \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f | \langle \phi f | \\ &\quad H_A | \phi i \rangle |^2 \delta(E_i - E_f) \quad \dots (2-10) \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 Σ^+ 와 Σ^- 는 $\vec{Q}J$ mode의 phonon $N(\vec{Q}J) + 1$ 과 $N(\vec{Q}J) - 1$ 과 $N(\vec{Q}J) - 1$ 을 가지는 $|\phi f\rangle$ 상태에 대한 합이다. (2-6)식과 $a(\vec{q}j)$, $a^*(\vec{q}j)$ operator의 성질과 함께 attenuation은 바로 계산된다.

$$\begin{aligned} \Gamma^+ &= \frac{\pi \hbar}{16 N \Omega S} \sum_{\substack{q_1 q_2 \\ j_1 j_2}} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \{ 2 | \Phi(\vec{Q}J \vec{q}_1 j_1 - \vec{q}_2 j_2) |^2 (N_1 \\ &\quad - N_2) \times \Delta(\vec{Q} + \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \delta(\Omega + \omega_1 - \omega_2) + | \Phi \\ &\quad (\vec{Q}J - \vec{q}_1 j_1 - \vec{q}_2 j_2) |^2 (2N_1 + 1) \times \Delta(\vec{Q} - \vec{q}_1 \\ &\quad - \vec{q}_2) \delta(\Omega - \omega_1 - \omega_2) \} \quad \dots (2-11) \end{aligned}$$

여기서, $N_1 = \{ \exp [\beta \hbar \omega_1] - 1 \}^{-1}$ (2-11) 식의 $\{ \}$ 의 첫째 항은

$$\text{sound phonon} + \text{thermal phonon} \rightarrow \text{thermal phonon} \quad \dots\dots\dots (2-12)$$

의 경우를 나타내며, 둘째 항은

$$\text{sound phonon} \rightarrow \text{two lower-energy phonon} \quad \dots\dots\dots (2-13)$$

의 경우를 나타낸다.

(2-13) 식에서 생성된 두 phonon 은 Ω 보다 더 작은 진동수를 가져야 하므로 문제가 되지 않는다.

(2-12) 식을 고려하면 L-R attenuation 은 (2-11) 식으로 부터

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_s = & \frac{\pi \hbar}{16 N \Omega S} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \times | \Phi(\vec{Q} \vec{q}_1 \vec{j}_1 - \vec{q}_2 \vec{j}_2) |^2 (N_1 \\ & - N_2) \times \Delta(\vec{Q} + \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \delta(\Omega + \omega_1 - \omega_2) \quad \dots\dots\dots (2-14) \end{aligned}$$

(2-14) 식은 다음 조건으로 부터 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} \hbar \vec{Q} + \hbar \vec{q}_1 &= \hbar \vec{q}_2 + \hbar \vec{q} \\ \hbar \Omega + \hbar \omega_1 &= \hbar \omega_2 \\ \Omega &\ll \omega_1, \omega_2 \\ \hbar \Omega &\ll k_B T; N_1 \approx N_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2-15)$$

여기서 \vec{q} 는 역격자 vector 이거나 zero vector 이다.

$$\overline{\Gamma}_s = \frac{\pi \beta \hbar^2}{8 N S (\vec{Q} \vec{J})} \sum_{\vec{q}_1} \frac{1}{\omega_1^2} | \Phi(\vec{Q} \vec{q}_1 \vec{j}_1 - \vec{q}_2 \vec{j}_2) |^2 N_1 (N_1 + 1) \times \delta(\Omega + \omega_1 - \omega_2) \quad \dots\dots\dots (2-16)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{Q} \vec{q}_1 \vec{j}_1 - \vec{q}_2 \vec{j}_2) &= -4 \pi i Q r_s (\vec{q}_1 \vec{j}_1) \omega_1^2 / M \dot{\omega} \\ \omega_2 &= \omega(\vec{q}_1 \vec{j}_1 + \vec{Q} \vec{j}_1) \\ &= \omega(\vec{q}_1 \vec{j}_1) + Q_a \partial \omega(\vec{q}_1 \vec{j}_1) / \partial q_a + \\ &= \omega_1 + 2 \pi \vec{Q} \cdot \vec{V}_1 \end{aligned}$$

(\vec{V}_1 은 phonon $\vec{q}_1 \vec{j}_1$ 의 group velocity 이다.)

그러므로,

$$\overline{\Gamma}_s = \frac{\pi \beta \hbar^2 \Omega^2}{2 \rho V s^3} \sum_{\vec{q}_1 \vec{j}_1} r_s^2(\vec{q}_1 \vec{j}_1) \omega_1^2 \times N_1 (N_1 + 1) \delta(\Omega - 2 \pi \vec{Q} \cdot \vec{V}_1) \quad \dots\dots\dots (2-17)$$

같은 방법으로 $\overline{\Gamma}_a$ 도 계산할 수 있다.

3. Akhieser Method

sound field 에서 임의의 시간 t 에서 위치 z 에 있는 하나의 thermal phonon $\vec{q} \vec{j}$ 의 Hamiltonian 은

$$\begin{aligned} H(\vec{q} \vec{j}; z, t) &= H_0(\vec{q} \vec{j}) + H_1(\vec{q} \vec{j}; z, t) \\ &= \hbar \omega(\vec{q} \vec{j}; z, t) \quad \dots\dots\dots (3-1) \end{aligned}$$

여기서

$$H_0 = \hbar \omega_0(\vec{q} \vec{j}) \quad \dots\dots\dots (3-2)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= a(\vec{q} \vec{j}; \vec{\sigma}, \vec{u}_0) H_0(\vec{q} \vec{j}) \exp[i(\sigma z - \Omega t)] \\ &= \psi(\vec{q} \vec{j}; \vec{\sigma}, \vec{u}_0) \exp[i(\sigma z - \Omega t)] \quad \dots\dots (3-3) \end{aligned}$$

섭동된 진동수 ω 는 다음과 같이 주어진다.

$$\omega(\vec{q} \vec{j}; z, t) = \omega_0(\vec{q} \vec{j}) \{ 1 + a(\vec{q} \vec{j}; \vec{\sigma}, \vec{u}_0) \} \times \exp[i(\sigma z - \Omega t)] \quad \dots\dots\dots (3-4)$$

여기서 ω_0 는 변형되기 전 결정에서 mode $\vec{q} \vec{j}$ 를 갖는 thermal phonon 의 진동수이며 a 는 진폭이 작을 때 선형적으로, 그리고 $\vec{\sigma}, \vec{q} \vec{j}$ 에 의존하는 상수이다.

(3-3) 식과 (3-4) 식에서 물리적인 의미를 가지는 것은 실수 부분만이다.

온도 T 에서 열적 평형 상태의 분포는

$$N_0(\omega_0) = [\exp(\hbar \omega_0 / k_B T) - 1]^{-1} \quad \dots\dots\dots (3-5)$$

sound field 에서, 섭동된 분포 함수에서 실제적으로 attenuation 은 매우 작기 때문에 sound 진폭의 취저차의 효과에 영향을 받는다. 국부적 평형 분포 함수에서 섭동된 분포 함수는,

$$\begin{aligned} N(\vec{q} \vec{j}; z, t) &= N_0(\omega) - (N_0 / k_B T) \times \Phi(\vec{q} \vec{j}; \vec{\sigma}, \vec{u}_0) \\ &\quad \exp[i(\sigma z - \Omega t)] \quad \dots\dots\dots (3-6) \end{aligned}$$

여기서

$$N_0' = \frac{dN_0(\omega_0)}{d(\hbar \omega_0 / k_B T)} \quad \dots\dots\dots (3-7)$$

(3-3) 식에서

$$\begin{aligned} N(\vec{q} \vec{j}; z, t) &= N_0 + (N_0' / k_B T) \times (\psi - \Phi) \exp[i(\sigma z - \Omega t)] = N_0(\omega_0) + N_1 \quad \dots\dots\dots (3-8) \end{aligned}$$

Boltzman transport equation 은

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial q_x} - \frac{\partial N}{\partial q_x} \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad \dots\dots (3-9)$$

로 주어지며, 섭동의 1 차항만 고려하면

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} \frac{\partial N_0}{\partial q_x} - \frac{\partial N_0}{\partial q_x} \frac{\partial H_1}{\partial z} \right) \quad \dots\dots (3-10)$$

이 되며, sound phonon 과 thermal phonon 의 충돌 후 thermal phonon 의 온도 효과를 고려하면,

$$T'(z, t) = T + \Delta T \exp [i(\sigma z - \Omega t)] \quad \dots\dots (3-11)$$

이 되며, 분포 함수는 normal processes 에서

$$n_0(\omega; T, \vec{\lambda}) = \{ \exp[\hbar\omega - \vec{\lambda} \cdot \vec{q}] / k_B T' - 1 \}^{-1} \quad \dots\dots (3-12)$$

$$= N_0(\omega) - (N_0/k_B T) [\hbar\omega_0 (\Delta T/T) + \vec{\lambda} \cdot \vec{q}] \exp[\sigma z - \Omega t] \quad \dots\dots (3-13)$$

여기서

$\vec{\lambda} = \vec{\lambda} \exp [i(\sigma z - \Omega t)]$ 로 정의되며 $\vec{\lambda}$ 로 특징지어지는 이동된 분포의 물리적 의미는 Carruthers 에 의하여 논의되어 졌다.

Umklapp processes 에서 분포 함수는

$$n_0(\omega; T') \equiv \{ \exp[\hbar\omega / k_B T'] - 1 \}^{-1} \quad \dots\dots (3-14)$$

$$= N_0(\omega) - (N_0/k_B T) \hbar\omega_0 (\Delta T/T) \times \exp [i(\sigma z - \Omega t)] \quad \dots\dots (3-15)$$

로 주어지며, Boltzmann eq. 의 collision 항은

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{coll}} &= - \frac{N(\vec{q}; z, t) - n_0(\omega; T', \vec{\lambda})}{\tau_n(\vec{q}j)} \\ &= - \frac{N(\vec{q}; z, t) - n_0(\omega; T')}{\tau_n(\vec{q}j)} \\ &= (N_0/k_B T) \{ \tau_n^{-1} [\phi - \hbar\omega_0 (\Delta T/T) - \vec{\lambda} \cdot \vec{q}] + \tau_n^{-1} [\phi - \hbar\omega_0 (\Delta T/T)] \exp [i(\sigma z - \Omega t)] \} \quad \dots\dots (3-16) \end{aligned}$$

(3-3), (3-8), (3-10), (3-16) 식으로부터 Boltzmann eq. 을 풀면,

$$\phi = \{ 1 - i[\Omega - S_z(\vec{q}j)\sigma]\tau \}^{-1} \{ \hbar\omega_0 (\Delta T/T) + (\tau/\tau_n) \vec{\lambda} \cdot \vec{q} - i\Omega\tau\phi \} \quad \dots\dots (3-17)$$

여기서

$$\tau^{-1} = \tau_n^{-1} + \tau_u^{-1} \quad \dots\dots (3-18)$$

$\vec{\lambda}$ 와 ΔT 는 다음과 같은 고려로서 결정된다.

첫째, sound phonon 의 수가 보존된다.

$$\sum_j \int \vec{q} \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{coll}, N} d^3q = 0 \quad \dots\dots (3-19)$$

둘째 섭동의 1 차항에서 계의 에너지 변화량이 보존된다.

$$\sum_j \int \hbar\omega_0(\vec{q}j) \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{coll}} d^3q = 0 \quad \dots\dots (3-20)$$

(3-17) 식을 (3-16) 식에 대입하여, (3-19) 와 (3-20) 을 풀면,

$$\begin{aligned} \sum_{qj} (sq\tau_n)^{-1} C(\vec{q}, j) [1 - i(\Omega - S_z\sigma) \times \tau]^{-1} \{ i(\Omega - S_z\sigma)\tau(\Delta T/T) + [(\tau/\tau_n) - 1 + i(\Omega - S_z\sigma)\tau] \times (\vec{\lambda} \cdot \vec{q} / \hbar\omega_0) - i\Omega\tau\phi \} = 0 \quad \dots\dots (3-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{qj} C(\vec{q}, j) [1 - i(\Omega - S_z\sigma)\tau]^{-1} \{ i(\Omega - S_z\sigma) [(\Delta T/T) + (\tau/\tau_n) (\vec{\lambda} \cdot \vec{q} / \hbar\omega_0)] - i\Omega\phi \} = 0 \quad \dots\dots (3-22) \end{aligned}$$

여기서

$$C(\vec{q}, j) \equiv -k_B [\hbar\omega_0(\vec{q}j) / k_B T]^2 N_0' \quad \dots\dots (3-23)$$

으로 주어지는 mode $\vec{q}j$ 에 가인하는 비열이다.

이때 phonon system에서 이동한 에너지의 평균 값은

$$\begin{aligned} Q &= - \sum_{qj} \langle H \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{coll}} \rangle \quad \dots\dots (3-24) \\ &= \sum_{qj} \langle N \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (NH) - \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} (NH \frac{\partial H}{\partial q_x}) + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial q_x} (NH \frac{\partial H}{\partial z}) \rangle \quad \dots\dots (3-25) \end{aligned}$$

여기서 둘째 항은 총 에너지의 시간 미분의 평균 값 이니 0이며, 넷째 항은 Brillouin zone 에 대해서 합할 때 0이며, 셋째 항은 계산 결과 0이다. 그러므로 (3-25) 식의 첫째 항에 의한 총 에너지 이동은

$$Q = \frac{V}{16\pi^3} \sum_j \int d^3q \operatorname{Re} \left\{ N_j \frac{\partial H_j}{\partial t} \right\} \quad \dots\dots (3-26)$$

$$= -\frac{1}{2} T \sum_{\vec{q}, j} C(\vec{q}, j) \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\Omega a}{1+i(\Omega - S_2 \sigma)\tau} \left[\frac{\Delta T^*}{T} + \frac{\tau}{\tau_n} \frac{\lambda \cdot \vec{q}}{\hbar \omega_0} + i\Omega \tau a^* \right] \right\} \quad \dots\dots (3-27)$$

이때 attenuation A는

$$\overline{A} = \frac{Q}{SW} \quad \dots\dots (3-28)$$

여기서 W는 sound phonon의 에너지 밀도이다.

$$W = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 u_0^2 \quad \dots\dots (3-29)$$

(3-21), (3-22), (3-27) 식으로부터 $\Omega \tau \ll 1$ 인 경우의 \overline{A} 를 계산하면,

$$A = C_v T^2 (\vec{q}, j) \Omega^2 \tau / 3 \rho S^3 = \kappa (\vec{q}, j) \Omega^2 T \tau / \rho S^3 \quad \dots\dots (3-30)$$

여기서

$$\kappa = \frac{1}{3} C_v S \tau$$

이며 thermal conductivity이다.

4. 논 의

그림 2)에서 $\Delta \Delta \Delta$ 는 Landau-Rumer theory에 의한 \overline{A} 를 나타내고 있으며, $\circ \circ \circ$ 는 Akhieser method에 의한 A를 나타내고 있으며, 실선은 실험치에 의한 attenuation을 나타내고 있다.

L-R theory에서 thermal phonon 사이의 상호 작용을 무시하였다.

thermal phonon 사이의 상호 작용의 효과는 sound phonon의 relaxation time $\tau(\vec{Q}, j)$ 와 비슷하게 정의된 thermal phonon \vec{q}, j 에 대한 relaxation time $\tau(\vec{q}, j)$ 로 주어진다. 이 유한한 relaxation time은 $\hbar / \tau(\vec{q}, j)$ 정도의 phonon \vec{q}, j 에너지를 만든다. 만약 이 에너지가 sound phonon의 에너지 $\hbar \Omega$ 와 비교된다면 attenuation에 큰 효과를 줄 것이다. 그래서 L-R theory는 $\hbar / \tau \ll \hbar \Omega$ ($\Omega \tau \gg 1$) 일 때 유효하다.

이 조건은 높은 sound phonon의 진동수와 thermal phonon의 relaxation time이 긴 낮은 온도에서 잘 만족한다. Akhieser method에서 결정이 온도가 T일 때 thermal phonon의 진동수는 $k_B T / \hbar$ 이다. 이 thermal phonon은 $\hbar s / k_B T$ 의 파장을 가진다.

만약 sound phonon과 thermal phonon의 위상 속도 사이의 차를 무시한다면 sound의 파장 λ 는

$$\lambda = 2\pi s / \Omega \text{이다.}$$

thermal phonon의 파장이 sound phonon의 파장보다 훨씬 짧기 때문에 $k_B T \gg \hbar \Omega$ 이 요구된다.

이 조건은 thermal phonon의 평균 자유 행로가 sound phonon의 파장보다 짧은 높은 온도에서만 성립한다.

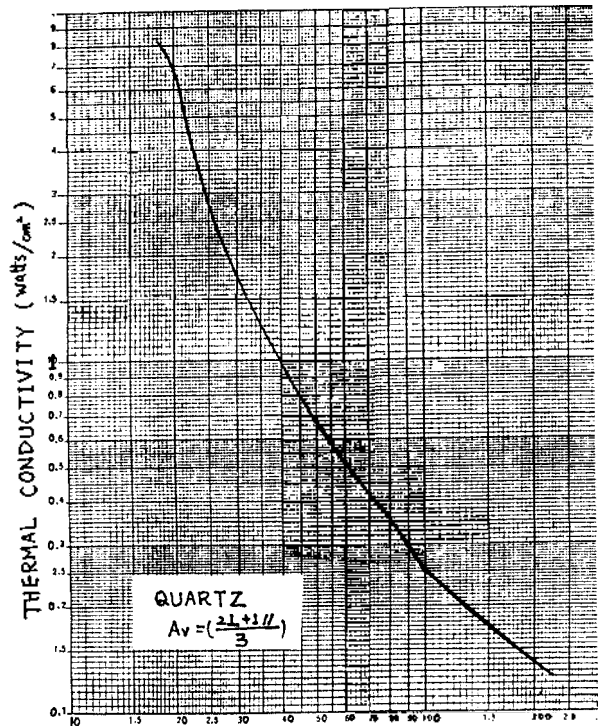
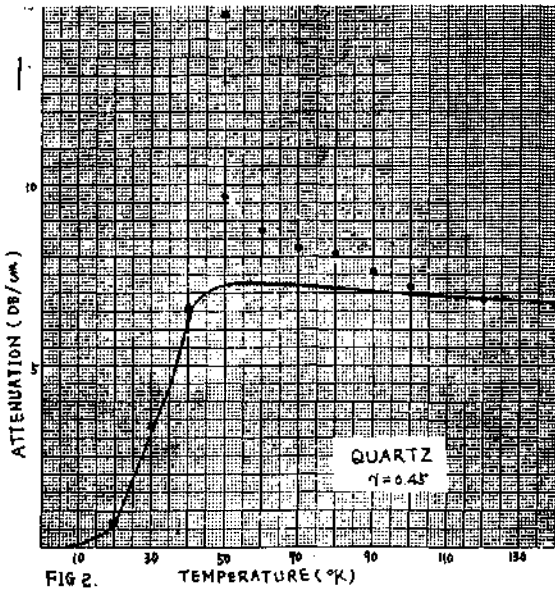


FIG1. TEMPERATURE (°K)



5. 결론

그림 2)에서 L-R theory는 40°K 이하의 낮은 온도에서 잘 만족되며, Akhieser method는 100°K 이상의 높은 온도에서 잘 만족된다. 이 사실은 논의와 잘 일치함을 알 수 있으며, 40°K 이하와 100°K 이상의 온도 경계를 가짐을 볼 수 있다.

6. Reference

- 1) Landau, L.D., and Rumer, G. "Über Schallabsorption in Festen Körpern." Phys. z. Sowjetunion 11, 18 (1937).
- 2) Akhieser, A. J. Phys. (USSR) 1, 277 (1939).
- 3) Nava, R., Azrt, R., Ciccarello, I., and Dransfeld, K. "Hypersonic Absorption in Quartz at Temperatures Below 30°K" Phys. Rev. 134, A 581 (1964).
- 4) Woodruff, T.O. and Ehrenreich, H. "Absorption

of sound in Insulators" Phys. Rev. 123, 1553 (1961).

- 5) Guyer, R.A., and Krumhansl, J.A. "Solution of the Linearized Phonon Boltzmann Equation" Phys. Rev. 148, 776 (1966).
- 6) Leibfried, G., and Ludwig, W. "Theory of Anharmonic Effects in Crystals". Solid State Phys. 12, 276 (1961).
- 7) Maradudin, A.A., and Mills, D.L. "Calculation of the Anharmonic Damping of Rayleigh Surface Mode" Phys. Rev. 173, 881 (1968).
- 8) Schiff, L.I. "Quantum Mechanics" pp. 314 McGraw-Hill, New York.
- 9) Carruthers, P. "Theory of Thermal Conductivity of Solids at Low Temperatures" Rev. of Mod. Phys. 33, 92 (1961).
- 10) Oliver, D.W., and Slack, G.A. "Ultrasonic Attenuation in Insulators at Room Temperature" J. Appl. Phys. 37, 1543 (1966).
- 11) Bömmel, H.E., and Dransfeld, K. "Excitation and Attenuation of Hypersonic Waves in Quartz" Phys. Rev. 117, 1245 (1960).
- 12) Maris, H.J. "Ultrasonic Attenuation in Dirty Dielectric Crystals" Phys. Rev. 175, 1077 (1968).