

알루미늄과 복합재 등격자 보강평판의 선형 좌굴해석

Linear Buckling Analyses of Aluminum and Composite Isogrid Plates

김원배*, 조맹효 (인하대학교)

1 서론

등격자 보강 구조물은 샌드위치 구조물을 대체할 수 있는 매우 유망한 경량 구조물이다. 항공우주분야에 이 구조물을 적용할 경우, 무게 절감을 위하여 얇게 만들어 지기 때문에 설계시 좌굴성능의 해석은 매우 중요하다. 격자 보강 구조물은 격자의 크기와 형상에 따라 좌굴특성이 결정되므로 구조 설계 변수를 결정함에 있어 좌굴특성이 중요하게 고려되어야 한다.

등격자 보강 구조물은 보강재의 위치에 따른 구조물의 기하학적 형상이 복잡하여 구조물의 유한요소 해석시 많은 메쉬가 필요하기 때문에 효율적인 해석을 위해서는 수렴성이 좋은 유한요소가 필요하다. 또한 일차전단 변형 이론을 이용하는 일반 유한요소에서는 면내 회전각 자유도(θ_z)가 없기 때문에 면재와 보강재의 접합부분에서의 변위를 적절히 표현하지 못한다. 따라서 본 연구에서는 면내 회전각 자유도를 가지면서 적은 메쉬에서의 수렴성이 우수한 혼합 유한요소를 사용하여 좌굴해석을 수행하였다.

일반적으로 선형 좌굴해석에서 하중조건은 응력하중과 변위하중으로 나눌 수 있다. 응력하중의 경우 좌굴전 응력 분포 상태를 알고 있는 간단한 기하학적 형상의 구조물의 좌굴해석에 적용이 가능하다. 그러나 등격자 보강 구조물과 같이 기하학적 형상이 복잡한 구조물은 구조물의 내부에서 응력의 분포가 일정하지 않기 때문에 변위하중을 적용하여 좌굴해석을 수행하여야 한다. 변위하중 조건을 적용하기 위해서는 정적해석(static analysis)을 통하여 좌굴전 응력상태(prebuckling stress state)를 해석하여야 한다. 본 연구에서는 복합재 등격자 보강구조물의 해석에 변위하중을 이용한 좌굴해석을 통하여 보강재의 기하학적 형상에 따른 좌굴특성을 해석하고 알루미늄 등격자 보강 구조물과의 좌굴특성을 비교 분석하는데 목적이 있다.

2 정식화

Aminpour 등에 의해 개발된 등방성 물질에 관한 4절점 혼합 요소[1]는 현존하는 4절점 요소중 선형해석에 있어서 매우 뛰어난 성능을 나타내고 있다. 본 연구에서는 이 요소를 복합재 보강 구조물의 좌굴해석분야까지 확장 적용

하였다. Mindlin 판이론에서는 판재와 보강재간의 자유도가 일치하지 않기 때문에 회전각자유도를 절점당 자유도에 부과하여 요소를 개발하였다. 회전각자유도는 요소면의 수직방향의 회전각으로 정의된다. 회전각 자유도(θ_z)를 가지는 요소는 Allman-Type[2,3] 형상함수를 이용하여 면내 변위 u, v 의 고차모드의 형상함수로 표현된다.

2.1 응력장 가정의 혼합 유한요소의 정식화

이 혼합요소 정식화는 Hellinger-Reissner 변분원리에 근거를 두고 있다. Hellinger-Reissner 범함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi_{HR} = -\frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} dV + \int_V \{\sigma\}^T [\mathcal{L}] \{u\} dV - \int_{S_\sigma} \{u\}^T \{t_o\} dS \quad (1)$$

위의 식에서 $[S]$ 는 compliance 행렬이고, $[\mathcal{L}]$ 은 변위 $\{u\}$ 를 변형률로 변환하는 선형 미분 연산자이다.

응력과 변위장은 다음과 같이 기술된다.

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} \quad (2)$$

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3)$$

여기서 $[P]$ 와 $[N]$ 은 응력과 변위의 보간함수 행렬이고, $\{\beta\}$ 와 $\{q\}$ 는 응력계수와 절점 변위의 미지수이다. Π_{HR} 에 stationary 조건을 부과하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\} \quad (4)$$

$$[K] = [T]^T [H]^{-1} [T] \quad (5)$$

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (6)$$

여기서 $[H]$, $[T]$, $[F]$ 는 다음과 같다.

$$[H] = \int_V [P]^T [S] [P] dV \quad (7)$$

$$[T] = \int_V [P]^T [\mathcal{L}] [N] dV \quad (8)$$

$$\{F\} = \int_{S_\sigma} [N]^T \{t_\sigma\} dS \quad (9)$$

식(6)의 선형 방정식을 풀면 절점변위 벡터를 얻을 수 있다. 상세한 정식화 과정은 참고문헌[1]에 기술되어 있다.

2.2 응력장 가정

면내방향의 가정된 응력장은 natural coord. 시스템에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} N_\xi &= \beta_1 + \beta_4\xi + \beta_6\eta + \beta_8\eta^2 \\ N_\eta &= \beta_2 + \beta_5\xi + \beta_7\eta + \beta_9\xi^2 \\ N_{\xi\eta} &= \beta_3 - \beta_4\eta - \beta_7\xi \end{aligned} \quad (10)$$

면외방향의 가정된 응력장도 좌표계에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} M_\xi &= \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_4\xi + \bar{\beta}_6\eta + \bar{\beta}_8\eta^2 \\ M_\eta &= \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_5\xi + \bar{\beta}_7\eta + \bar{\beta}_9\xi^2 \\ M_{\xi\eta} &= \bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_{10}\xi + \bar{\beta}_{11}\eta + \frac{1}{2}\bar{\beta}_{12}\xi^2 + \frac{1}{2}\bar{\beta}_{13}\eta^2 \end{aligned} \quad (11)$$

평전단 결과력에 대한 가정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_\xi &= \bar{\beta}_4 + \bar{\beta}_{11} + \bar{\beta}_{13}\eta \\ Q_\eta &= \bar{\beta}_7 + \bar{\beta}_{10} + \bar{\beta}_{12}\xi \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 변위장

회전각 자유도를 부과하기 위하여 면내 방향은 회전각 자유도에 의한 고차 변형 모드를 가정하였고, 면외 방향은 θ_x 와 θ_y 에 의한 고차모드를 가정하여 사용하였다. 변위장은 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u^o(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta y_i}{8} N_i^* (\theta_{z_j} - \theta_{z_i}) \\ v^o(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i - \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta x_i}{8} N_i^* (\theta_{z_j} - \theta_{z_i}) \\ w^o(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i w_i - \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta y_i}{8} N_i^* (\theta_{x_j} - \theta_{x_i}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta x_i}{8} N_i^* (\theta_{y_j} - \theta_{y_i}) \\ \theta_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{x_i} \\ \theta_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{y_i} \end{aligned} \quad (13)$$

위의 식에서

$$\Delta x_i = x_j - x_i, \quad \Delta y_i = y_j - y_i$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_i^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta), & i = 1, 3 \\ \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi), & i = 2, 4 \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} i+1, & i = 1, 2, 3 \\ 1, & i = 4 \end{cases}$$

식(10),(11),(12)를 응력장에 적용을 하고, 식(13)을 변위장에 적용하여, 식(6)의 최종 요소 방정식을 얻을 수 있다.

2.4 기하 강성행렬

선형 좌굴해석을 위한 기하 강성행렬은 Green-Lagrange strain tensor로부터 유도된다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (14)$$

Mindlin 관이론에서 변형률의 비선형 항은 membrane strain 항에 포함되며, 변형률은 식 (15)와 같이 표현된다.

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^o\} + z\{\kappa\} \quad (15)$$

위의 식에서 $\{\epsilon^o\}$ 는 membrane strain이고, $\{\kappa\}$ 는 bending strain이다. membrane strain은 식 (16)과 같이 선형항과 비선형항으로 나누어 진다.

$$\{\epsilon^o\} = \{\epsilon_L^o\} + z\{\epsilon_{NL}^o\} \quad (16)$$

비선형 변형률을 포함하는 Hellinger- Reissner 범함수는 식 (17)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} &= -\frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} dV + \int_V \{\sigma\}^T [\mathcal{L}] \{u\} dV \\ &\quad + \int_V \{\sigma_\sigma\}^T \{\epsilon_{NL}^o\} dV - \int_{S_\sigma} \{u\}^T \{t_\sigma\} dS \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $\{\sigma_\sigma\}$ 는 미리 기술된 좌굴전의 응력상태를 나타내며, 가정된 응력장과 변위장으로 치환하여 표현하면 식 (18)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} &= -\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} + \{\beta\}^T [T] \{q\} dV \\ &\quad - \{q\}^T \{F\} dV + \frac{1}{2} \{q\}^T [K_\sigma] \{q\} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)에서 $[K_\sigma]$ 는 기하 강성행렬이며 식 (19)와 같이 주어진다.

$$[K_\sigma] = \int_A [N]^T [G]^T [\mathcal{L}] [G] [N] dA \quad (19)$$

위의 식에서 $[G]$ 와 $[\mathcal{S}]$ 는 다음과 같다.

$$[G] = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad (21)$$

위의 식에서 $[\mathcal{S}]$ 는 좌굴전 응력 상태를 나타내며, S 는 식 (22)로 주어진다.

$$S = \begin{bmatrix} N_x^o & N_{xy}^o \\ N_{xy}^o & N_y^o \end{bmatrix} \quad (22)$$

선형 좌굴해석은 식 (5)의 강성행렬과 식 (19)의 기하 강성행렬을 사용한 고유치문제가 된다.

3 수치예

본 논문에서는 등격자 보강구조물의 좌굴해석을 복합재와 알루미늄의 두가지 재질에 대하여 수행하였다. 그림 1은 등격자 보강평판의 형상이다.

면재의 가로와 세로 길이는 21.5, 18.6 in이고, 두께는 0.07 in이다. 본 연구에서 사용된 수치모사는 보강재의 단면적과 보강재의 높이를 변화시켜 가면서 수행을 하였다. 보강재의 단면적은 0.01 in²부터 0.04 in²까지 0.01 in² 간격으로 증가를 시켰고 보강재의 높이는 0.10 in부터 1.10 in까지 0.05 in씩 증분시켜 가며 수치모사를 수행하였다. 네면이 모두 단순지지이고, 면재의 긴쪽면에 하중이 작용하는 경우이다.

등격자 보강평판의 좌굴모드는 보강재의 높이와 두께의 변화에 따라 크게 세가지 형태로 나타나며, 일반적으로 보강재의 높이가 증가함에 따라 전체 좌굴모드, 국지 면재 좌굴모드, 국지 보강재 좌굴모드 순으로 좌굴모드가 나타난다. 전체 좌굴모드(Global Buckling Mode)는 그림 2의 형상을 가지며, 보강재의 높이가 낮은 경우 발생한다.

전체 좌굴모드 다음에 나타나는 국지 면재 좌굴모드(Local Skin-Buckling Mode)는 그림 3에 도시하였다. 국지 면재 좌굴모드에서는 보강재와 접한 면재는 면외방향의 변형이 거의 없으며, 보강재의 위치를 기준으로 버블(bubble)형상을 나타낸다.

보강재에 걸리는 하중이 비교적 크고, 보강재의 두께가 얇은 경우 국지 보강재 좌굴모드(Local Stiffener-Buckling Mode)가 발생하며, 그림 4에 국지 보강재 좌굴모드를 도시하였다.

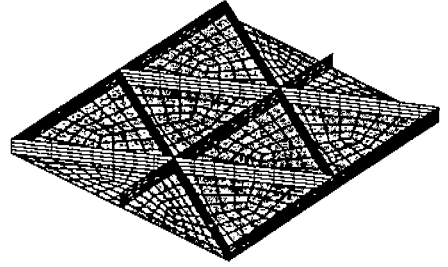


그림 1: Mesh Configuration of Isogrid Plate

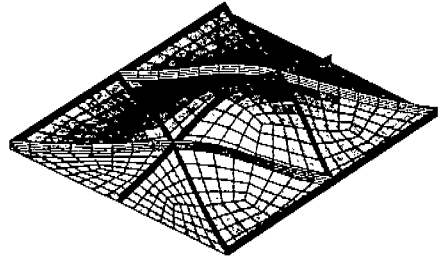


그림 2: Global Buckling Mode of Isogrid Plate

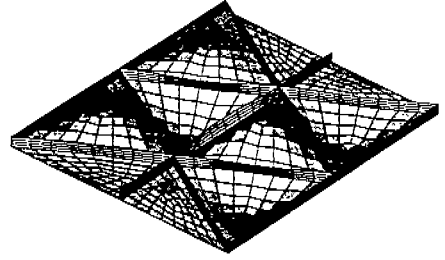


그림 3: Local Skin-Global Buckling Mode of Isogrid Plate

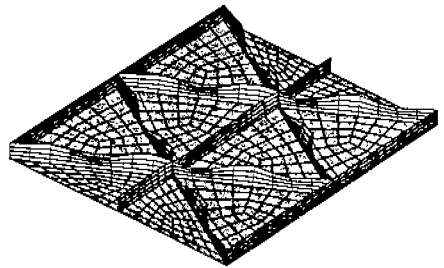


그림 4: Local Stiffener-Buckling Mode of Isogrid Plate

3.1 Composite Isogrid Plate

복합재의 경우 표 1의 Graphite/Epoxy를 사용하였고, 판재와 보강재는 각각 $[(\pm 60/0)_4]$, $[(0)_n]$ 의 적층배열 사용하였다. 등격자 보강평판에 압축하중이 가해지는 경우 보강재의 단면적이 증가하면 보강재에 걸리는 하중비가 증가한다. 정적해석을 통하여 얻어진 면재와 보강재의 압축하중비를 표 2에 나타내었다.

표 1: Material Properties of Composite Isogrid Panel

Longitudinal Modulus	$E_1 = 25.1 \times 10^6 \text{ psi}$
Transverse Modulus	$E_2 = 1.1 \times 10^6 \text{ psi}$
In-Plane Shear Modulus	$G_{12} = 0.8 \times 10^6 \text{ psi}$
In-Plane Poisson's Ratio	$\nu_{12} = 0.33$

표 2: Load Ratio of Composite Isogrid Panel

$A_{rib} (in^2)$	0.01	0.02	0.03	0.04
$(N_x)_{skin} (\%)$	96.1	92.4	89.4	85.8
$(N_x)_{rib} (\%)$	3.9	7.6	11.0	14.2

그림 5는 복합재 등격자 보강평판의 좌굴하중을 보강재의 높이와 두께에 대하여 나타낸 그래프이다. 보강재의 높이의 증가에 따라 좌굴하중이 증가하는 부분은 전체 좌굴 모드에 해당하는 부분이고, 좌굴하중 값이 일정한 영역은 국지 면재 좌굴 모드이다. 국지 보강재 좌굴 모드 영역에서는 보강재의 높이가 증가하면 좌굴하중은 급격히 감소하게 된다.

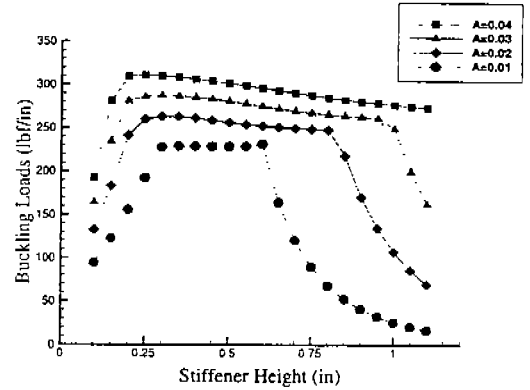
3.2 Aluminum Isogrid Plate

알루미늄의 재질상수는 $E = 10.0 \times 10^6 \text{ psi}$, $\nu = 0.33$ 을 사용하였고, 표 3은 알루미늄 등격자 보강평판의 면재와 보강재의 하중비를 나타낸 도표이다.

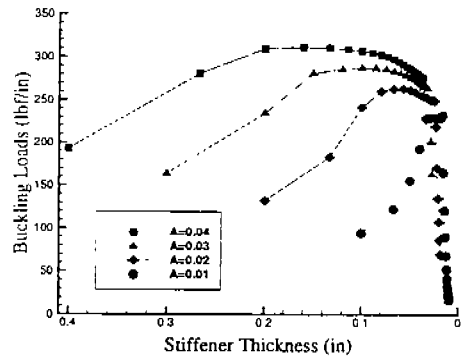
표 3: Material Properties of Isogrid Panel

$A_{rib} (in^2)$	0.01	0.02	0.03	0.04
$(N_x)_{skin} (\%)$	91.5	84.2	78.0	72.6
$(N_x)_{rib} (\%)$	8.5	15.8	22.0	27.4

알루미늄 등격자 보강평판도 보강재의 단면적 0.01 in^2 인 경우는 복합재의 경우와 마찬가지로 세가지 형태의 좌굴모드가 나타나며, 보강재의 단면적이 0.02 in^2 이상일 때는 적용가능한 보강재의 높이 영역 안에서는 국지 보강재 좌굴모드가 나타나지 않는다. 그림 6은 보강재의 높이



(a) Buckling Loads along Stiffener Height



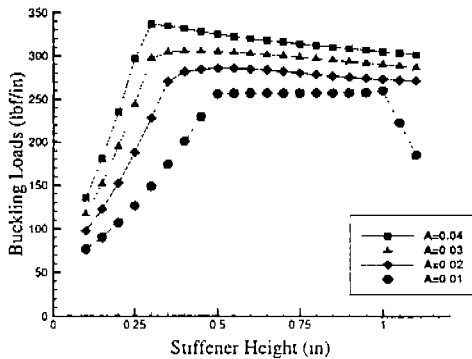
(b) Buckling Loads along Stiffener Thickness

그림 5: Buckling Loads of Composite Isogrid Plate

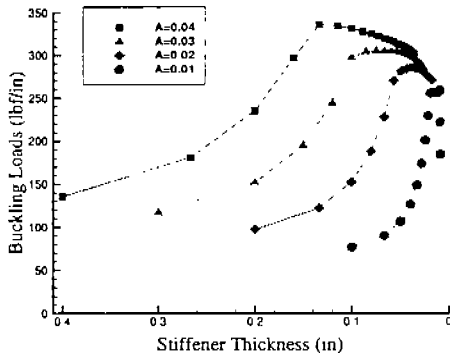
와 두께의 변화에 따른 좌굴하중을 그래프로 나타낸 것이다.

4 결론

본 연구에서는 회전각 변위를 고려한 응력장 가정의 혼합 유한요소를 사용하여 알루미늄과 복합재 등격자 보강구조물의 보강재의 기하학적 형상에 따른 좌굴특성을 알아보았다. 등격자 보강구조물은 보강재의 높이와 두께 변화에 따라 세가지 좌굴형상을 가지며, 최대 좌굴하중은 국지 면재 좌굴 모드에서 나타난다. 보강재의 높이는 전체 좌굴 모드에 큰 영향을 미치며, 보강재의 두께는 국지 보강재 좌굴 모드에 큰 영향을 미친다. 면재에 비하여 보강재의 강성이 큰 복합재 등격자 보강구조물은 알루미늄 등격자 보강구조물보다 보강재에 걸리는 하중비가 더 크며 좌굴 모드의 천이가 일어나는 지점의 보강재의 높이가 더 낮다.



(a) Buckling Loads along Stiffener Height



(b) Buckling Loads along Stiffener Height

그림 6: Buckling Loads of Aluminum Isogrid Plate

앞으로 본 연구에서 제시한 선형 좌굴해석 결과를 바탕으로 후좌굴 해석과 보강재와 면재간의 debonding 현상에 대한 연구가 진행될 것이다.

5 후기

본 연구는 다목적 실용위성 본체설계 및 개발사업(V)의 위탁과제로서 수행되었으며, 연구를 지원하여 주신 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고 문헌

- [1] G. Rengarajan, M. A. Aminpour, and M. F. Knight JR, "Improved Assumed-Stress Hybrid Shell Element with Drilling Degrees of Freedom for Linear Stress, Buckling and Free Vibration Analyses", *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, Vol.38, 1995, pp.1917-1943.
- [2] D. J. Allman, "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis", *Comput. Struct.*, Vol.19, 1984, pp.1-8.
- [3] Robert D. Cook, David S. Malkus and Michael E. Plesha, "On the Allman triangle and a related quadrilateral element", *Comput. Struct.*, Vol.22, 1986, pp.1065-1067.
- [4] Hong-Ji Chen and Stephen W. Tsai, "Analysis and Optimum Design of Composite Grid Structures", *Journal of Composite Materials*, Vol.30, No.4, 1996, pp.503-534.
- [5] Zafer Gürdal and Bruno Grall, "Buckling Analysis of Geodesically Stiffened Composite Panels with Discrete Stiffeners", *Journal of Aircraft*, Vol.31, No.5, Sept-Oct, 1994, pp.1197-1204.
- [6] John L. Phillips and Zafer Gürdal, "Structural Analysis and Optimum Design of Geodesically Stiffened Composite Panels", CCMS-90-05, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- [7] Maenghyo Cho and Won Bae Kim, "Buckling Analysis of Grid-Stiffened Composite Plates Using Hybrid Element with Drilling D.O.F.", *40th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, AIAA-99-1230, 1999.