임피이던스를 갖고 있는 직각 쐐기에 의한 평면파의 회절

이 병 호, 임 병 덕°
한국과학기술원

Plane-wave Diffraction by a Rectangular Wedge With an Impedance Boundary

B.-H. Lee & B. D. Lim
Acoustics & Dynamics Lab., Dept. of Mechanical Engineering, KAIST

직각 쐐기 주변에서의 음파의 전달현상은 간단하고 전형적인 문제이며 또한 실외 음전파에 있어 실제적으로 중요한 문제이다.
쐐기형에 의한 회절은 많은 저자들에 의해 연구되었으나 대부분은 전자기학적으로 완전반사면 또는 완전흡수면을 갖고 있는 쐐기에 대한 것들이었다. 근래에 Hayek (1) 는 이중적분의 방법으로 완전반사면과 음압방출형 표면으로 이루어진 반평면에 대하여 회절음장을 계산하였다.
그러나 Kurze (2) 가 지적했듯이 전자기학적인 완전흡수면은 음향학적인 관점에서는 반사계수가 -1 이 되는 음압방출형 표면에 해당되며 이는 흡음재의 이용 또는 차음효과 예측등의 목적으로는 그다지 중요성이 없다고 할 수 있다.

흡음계수는 표면의 음향 임피이던스에 따라 결정되므로 흡음효과를 고려한 회절음장을 계산하려면 임피이던스를 갖고있는 쐐기 또는 차음벽에 대한 해석을 행해야 한다. 이때의 임피이던스 값의 극한치는 앞서의 완전반사 및 음압방출형 표면을 나타내게 된다.

Felsen (3) 은 완전반사면과 임피이던스 표면으로 구성된 쐐기에 대한 회절음장을 급수형태로 구하였고 Aas (4)는 양면이 임의의 임피이던스를 갖고있는 쐐기에 대해 같은 형태의 해를 구하였다. 이들의 결과는 쐐기 모서리로부터의 거리가 짧은 경우 빨리 수렴하나 커지면 수렴도가 나빠지게 된다.

임의의 임피이던스를 갖고있는 쐐기에 대해 kr 이 충분히 큰 범위에서의 회절음장에 대한 점근해는 Maliuzhinets (5) 에 의해 구해졌고 Bucci 와 Franceschetti (6) 는 screen 형태에 대해 uniform solution 을 구하였으며 James (7) 는 임의 각도의 쐐기에 대해 uniform expression을 구했다.

Maliuzhinets 의 회절음장에 대한 표현식은 무한적분을 내포하고 있으므로 사용에 불편한 면이 있으나 차음효과의 관점에서 중요한 반무한평면, 직각형 쐐기등 쐐기각도가 $n\pi/2$ $(n=0,1,2,3)$ 인 경우에는 간단한 형태로 표현할 수 있게 된다.

본 연구는 직각형 쐐기에 대한 Maliuzhinets 의 표현식을 변형하여 흡음재가 표면에 부착되었을 때 직각형 쐐기 주변의 음향장에 대한 uniform expression 을 구하고 흡음재의 효과를 예측하는데 목적이 있다.

1. Maliuzhinets 의 회절음장에 대한 표현

그림 1과 같이 $(2\pi-\gamma)$ 의 각도를 갖고있는 쐐기의 두 면이 각각 z_+, z_- 의 표면 임피이던스를 갖고 있다고 하자.
θ_0 의 방향으로 $e^{-i\omega t}$ 의 시간 변화를 갖는 평면파가 입사될 때 파장에 비해 충분히 큰 거리에서 회절음장 ϕ 는 근사적으로 다음의 기하광학적 표현식으로 나타내 진다.

$$\phi(\theta_0;r,\theta) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} D_r(\theta_0,\theta)\cdot I \qquad (1)$$

여기서 $k=\omega/c$, γ 는 쐐기의 외부각도, I 는 쐐기의 모서리에 입사된 음장이다.

공기의 음향 임피이던스를 ρc 로 표시하고 $\rho c/z_\pm = \zeta_\pm$ 로 정의할 때 경계조건은

$$\pm \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + ik\zeta_\pm\phi = 0 \quad \text{for}$$

$$\theta = \pm\frac{\gamma}{2}, \quad 0 \le \gamma < \infty$$

이 되고 이 경계조건을 갖는 Helmholtz 방정식의 $kr >> 1$ 에 대한 접근해 (1)은 Maliuzhinets 에 의해 다음과 같이 주어졌다.

$$D_\gamma(\theta_0,\theta) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}}\frac{\pi}{\gamma}\frac{\cos(\pi\theta_0/\gamma)}{\psi(\theta_0)} \cdot \left[\frac{\psi(\theta-\pi)}{\sin(\pi(\theta-\pi)/\gamma)-\sin\pi\theta_0/\gamma} - \frac{\psi(\theta+\pi)}{\sin(\pi(\theta+\pi)/\gamma)-\sin\pi\theta_0/\gamma}\right] \tag{3}$$

여기서 ψ 는

$$\psi(x) = \psi_{\gamma/2}(x+\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta_+)\psi_{\gamma/2}(x+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}+\theta_o) \cdot \psi_{\gamma/2}(x-\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta_-)\psi_{\gamma/2}(x-\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta_-) \tag{4}$$

$$\psi_{\gamma/2}(x) = \sqrt{\cos\frac{\pi x}{2\pi}}\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log(1-i\tan\frac{\pi x}{2\gamma}\tanh\frac{\pi\nu}{2\gamma})\frac{d\nu}{\cosh\nu}\right] \tag{5}$$

$$\sin\theta_\pm = \zeta_\pm \tag{6}$$

로 표시되는 함수이다.

직각쐐기의 경우 $\gamma = 3\pi/2$ 가 되고 $\psi_{3\pi/4}(\eta)$ 는 Maliuzhinets 에 의해 구해졌는데

$$\psi_{3\pi/4}(\eta) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\cos\frac{\eta}{3}+1}{\cos\frac{\eta}{6}} \tag{7}$$

으로 표시된다.

(7)식을 (4)에 대입하면

$$\psi(x) = \frac{16}{81}\prod_{j=1}^{4}\frac{2\cos\alpha_j/3+1}{\cos\alpha_j/6}$$

α_j (j=1,2,3,4) 는 식(4)의 4개의 argument 들이다.

삼각함수의 공식들을 이용하여 변형하고 정리하면

$$\psi(x) = C_0\frac{\cos(\frac{\gamma}{2}+x)-\zeta_+}{\cos(\frac{2(\frac{\gamma}{2}+x)}{3})-\cos\frac{2\bar\theta_+}{3}}\cdot\frac{\cos(\frac{\gamma}{2}-x)-\zeta_-}{\cos(\frac{2(\frac{\gamma}{2}-x)}{3})-\cos\frac{2\bar\theta_-}{3}} \tag{9}$$

$$,\quad \bar\theta_\pm = \frac{\pi}{2}-\theta_\pm$$

로 쓸 수 있다.

완전반사면에 대해 $\zeta_\pm = 0$ 이므로 $\bar\theta_\pm = \frac{\pi}{2}$ 가 되고 (9)식은

$\psi(x) = C_0'\frac{\cos 2x}{2\cos(4x/3)-1}$ 로 간단화 되고 (10)

$\cos x(2\cos 2x - 1) = \cos 3x$ 임을 이용하면

$\psi(x) = C_0'\cos\frac{2}{3}x$ 가 된다.

이것을 식(3)에 대입하면

$$D_{3\pi/2}(\theta_0,\theta) = \frac{2\pi e^{i\pi/4}}{3\sqrt{2\pi k}}\left\{\frac{\cos(2(\theta-\pi)/3)}{\sin(2(\theta-\pi)/3)-\sin(2\theta_0/3)} - \frac{\cos(2(\theta+\pi)/3)}{\sin(2(\theta+\pi)/3)-\sin(2\theta_0/3)}\right\}$$

로 되고

삼각함수를 변형하여 정리하면

$$D_{3\pi/2}(\theta_0,\theta) = \frac{-\sqrt{3}e^{i\pi/4}}{3\sqrt{2\pi k}}\left\{\frac{1}{\cos(2(\theta-\theta_0)/3)-\cos(2\pi/3)} - \frac{1}{\cos(2(\theta+\theta_0)/3)+\cos(2\pi/3)}\right\}$$

이 되어 Keller[8] 의 식과 일치함을 알 수 있다.

2. 회절음장에 대한 Uniform Solution

(3)식은 θ_0 의 값에 따라 2개의 pole 을 갖게 되는데 이들은

$-\frac{3\pi}{4} \le \theta_0 \le -\frac{\pi}{4}$ 에 대해 $(\theta_0+\pi)$, $(-\frac{\pi}{2}-\theta_0)$

$-\frac{\pi}{4} \le \theta_0 \le \frac{\pi}{4}$ 에 대해 $(\frac{\pi}{2}-\theta_0)$, $(-\frac{\pi}{2}-\theta_0)$

$\frac{\pi}{4} \le \theta_0 \le \frac{3\pi}{4}$ 에 대해 $(\theta_0-\pi)$, $(\frac{\pi}{2}-\theta_0)$

이 된다.

θ 가 pole θ_p 로 접근할 때 uniform asymptotic solution(3) 은

$$\phi^d \sim e^{i(kr+\pi/4)}\{a(\sqrt{\frac{\pi}{kr}}\frac{i}{b} - \pi e^{i\pi/4} F(\xi))$$

$$+ \frac{\pi}{\sqrt{2kr}} \frac{\cos(\pi\theta_o/\gamma)}{\gamma\psi(\theta_o)}\left[\frac{\psi(\theta-\pi)}{\sin(\pi(\theta-\pi)/\gamma)-\sin\pi\theta_o/\gamma} - \frac{\psi(\theta+\pi)}{\sin(\pi(\theta+\pi)/\gamma)-\sin\pi\theta_o/\gamma}\right]$$

$$a = \lim_{\theta\to\theta} (\theta-\theta_p)D_\gamma(\theta,\theta_o)\sqrt{\frac{k}{2}}\, e^{i\pi/4}$$

$$b = \sqrt{1 - \cos(\theta_p-\theta)}$$

$$\xi = \sqrt{kr}\left|\sin\frac{\theta_p-\theta}{2}\right|$$

$$F(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-i2\xi^2}\int_{(1-i)\xi}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

total field

$\phi^{total} \sim \phi^{inc.} + \phi^{ref.+} + \phi^{ref.-} + \phi^d$ 로 쓸 수 있는데 ϕ^{inc} 는 입사음장, $\phi^{ref}{}_\pm$ 는 각각 $z_\pm$ 표면에서의 반사파를 의미하며 ϕ^d 는 회절음장이다.

$$\phi^{inc.} = e^{ikr\cos(\theta-\theta_o)} \quad \text{for} \quad |\theta-\theta_o| < \pi$$

$$\phi^{ref.+} = R_+ \exp(ikr\cos(\theta+\theta_o)) \quad \text{for} \quad |\theta+\theta_o| < \pi$$

$$\phi^{ref.-} = R_- \exp(ikr\cos(\theta+\theta_o-3\pi)) \quad \text{for} \quad |\theta-3\pi+\theta_o| < \pi$$

$$R_\pm = \frac{\sin x_\pm - \zeta_\pm}{\sin x_\pm + \zeta_\pm}$$

$x_\pm$ 는 입사파와 $z_\pm$ 표면의 교차각이다.

3. 요약 및 결론

Maliuzhinets 의 임피이던스를 갖고 있는 쐐기에 대한 회절음장의 해를 이용하여 임의의 임피이던스를 갖고 있는 직각형 쐐기에 대한 회절음장을 간단화된 형태로 표현하였다. 입사파에 대한 음영경계 (incident shadow boundary) 와 반사파에 대한 음영경계 부근에서 ϕ^d 가 유한한 값으로 되도록 uniform solution 을 구하였다.

완전흡음재에서는 ζ_+ 또는 ζ_- 가 1 이되고 완전반사의 경우는 $\zeta_\pm$ 가 0이 되며 $0 < \zeta_\pm < 1$ 의 영역은 흡음계수가 $0 < (1-R) = \alpha < 1$ 인 영역을 나타내므로 앞에서 구한 표현식은 흡음재를 부착한 직각 쐐기의 차음효과를 예측할 수 있게 한다.

4. References

(1) R.P. Kendig and S.I. Hayek, "Diffraction by a hard-soft barrier," J. Acoust. Soc. Am.70, 1156-1165 (1981).

(2) U.J. Kurze, "Noise reduction by barriers," J. Acoust. Soc. Am.55, 504-518 (1974)

(3) L.B. Felsen and N. Marcuvitz, Radiation and Scattering of Waves (Prentice Hall, Englewood Cliff., (1973).

(4) J.A. Aas, "On the accuracy of the uniform geometrical theory of diffraction close to a 90° Wedge," IEEE Trans. Ap-27, 704-705 (1979)

(5) G.D. Maliuzhinets, "Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedance," Sov. Phys. Dokl. 3, 752-755 (1958).

(6) O.M. Bucci and G. Franceschetti, "Electromagnetic Scattering by a half plane with two face impedances," Radio Sci. 11, 49-59 (1976)

(7) G.L. James, "Uniform diffraction coefficients for an impedance wedge," Elec. Let. 13, 403-404 (1977)

(8) J.B. Keller, "Geometrical theory of diffraction," J. Opt. Soc. Am. 52, 116-130 (1962)