

면내 순수 휨응력을 받는 수평보강된 직교이방성 판의 좌굴

Buckling of Horizontally Stiffened Orthotropic Plate under In-plane Pure Bending Stress

○ 남 정훈 · 정 재호 · 채 수하 · 윤 순종
홍익대학교 대학원 토목공학과

1. 서 론

1940년대 초반부터 군수, 항공 및 선박산업 분야에서 본격적으로 사용되어진 복합재는 기존 구조재에 비해 여러 가지 역학적·물리적 장점을 가지고 있어 현재는 건설분야에서도 그 사용성이 증가되고있는 추세이다. 또한 최근에는 pultrusion process 등과 같은 효율적인 생산방법이 개발됨에 따라 복합재로 구성된 구조재의 대량생산이 가능하게 되었고, 이미 구미 선진국에서는 이러한 재료를 각종 구조물의 건설 및 보수에 사용하기 위하여 이론적·실험적 연구가 진행중에 있다. 그러나 아직은 연구수준이 미흡한 상태이며, 특히, 좌굴에 대한 연구는 초보적인 수준이다.

본 연구는 복합재로 구성된 구조재의 좌굴에 관한 것으로서 면내 순수 휨응력을 받는 수평보강된 직교이방성판의 좌굴해석을 수행하여 판의 좌굴응력을 증가시키기 위해 보강재에 요구되는 휨강성을 제시하였다. 또한, 일반적으로 보강재의 폭은 판의 폭에 비해 매우 작으므로, 본 연구에서 보강재는 보조소로 간주 되어졌으며, 판의 네 변은 모두 단순지지되어 있는 것으로 가정하였다.

2. 수평보강된 직교이방성판의 좌굴

본 연구에서는 고전적인 직교이방성판에 대한 가정 사항 이외에 판과 보강재의 접합부에서의 가정사항을 다음과 같이 고려하였다⁽¹⁾.

- (1) 보강재와 판의 접합부에서 보강재와 판의 면외처짐은 같다
- (2) 보강재의 비틀림강성은 무시한다.
- (3) 보강재는 판의 중립면에 대해 대칭으로 설치되어 있다.

이와 같이 가정한 면내 순수 휨응력을 받는 수평보강된 직교이방성판을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

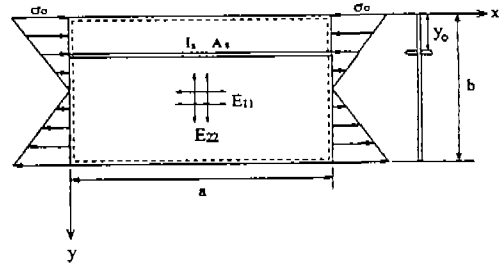


그림 1. 면내 순수 휨응력을 받는 수평보강된 직교이방성판

그림 1에서 E_{11} , E_{22} 는 재료의 성질방향 1과 2에 대한 단성계수이며, I_s , A_s 는 각각 보강재의 y 축에 대한 단면 2차 모멘트와 x 축에 대한 단면적을 나타낸다. 또한 a 와 b 는 각각 판의 길이와 폭을 나타내며, y_0 는 보강재의 설치위치로서 압축연단으로부터의 거리를 나타낸다.

그림 1과 같은 판의 좌굴해석을 다음과 같은 방법으로 수행하였다. 먼저 보강재의 강성이 비교적 작아 판의 좌굴에 의해 판과 보강재의 접합부에 면외처짐이 발생하는 경우에 대해 에너지법의 하나인 Rayleigh-Ritz법을 적용하여 좌굴해석을 수행하였고, 보강재의 강성이 매우 커서 접합부에서 면외처짐이 발생하지 않는 경우에 대해서는 Lagrangian multiplier법을 적용하여 판의 좌굴계수의 상한치를 결정하였다.

2.1 접합부에 면외처짐이 발생하는 경우

좌굴해석식의 유도에 필요한 에너지법에 의한 기본 방정식은 참고문헌^(4,12)에 나와 있으므로 본 연구에서는 생략한다. Rayleigh-Ritz법을 사용하여 좌굴해석식을 유도하기 위해서는 먼저 경계조건을 만족하는 처짐식을 가정해야 한다. 본 연구에서는 접합부에서 판의 면외처짐과 보강재의 처짐이 같다는 조건으로부터 판과 보강재의 처짐식을 각각 다음 식 (1a,b)와 같

이 가정한다.

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1a)$$

$$w_s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \quad (1b)$$

식 (1a,b)에서 m 과 n 은 각각 x 축, y 축 방향에 대한 half-sine곡선의 수를 나타내며 A_{mn} 은 처짐량을 나타내는 임의의 상수이다.

계산을 간단히 하기 위해 무차원화 변수 $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ 와 보강재의 위치를 무차원화 한 $\eta_0 = y_0/b$ 를 도입한다.

직교이방성판의 좌굴응력은 다음 식 (2)와 같이 정의된다^(2,4,6,11).

$$\sigma_{cr} = k_p \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left(\frac{b}{t}\right)^2} \quad (2)$$

위 식에서 ν_{12} , ν_{21} 은 각각 재료의 성질방향 1과 2에서의 프아송비이다. 따라서, 직교이방성판의 좌굴응력은 나머지 항들이 재료의 역학적 성질과 치수에 의해 주어지는 상수값이므로 판의 좌굴계수(k_p)만 구하면 알 수 있다.

앞에서 가정한 처짐식 (1a,b)와 식 (2)를 수평보강된 직교이방성판의 에너지법에 의한 기본방정식에 대입한 후 Rayleigh-Ritz법을 적용하여 간단히 나타내면 다음 식 (3)과 같다⁽¹²⁾.

$$\begin{aligned} & A_{mn} \left\{ Q_{mn} - k_p \phi^2 m^2 \left(1 - \frac{c}{2}\right) \right\} \\ & - k_m \sum_{q=1}^{\infty} A_{mq} \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} \\ & + LS_m \sin n\pi\eta_0 \sum_{p=1}^{\infty} A_{mp} \sin p\pi\eta_0 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서 c 는 하중분포를 나타내는 상수로서 순수평인 경우는 $c=2$ 일 때이다. 그리고, $m=1, 2, 3, \dots$ 이고, $n=1, 2, 3, \dots$ 이며, $n \pm q$ 는 항상 홀수이다. 또한 Q_{mn} , k_m , LS_m 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} Q_{mn} = & m^4 \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + 2\phi^2 m^2 n^2 \nu_{21} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \\ & + \phi^4 n^4 \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + 4\phi^2 m^2 n^2 \frac{G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} \end{aligned} \quad (4a)$$

$$k_m = \frac{8k\phi^2 m^2 c}{\pi^2} \quad (4b)$$

$$LS_m = 2\{\gamma m^4 - k\phi^2 m^2 \delta(1 - c\eta_0)\} \quad (4c)$$

식 (4c)는 판의 좌굴에 대한 보강재의 영향을 포함한 항으로 다음 식 (5a)와 (5b)로 표현되는 보강재와 판의 휨강성비(γ)와 면적비(δ)로 구성된다.

$$\gamma = \frac{E_{11} I_s}{\sqrt{D_{11} D_{22}} b} \quad (5a)$$

$$\delta = \frac{A_s}{bt} \quad (5b)$$

식 (3)은 m 과 n 의 조합에 의해 A_{mn} 에 대한 제차선형연립방정식으로 전개되며 이 방정식을 행렬형태로 나타내었을 때 오른쪽 항이 모두 0이 된다. 따라서, A_{mn} 이 0이 아닌 해를 찾기 위해서는 A_{mn} 에 대한 계수행렬의 행렬값이 0이 되어야 한다는 조건으로부터 판의 좌굴계수를 구할 수 있다.

2.2 접합부에 면외처짐이 발생하지 않는 경우

수평보강된 판의 좌굴응력의 최대값은 판과 보강재의 접합부에 면외처짐이 발생하지 않는 경우의 판의 좌굴응력값이라 할 수 있다⁽¹⁾. 따라서 본 절에서는 접합부에 면외처짐이 발생하지 않는 경우에 대해 좌굴해석을 수행하기 위한 식을 유도하고 보강재에 요구되는 휨강성의 기준이 되는 좌굴응력의 상한치를 제시한다.

판과 보강재의 접합부에서 면외처짐이 발생하지 않는다는 조건으로부터 다음 식 (6)을 제시할 수 있다.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\pi\eta_0 = 0 \quad (6)$$

또한, 접합부에서 면외처짐이 발생하지 않는 경우에 판의 좌굴응력과 보강재의 치수와는 무관하게 되므로, 면내 선형분포하중을 받는 직교이방성판의 좌굴해석식에 식 (6)의 조건을 추가하여 Lagrangian multiplier법을 적용하면 다음 식 (7)과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$A_{mn} \left\{ Q_{mn} - k_p \phi^2 m^2 \left(1 - \frac{c}{2} \right) \right\} - k_m \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} + \lambda \sin n\pi\gamma_0 = 0 \quad (7)$$

식 (7)에서 λ 는 Lagrangian multiplier로서 A_{mn} 과 함께 결정되어야 할 상수이다. 또한 $m = 1, 2, 3 \dots$ 이고, $n = 1, 2, 3, \dots$ 이며, $n \pm q$ 는 항상 홀수이다. 앞 절에서 유도한 식 (4)와 같이, 식 (7)은 A_{mn} 과 λ 에 대한 제차선형연립방정식으로 전개되며, 행렬형태로 나타내었을 때 계수행렬의 행렬값이 0이 되어야 한다는 조건으로부터 보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하지 않는 경우의 판의 좌굴계수값을 구할 수 있다.

그림 2는 순수 휨용력($c=2$)을 받는 수평보강된 직교이방성판의 보강재의 위치에 따른 좌굴계수의 상한치를 구해 그래프로 나타낸 것이다.

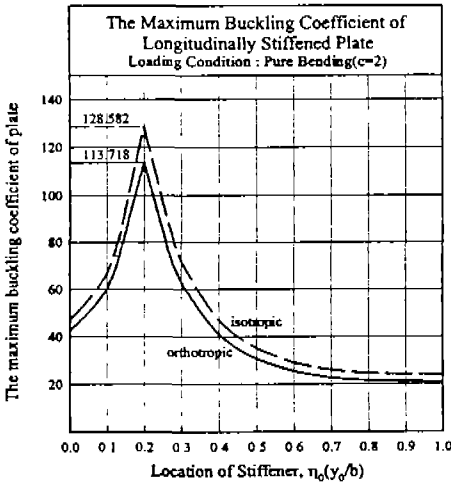


그림 2. 보강재의 위치에 따른 직교이방성판의 좌굴계수의 상한치

3. 수평보강재에 요구되는 휨강성

수평보강된 판에서 판의 좌굴용력이 최대가 되기 위해 보강재에 요구되는 휨강성은 앞 절에서 구한 수평보강된 판의 좌굴계수의 상한치와 유도된 좌굴해석식 (3)을 사용하여 다음과 같이 구하였다.

식 (5a)에서 분모항은 판의 휨강성과 폭으로 구성되어 있으므로 판의 좌굴용력을 증가시키기 위한 보강재와 판의 휨강성비를 알면 보강재에 요구되는 휨강성을 쉽게 구할 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 보강재에 요구되는 휨강성을 보강재와 판의 휨강성비로

나타내었다.

2.1절에서 유도한 좌굴해석식에서 판의 형상비에 따른 좌굴계수를 알고 있다면 임의의 보강재와 판의 면적비에 대해 보강재와 판의 휨강성비를 구할 수 있다.

따라서, 2.2절로부터 얻어진 좌굴계수의 상한치를 식 (3)에서 유도된 좌굴해석식에 대입하고 보강재와 판의 휨강성비를 미지수로 택하면 보강재와 판의 면적비가 임의의 값을 가질 때 판의 좌굴계수가 최대가 되기 위한 보강재와 판의 휨강성비의 한계값(γ_L)을 판의 형상비에 따라 구할 수 있다.

본 연구는 수평보강된 직교이방성판이 순수 휨용력을 받는 경우로서 판의 최대 좌굴계수는 보강재가 압축연단으로부터 $0.2b$ 인 위치에 설치된 때이며 판의 좌굴계수값은 113.718이다(그림 2 참조). 그림 3은 이 값을 식 (3)에 대입하고 앞에서 설명한 방법으로 보강재와 판의 휨강성비를 구하여 임의의 보강재와 판의 면적비에 대해 판의 형상비에 따른 γ_L 을 구하여 그래프로 나타낸 것이다. 계산에 사용한 재료의 성질은 그림 3에 나타내었다⁽⁹⁾.

그림 4는 같은 방법으로 재료가 등방성인 경우에 대해 해석한 결과로서 보강재는 압축연단으로부터 $0.2b$ 인 위치에 설치되어 있으며 이 때 판의 좌굴계수의 상한치는 128.94이다(그림 2 참조). 임의의 보강재와 판의 면적비에 대해 판의 형상비에 따른 γ_L 을 구한 결과 기존문헌의 결과와 잘 일치하였다⁽³⁾.

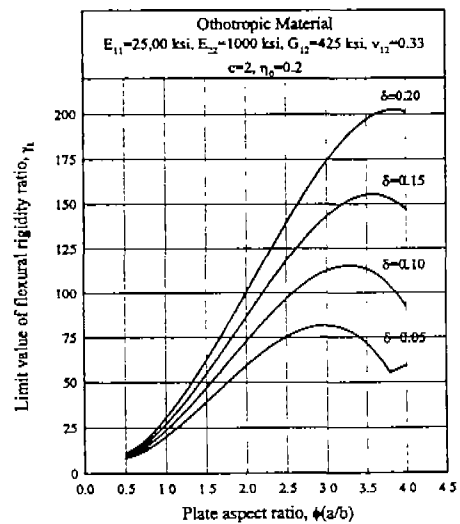


그림 3. 판과 보강재의 면적비에 따른 직교이방성판의 휨 강성비.

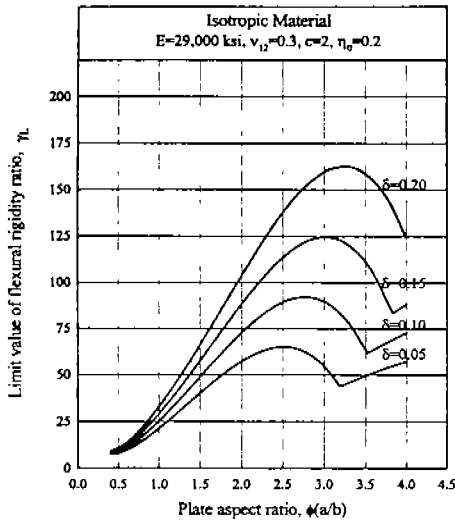


그림 4. 판과 보강재의 면적비에 따른 등성판의 휨강성비

4. 결론

본 연구를 통하여 네 변이 단순지지된 면내 순수 휨응력을 받는 수평보강된 직교이방성판의 판의 좌굴 응력이 최대가 되는 판과 보강재의 휨강성비(γ_1)를 판의 형상비에 따라 판과 보강재의 면적비를 변화시켜가며 구하여 그 결과를 그래프로 제시하였다(그림 3 참조).

유도된 좌굴해석식에 등방성 재료의 역학적 성질을 대입하여 판의 좌굴응력이 최대가 되는 판에 대한 보강재의 휨강성비를 구한 결과 기존 문헌의 결과와 잘 일치함을 확인하였다(그림 4 참조)⁽³⁾.

현재 사용중인 등방성 재료(steel)의 경우에는 이론적·실험적 연구를 통하여 판에 대한 보강재의 휨강성비를 결정하는 식이 설계에 적용되고 있으나 직교이방성재료의 경우는 실험식 뿐만 아니라 이론식조차도 아직은 연구가 미흡한 수준이다. 따라서 이와같은 연구결과를 실제 설계에 적용하기 위해서는 실험적 연구가 병행되어야 할 것으로 판단된다.

참고 문헌

1. Bleich, F. (1952). *Buckling strength of metal structures*, McGraw-Hill, New York.
2. Galambos, T. V. (1988). *Guide to stability design*

- criteria for metal structures*, 4th ed., John Wiley & Sons Inc., New York.
3. Rockey, K. C. and Leggett, D. M. A. (1962). "The buckling of a plate girder web under pure bending when reinforced by a single longitudinal stiffener", *Proceedings of Institution of Civil Engineers*, Vol. 21, pp.161-188.
4. Lekhnitskii, S. G. (1984). *Anisotropic plates*, S. W. Tsai and T. Cheron (Trans.), Gordon and Breach, 2nd printing, New York.
5. Bulson, P. S. (1969). *The stability of flat plates*, American Elsevier Publishing Company Inc., New York.
6. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1961). *Theory of elastic stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
7. Chajes, A. (1974). *Principles of structural stability theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
8. Hohn, F. E. (1973). *Elementary matrix algebra*, 3rd ed., The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Publishers, London.
9. MMFG. (1989). *Extren fiberglass structural shape design manual*, Morrison Molded Fiberglass Company, Bristol, Virginia.
10. Budiansky, B. and Hu, P. C. (1946). "The lagrangian multiplier method of finding upper and lower limits to critical stresses of clamped plates," *NACA*, Tennessee 848.
11. 김동홍, 채수하, 윤순종, 윤종열, 이원복. (1996). "중간보강재가 설치된 직교이방성 평판의 탄성좌굴 해석", 한국강구조학회 학술발표회, pp. 169~173
12. 정재호, 윤순종, 조선규. (1998). "면내 선형분포하중을 받는 수평보강재가 설치된 직교이방성판의 좌굴강도," 한국강구조학회 논문집, 제10권, 3호 (통권36호), 한국강구조학회, pp. 393~406.