여러개의 층간분리가 있는 복합재 보의 자유진동 해석

Vibration of Laminated Composites with Multiple Delaminations

김준식*, 조맹효 (인하대학교)

1. 서 론

복합재료는 높은 강도,강성비로 인하여 다양한 분야에서 꾸준히 그 사용이 증가하고 있는 추세이다. 그러나, 복합재의 기계적 특성은 외부적, 내부적 손상으로 인하여 많이 저하되므로 이에 대한 이해가 필수적이다. 그래서, 지금까지 복합재료의 파괴거동에 대한 이해와 모델링에 많은 연구가 수행되어 왔다. 이 손상들은 외부적 하중, 저속충격 그리고 제작과정중의 결함 등에 의하여 발생하게 된다.

층간분리는 복합재료 파괴현상중에서 가장 빈번하게 발생하는 것중의 하나이다. 많은 연구자들이 층간분리에 대한 해석적,실험적 방법으로 연구하여 왔다. 층간분리가 있는 복합재 보의 진동에 관한 초기 연구는 Wang[1]등에 의해 수행되었다. 복합재 보의 진동에서 층간분리가 미치는 영향을 Shen[2]등이 실험결과와 Timoshenko보 이론에 기초한 해석해를 비교하여 연구하였다. 최근에는 자유 진동 해석으로부터 복합재 보의 결함위치를 찾는 실험적, 수치적 연구가 Ratcliffe[3]등에 의해 수행되었다.

그러나, 일반적으로 층간분리가 있는 복합재 보는 분리부의 거동양상이 복잡하므로 이러한 거동을 잘 파악하기 위해서는 유한요소법이 적합하다. 유한요소법은 여러 가지 다양한 적층배열과 경계조건, 하중조건, 분리부의 기하학적인 형상과 위치 등에 관계없이 적용될 수 있는 강력한 수치방법이다. 그러나 층간분리부의 변형양상을 잘 표현하기 위해서는 삼차원 또는 준 삼차원 방법을 적용해야한다. 그 예로서는 J.Lee[4]에 의한 층간세분화이론에 기초한 준 삼차원 방법과 Seeley[5]등에 의한 벌칙함수를 이용한 유한요소기법이 있다. 그러나 이 방법들은 매우 방대한 컴퓨터자원과 여러가지 수치적 난점이 있으므로 설계입장에서 반복 계산을 수행해야하는 경우에 제약이 많다. 그래서 M.Cho와 J.Kim에 의해 전체-국지 방법이 제안되었다[6]. 이 방법은 층간세분화 요소와 평판요소등을 결합함으로서 기억용량과 계산시간을 줄일 수 있는 가능성을 보였다. 그러나 이 방법 역시 분리부가 확장되는 경우나 분리부의 크기가 상대적으로 큰 경우에는 국지지역의 자유도의 수가 매우 커지므로 해석에 어려움이 있다.

본 연구에서는 효율적 고차이론 (EHOPT[7])의 변위장에 층간분리부를 기술할 수 있는 자유도를 추가하여 다층간분리부가 있는 일반적층배열의 복합재료 적층평판의 자유진동을 해석할 수 있는 효율적인 고차 지그재그 이론을 제안한다. 본 이론은 다른 이론들과 비교하여 최소한의 자유도를 가지고 층간분리부의 문제를 다룰 수 있고 자유도가 매우 많은 층간세분화이론과 비교 할 수 있는 정확도를 가지기 때문에 실제 여러개의 층간분리가 있는 복합재의 진동해석을 할 때 효과적으로 적용할 수 있는 이론으로 생각되어진다. 수치예를 통하여 본 이론의 적용범위와 정확도, 그리고 효율성을 검증한다.

2. 다층간분리부를 가지는 고차 지그재그 이론

복합재료 적층판(그림 1)에 대하여 새로운 고차 지그재그 이론은 아래와 같이 층간분리 변수들이 추가되어 구성되어 질 수 있다.

$$u_\alpha = u_\alpha^0 + \psi_\alpha z + \xi_\alpha z^2 + \phi_\alpha z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k (z - z_k) H(z - z_k)$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\bar{u}_{\alpha}^{k}H(z-z_k) \quad (1)$$

$$u_3=w+\sum_{k=1}^{N-1}\bar{w}^{k}H(z-z_k)$$

여기서, N은 복합재 적층판의 개수이고. $H(z-z_k)$는 단위계단함수이다. 그리고, $\bar{u}_\alpha$와 $\bar{w}^k$는 층간분리부의 면내 변위와 횡방향 변위를 나타낸다.

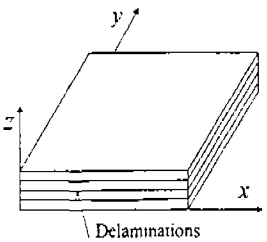

그림 1: 적층판의 형상

위의 변위장으로부터 횡방향 전단변형률은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha 3} &= u_{\alpha,3}+u_{3,\alpha}\\ &= v_\alpha+w_{,\alpha}+2z\xi_\alpha+3z^2\phi_\alpha \quad (2)\\ &+ \sum_{k=1}^{N-1}(S_\alpha^k+\bar{w}_{,\alpha}^k)H(z-z_k)\end{aligned}$$

횡방향 전단응력이 적층판의 위면과 아래면에서 0이라는 조건은 다음과 같다.

$$\gamma_{\alpha 3}|_{z=0}=0\ ,\ \gamma_{\alpha 3}|_{z=h}=0 \quad (3)$$

이 조건을 식(1)로 주어진 변위장에 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\psi_\alpha+w_{,\alpha}=0 \quad (4)$$

$$\xi_\alpha=-\frac{3h}{2}-\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{N-1}(S_\alpha^k+\bar{w}_{,\alpha}^k)H(z-z_k) \quad (5)$$

이 식을 식(2)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 횡방향 전단변형률을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha 3} &= 3(z^2-hz)\phi_\alpha \quad (6)\\ &+\sum_{k=1}^{N-1}(S_\alpha^k+\bar{w}_{,\alpha}^k)\left[-\frac{z}{h}+H(z-z_k)\right]\end{aligned}$$

횡방향 전단응력이 층의 경계면에서 연속이라는 조건으로부터 층간 회전각 변수들은 아래와 같이 얻어진다.

$$S_\alpha^k+\bar{w}_{,\alpha}^k=a_{\alpha\gamma}^k\phi_\gamma \quad (7)$$

식(4),(5) 그리고 식(7)을 식(1)에 대입하고 정리하면, 면내 변위장과 횡방향 변위장의 식은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}u_\alpha &= u_\alpha^0-w_{,\alpha}z+z^2(z-\frac{3h}{2})\phi_\alpha-\frac{z^2}{2h}\sum_{k=1}^{N-1}a_{\alpha\gamma}^k\phi_\gamma\\ &+\sum_{k=1}^{N-1}a_{\alpha\gamma}^k\phi_\gamma(z-z_k)H(z-z_k) \quad (8)\\ &-\sum_{k=1}^{N-1}(\bar{w}_{,\alpha}^k(z-z_k)-\bar{u}_\alpha^k)H(z-z_k)\\ u_3 &= w+\sum_{k=1}^{N-1}\bar{w}^kH(z-z_k)\end{aligned}$$

여기서, 기준면은 적층판의 아래면이고, $a_{\alpha\gamma}^k$는 횡방향 전단응력이 연속이라는 조건으로부터 계산되어지는 상수이다.

본 연구자들이 제안한 고차 지그재그 이론은 최소한의 변수로 임의의 적층배열과 층간분리부의 면내방향의 위치, 횡방향의 위치, 그리고 다층간분리부를 모두 표현할 수 있는 일반적인 변위장을 제공한다. 기준면의 변수와 층간분리부의 변수는 그림 2에 나타나 있다. 층간분리부의 변수를 제거하면 변위장은 M. Cho의 효율적 고차이론(EHOPT[7])과 같아진다.

층간분리부의 변수는 본 이론에서 각각의 경계면에서 모두 존재하는 것으로 전개하였으나, 유한요소법에 적용할 때는 어렵지 않게 실재하는 층간분리부의 수와 같은 자유도를 가지도록 할 수 있다.

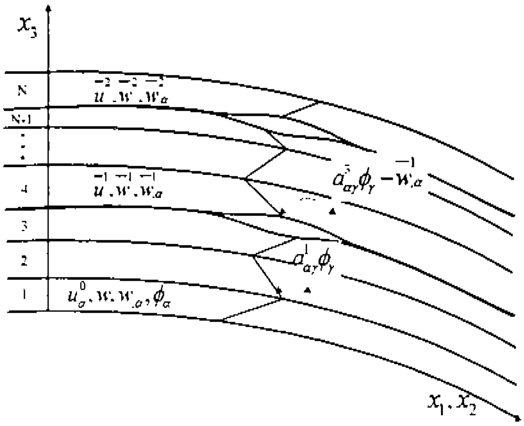

그림 2: 기준면의 변수와 층간분리부의 변수

3. 운동방정식과 경계조건

Hamilton's principle로부터 본 이론의 운동방정식과 경계조건을 구하였다. 밀도 ρ는 시간에 독립적이고, 임의의 분포 하중 q는 적층판의 기준면(Ω)에 가해진다고 가정하였다. Hamilton's principle으로부터

$$\int_0^t \Big(\int_v \sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij}dv - \int_v \dot{u}_i\delta\dot{u}_i dv - \int_\Omega q\delta w d\Omega \Big)\, dt = 0 \tag{9}$$

본 이론의 운동방정식은 다음과 같이 기술되어 질 수 있고,

$$\begin{aligned}
\delta u_\alpha^0 &: \; N_{\alpha\beta,\beta} - \ddot{N}_\alpha = 0 \\
\delta w &: \; M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - \ddot{M}_{\alpha,\alpha} - \ddot{V} + q = 0 \\
\delta \phi_\alpha &: \; \hat{R}_{\alpha\beta,\beta} + \hat{V}_\alpha - \ddot{\hat{R}}_\alpha = 0 \\
\delta \bar{u}_\alpha^k &: \; \bar{N}^k_{\alpha\beta,\beta} - \ddot{\bar{N}}^k_\alpha = 0 \\
\delta \bar{w}^k &: \; \bar{M}^k_{\alpha\beta,\alpha\beta} - \ddot{\bar{M}}^k_{\alpha,\alpha} - \ddot{Q}^k = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 &\quad \text{or} \quad \delta u_\alpha^0 = 0 \\
(M_{\alpha 3.\beta} - \ddot{M}_\alpha)\nu_\alpha = 0 &\quad \text{or} \quad \delta w = 0 \\
M_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 &\quad \text{or} \quad \delta w_{,\alpha} = 0 \\
\hat{R}_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 &\quad \text{or} \quad \delta \phi_\alpha = 0 \\
\bar{N}^k_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 &\quad \text{or} \quad \delta \bar{u}^k_\alpha = 0 \\
(\bar{M}^k_{\alpha 3.3} - \ddot{\bar{M}}^k_\alpha)\nu_\alpha = 0 &\quad \text{or} \quad \delta \bar{w}^k = 0 \\
\bar{M}^k_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 &\quad \text{or} \quad \delta w^k_{,\alpha} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

여기서 기계적 결과력들은 아래와 같고,

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha 3} &= R^{(3)}_{\alpha 3} - \frac{3h}{2}R^{(2)}_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} a^k_{\gamma\alpha}\Big(\bar{M}^k_{\gamma\beta} - \frac{1}{2h}R^{(2)}_{\gamma\beta}\Big) \\
\Big[N_{\alpha 3}, M_{\alpha 3}, R^{(2)}_{\alpha\beta}, R^{(3)}_{\alpha\beta}\Big] &= \int_0^h \sigma_{\alpha\beta}\left[1, z, z^2, z^3\right] dz \\
\Big[\bar{N}^k_{\alpha 3}, \bar{M}^k_{\alpha 3}\Big] &= \int_0^h \sigma_{\alpha\beta}\left[1, (z - z_k)\right] H(z - z_k) dz \\
\hat{V}_\alpha &= 3V^{(2)}_\alpha - 3hV^{(1)}_\alpha + \sum_{k=1}^{N-1} a^k_{\gamma\alpha}\Big(Q^k_\gamma - \frac{1}{h}V^{(1)}_\gamma\Big) \\
\Big[V^{(1)}_\alpha, V^{(2)}_\alpha, Q^k_\alpha\Big] &= \int_0^h \sigma_{\alpha 3}\left[z, z^2, H(z - z_k)\right] dz
\end{aligned} \tag{12}$$

관성 결과력들은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\ddot{\hat{R}}_\alpha &= \ddot{R}^{(3)}_\alpha - \frac{3h}{2}\ddot{R}^{(2)}_\alpha + \sum_{k=1}^{N-1} a^k_{\gamma\alpha}\Big(\ddot{\bar{M}}^k_\gamma - \frac{1}{2h}\ddot{R}^{(2)}_\gamma\Big) \\
\Big[\ddot{N}_\alpha, \ddot{M}_\alpha, \ddot{R}^{(2)}_\alpha, \ddot{R}^{(3)}_\alpha\Big] &= \int_0^h \rho\ddot{u}_\alpha\left[1, z, z^2, z^3\right] dz \\
\Big[\ddot{\bar{N}}^k_\alpha, \ddot{\bar{M}}^k_\alpha\Big] &= \int_0^h \rho\ddot{u}_\alpha\left[1, (z - z_k)\right] H(z - z_k) dz \\
\Big[\ddot{V}, \ddot{Q}^k\Big] &= \int_0^h \rho\ddot{u}_3\left[1, H(z - z_k)\right] dz
\end{aligned} \tag{13}$$

4. 구성방정식

k번째 orthotropic lamina의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma^k_{\alpha\beta} = \bar{Q}^k_{\alpha\beta\gamma\omega}\epsilon^k_{\gamma\omega} \;, \; \sigma^k_{\alpha 3} = \bar{Q}^k_{\alpha 3\beta 3}\gamma^k_{\beta 3} \tag{14}$$

$$\left\{\begin{array}{c} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ R^{(2)}_{\alpha\beta} \\ R^{(3)}_{\alpha\beta} \\ \bar{M}^{i}_{\alpha\beta} \\ \bar{N}^{i}_{\alpha\beta} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} A^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & B^{j(0)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & E^{j(0)}_{\alpha\beta\gamma\omega} \\ A^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(4)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & B^{j(1)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & E^{j(1)}_{\alpha\beta\gamma\omega} \\ A^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(4)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(5)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & B^{j(2)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & E^{j(2)}_{\alpha\beta\gamma\omega} \\ A^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(4)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(5)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & A^{(6)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & B^{j(3)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & E^{j(3)}_{\alpha\beta\gamma\omega} \\ B^{i(0)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & B^{i(1)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & B^{i(2)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & B^{i(3)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & D^{ij}_{\alpha\beta\gamma\omega} & F^{ij}_{\alpha\beta\gamma\omega} \\ E^{i(0)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & E^{i(1)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & E^{i(2)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & E^{i(3)}_{\alpha\beta\gamma\omega} & F^{ij}_{\alpha\beta\gamma\omega} & E^{ij}_{\alpha\beta\gamma\omega} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \epsilon^{(0)}_{\gamma\omega} \\ \epsilon^{(1)}_{\gamma\omega} \\ \epsilon^{(2)}_{\gamma\omega} \\ \epsilon^{(3)}_{\gamma\omega} \\ \epsilon^{j}_{\gamma\omega} \\ \bar{\epsilon}^{j}_{\gamma\omega} \end{array}\right\} \tag{15}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \ddot{N}_{\alpha} \\ \ddot{M}_{\alpha} \\ \ddot{R}^{(2)}_{\alpha} \\ \ddot{R}^{(3)}_{\alpha} \\ \ddot{\bar{M}}^{i}_{\alpha} \\ \ddot{\bar{N}}^{i}_{\alpha} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} I^{(0)}_{0} & I^{(1)}_{0} & I^{(2)}_{0} & I^{(3)}_{0} & I^{j(0)}_{1} & I^{j(0)}_{2} \\ I^{(0)}_{1} & I^{(2)}_{0} & I^{(3)}_{0} & I^{(4)}_{0} & I^{j(1)}_{1} & I^{j(1)}_{2} \\ I^{(0)}_{2} & I^{(3)}_{0} & I^{(4)}_{0} & I^{(5)}_{0} & I^{j(2)}_{1} & I^{j(2)}_{2} \\ I^{(0)}_{3} & I^{(4)}_{0} & I^{(5)}_{0} & I^{(6)}_{0} & I^{j(3)}_{1} & I^{j(3)}_{2} \\ I^{i(0)}_{1} & I^{i(1)}_{1} & I^{i(2)}_{1} & I^{i(3)}_{1} & I^{ij}_{3} & I^{ij}_{4} \\ I^{i(0)}_{2} & I^{i(1)}_{2} & I^{i(2)}_{2} & I^{i(3)}_{2} & I^{ij}_{4} & I^{ij}_{5} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \ddot{u}^{0}_{\alpha} \\ -\ddot{w}_{,\alpha} \\ -(\frac{3h}{2}\ddot{\phi}_{\alpha} + \frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{N-1} a^{k}_{\alpha\gamma}\ddot{\phi}_{\gamma}) \\ \ddot{\phi}_{\alpha} \\ a^{j}_{\alpha\gamma}\ddot{\phi}_{\gamma} - \ddot{\bar{w}}^{j}_{,\alpha} \\ \ddot{\bar{u}}^{j}_{\alpha} \end{array}\right\} \tag{16}$$

여기서, A, B, E, F, D는 면내방향 강성행렬이고, I는 면내방향 관성행렬이다.

여기서, $\bar{Q}^{k}_{\alpha\beta\gamma\omega}$와 $\bar{Q}^{k}_{\alpha3\beta3}$는 transformed reduced stiffness matrix이다.

식(14)에서 각 변형률은 다음과 같이 정의 하였다.

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta} &= \epsilon^{(0)}_{\alpha\beta} + z\epsilon^{(1)}_{\alpha\beta} + z^{2}\epsilon^{(2)}_{\alpha\beta} + z^{3}\epsilon^{(3)}_{\alpha\beta} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1}(\epsilon^{k}_{\alpha\beta}(z - z_k) + \bar{\epsilon}^{k}_{\alpha\beta})H(z - z_k)\end{aligned} \tag{17}$$

$$\gamma_{\alpha3} = z\gamma^{(1)}_{\alpha3} + z^{2}\gamma^{(2)}_{\alpha3} + \sum_{k=1}^{N-1}\gamma^{k}_{\alpha3}H(z - z_k)$$

식(8), (14), (17)을 식(12), (13)에 대입하고 정리하면 적층판의 구성방정식과 관성결과력은 면내방향과 면외방향에 대하여 각각 식(15), (18)과 식(16), (19)와 같이 구할 수 있다.

$$\left\{\begin{array}{c} V^{(1)}_{\alpha} \\ V^{(2)}_{\alpha} \\ Q^{i}_{\alpha} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} A^{(2)}_{\alpha3\beta3} & A^{(3)}_{\alpha3\beta3} & E^{j(1)}_{\alpha3\beta3} \\ A^{(3)}_{\alpha3\beta3} & A^{(4)}_{\alpha3\beta3} & E^{j(2)}_{\alpha3\beta3} \\ E^{i(1)}_{\alpha3\beta3} & E^{i(2)}_{\alpha3\beta3} & E^{ij}_{\alpha3\beta3} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \gamma^{(1)}_{\beta3} \\ \gamma^{(2)}_{\beta3} \\ \gamma^{j}_{\beta3} \end{array}\right\} \tag{18}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \ddot{V} \\ \ddot{Q}^{i} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc} I^{(0)}_{0} & I^{j(0)}_{2} \\ I^{i(0)}_{2} & I^{ij}_{5} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \ddot{w} \\ \ddot{\bar{w}}^{j} \end{array}\right\} \tag{19}$$

여기서, A, E는 전단 강성 행렬이고, I는 면외방향 관성행렬이다.

5. 수치예

본 연구에서 제안된 층간분리부를 가지는 고차 지그재그 이론에 기초한 다층간분리부가 존재하는 적층된 복합재 보의 자유 진동해석을 본 연구자들이 개발한 유한요소로 수행하였다.

수치예에 사용한 복합재료의 물성치는 표1에 나타나 있다.

표 1: 복합재 보의 물성치

E_{11}	=	19.5×10^{6} psi
E_{22}	=	1.5×10^{6} psi
G_{12}	=	0.725×10^{6} psi
ν_{12}	=	0.33
ρ	=	1.3821×10^{-4} lb − s^{2}/in^{4}

복합재 외팔보의 형상, 적층배열, 그리고 층간분리의 위치는 그림 3에 나타나 있다. 고유 주파수는 모두 Hz 단위로 계산하였으며. Shen[2]의 실험결과 및 Timoshenko 보 이론에 기초한 해석해를 표 2-4 에 본 연구자들에 의한 유한요소 해석결과와 비교하였다.

표2-4 에서 보듯이 본 연구의 유한요소 해석결과는 비교 자료와 층간분리의 위치 그리고 크기에 따라 잘 일치함을 알 수 있다.

표 2: Fundamental frequency for delamination along interface 1

a (inch)	Exp[2]	Anal[2]	Present
0	79.875	82.042	81.8983
1	79.126	80.133	81.1970
2	75.000	75.285	76.5937
3	66.250	66.936	67.4532
4	57.502	57.239	56.7837

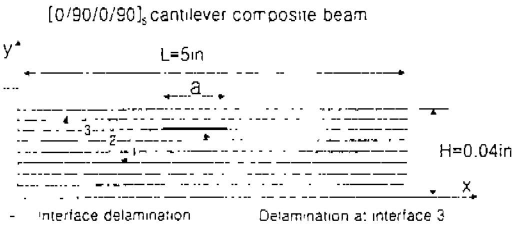

그림 3: 복합재 외팔보의 형상

6. 결 론

본 연구에서는 다층간 분리부가 있는 복합재 적층평판의 동적해석을 위한 효율적인 고차 지그재그 이론을 개발하였다. 기존의 다른 이론들과 비교할 때 본 이론은 최소한의 자유도만을 가지므로 매우 간편하고 정확하게 분리부의 거동을 모사할 수 있다. 본 방법은 유한요소로 구현하였을 때도 매우 체계적으로 분리부의 거동을 모사할 수 있고 그 정확성은 수치예를 통해서 검증되었다. 상대적으로 작은 수의 자유도만으로도 자유진동 해석을 할 수 있으므로 본 방법은 복합재 적층 구조물의 층간분리부의 좌굴,후좌굴 및 성장거동에도 강력한 도구가 될 수 있을 것으로 판단된다. 앞으로 이 이론을 확장하여 후좌굴해석, 층간분리부의 성장거동 예측, 그리고 동적인 응답 해석 등에 적용할 예정이다.

표 3: Fundamental frequency for delamination along interface 2

a (inch)	Exp[2]	Anal[2]	Present
0	79.875	82.042	81.8983
1	78.375	81.385	81.2476
2	75.250	78.103	76.9627
3	70.001	71.159	68.3031
4	49.751	62.121	57.9525

표 4: Fundamental frequency for delamination along interface 3

a (inch)	Exp[2]	Anal[2]	Present
0	79.875	82.042	81.8983
1	80.125	81.461	81.7226
2	81.875	79.932	80.4715
3	77.125	76.712	77.2762
4	73.627	71.663	71.5239

참고문헌

[1] Wang, J.T.S. and Gibby, J.A., " Vibrations of split beams, " *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, No. 4, 1982, pp. 491-502.

[2] Shen, M.-H. H. and Grady, J.E., " Free Vibrations of Delaminated Beams, " *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 5, 1992, pp. 1361-1370.

[3] Ratcliffe, C.P. and Bagaria, W.J., " Vibration Technique for Location Delamination in a Composite Beam, " *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 6, 1998, pp. 1074-1077.

[4] Lee, J., " Vibration, Buckling and Postbuckling of Laminated Composites with Delaminations, " Ph.D. Disseration, Virginia Polytech Institute and State University, 1989

[5] Seeley, C.E and Chattopadhyay, A., " Modeling of adaptive composites including debonding." *Int. J. of Solids and Structures*, 1999, pp.1823-1843

[6] Maenghyo Cho, Jun-Sik Kim, " Bifurcation Buckling Analysis of Delaminated Composites Using Global-Local Approach, " *AIAA Journal* , Vol. 35, No. 10, 1997, pp.1673-1676.

[7] Maenghyo Cho, R.Reid Parmerter, " An Efficient Higher-order Plate Theory for Laminated Composites, " Composite Structures, Vol. 20, 1992, pp.113-123.