

건설용 적층복합재료판의 예비설계를 위한 간편해석법을 사용한

[$\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta$]r형 적층판의 진동해석

Vibration Analysis of [$\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta$]r type Composite Laminated Plates by the Simple Method of Analysis for Preliminary Design for Civil Construction

김 덕 현* · 이 정 호** · 이 남 주***

1. 서론

고급복합재료(advanced composite material)는 여러 가지 훌륭한 장점에도 불구하고 건설기술자에게는 그 이론이 너무 복잡하여 건설구조에 대한 응용이 지연되고 있다. [$\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta$]r, $\alpha=-\beta$, $\gamma=0^\circ$ 또는 90° 와 같은 몇 가지 배향각을 갖은 적층판은, r이 증가함에 따라, B_{ij} 강성이 0으로 접근한다(1995). 건설구조물은 그 치수가 커서 r이 증가해도 시간 대 두께비가 충분히 커서, 횡방향 변형률(ϵ_{xz} , ϵ_{yz})의 영향이 무시될 수 있다. 이 경우 판의 지배방정식은 간단한 특별직교이방성판의 식으로 변화된다. 김덕현은 토목구조물에 흔히 적용될 수 있는 이러한 배향각을 가진 적층판의 지배방정식을 취급이 간단한 특별직교 이방성 판의 경우로 변경시킨 다음 해석을 더 간단히 진행할 수 있도록 기술자들이 유사 등방성 상수(quasi-isotropic constant)를 사용하여 낮은 등방성판의 방정식을 사용하여 답을 구한 다음 그가 개발한 "수정계수(correction factor)"를 사용하여 "정확한"해를 구하는 방법을 발표한다(1991). 본 논문에서는 토목건설용 구조물에 사용되기 쉬운 적층복합재료판의 한 경우인 [$\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta$]r의 간단한 해석을 위해 김덕현이 개발한 (Kim, 1991, 1995)방법을 소개하고 기술자들의 편의를 위해 몇 가지 경우의 고유진동수를 계산하여 제공한다.

2 이론적 배경

2.1 적층복합판 이론

횡방향 전단변형률이 무시될 수 있을 때, 적층판진동의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (1)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (2)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

* Korea Composites 대표

** 강원대학교 산업기술연구소 연구원

*** 강원대학교 토목공학과 석사과정

여기서

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (4), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h^2_k - h^2_{k-1}) \quad (5), \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h^3_k - h^3_{k-1}) \quad (4)$$

이고, $\bar{Q}_{i,j}$ 는 "transformed reduced stiffness matrix"로서

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{13} &= Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2 \\ \bar{Q}_{16} &= -Q_{22}mn^3 + Q_{11}m^3n - (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{23} &= Q_{13}n^2 + Q_{23}m^2 \\ \bar{Q}_{26} &= -Q_{22}m^3n + Q_{11}mn^3 + (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\ \bar{Q}_{36} &= (Q_{13} - Q_{23})mn \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

이며, $Q_{i,j}$ 는 "unidirectionally" 보강된 적층의 평면응력(plane stress) 및 평면변형률(plane strain)경우의 "reduced stiffness"로서 다음과 같다.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (6)$$

r의 증가에 따라 $B_{16} \rightarrow 0$, $B_{26} \rightarrow 0$ 가 되면, 식(1)(2)및(3)은 다음과 같이 간단히 변화되고, 이것은 곧 특별적교 이방성판의 방정식이 된다(Kim, 1995).

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7)$$

여기서 $D_1 = D_{11}$, $D_2 = D_{22}$ 그리고 $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ 이다. 판의 경계조건이 단순지지일 경우

$$x=0, a \text{에서 } w=0; \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

$$y=0, b \text{에서 } w=0; \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

이다. 탄성체의 자유진동은 조화운동이며 다음 식 과같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, y, t) = F(t) G(x, y) \quad (10)$$

윗 식(10)은 식(8)과 식(9)에서 주어진 경계조건을 만족하도록 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin \omega_n t \quad (11)$$

위 식(11)을 식 (7)에 대입하면 다음과 같은 고유주파수를 구할 수 있다.

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} [D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^4] = (\omega_n^{\text{orth}})^2 \quad (12)$$

역대칭 angle-ply 적층 복합판의 단순지지 type S3 즉 :

$x=0$ 과 $x=a$ 에서

$$w=0, \quad M_x = B_{16} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad u=0, \quad N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$y=0$ 과 $y=b$ 에서

$$w=0, \quad M_y = B_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad v=0, \quad N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

인 경우에 대하여 Whitney가 구한 고유진동수는 다음과 같다(Kim, 1995).

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} \left(T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T_{13}^2 - T_{11}T_{23}^2}{T_{11}T_{22} - T_{12}^2} \right) \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned} T_{11} &= A_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + A_{66} \left(\frac{n}{b}\right)^2, & T_{12} &= (A_{12} + A_{66}) \left(\frac{m}{a}\right) \left(\frac{n}{b}\right) \\ T_{13} &= -[3B_{16} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + B_{26} \left(\frac{n}{b}\right)^2] \left(\frac{n}{b}\right), & T_{22} &= A_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^2 + A_{66} \left(\frac{m}{a}\right)^2 \\ T_{23} &= -[B_{16} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + 3B_{26} \left(\frac{n}{b}\right)^2] \left(\frac{m}{a}\right), & T_{33} &= D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \end{aligned}$$

이다.

본 논문에서 제시된 $[a/\beta/\beta/\gamma/a/\alpha/\beta]_r$ 배향각을 가진 적층판은 r 이 증가하면 $B_{16}=B_{26} \rightarrow 0$ 가 되어, 식(13)은

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} T_{33} \quad (14)$$

가 되며, 이것은 정확히 식(12)와 일치한다. 즉 식 (13)이 식(12)로 간편하게 변화되는 것이다.

2.2 Quasi-isotropic 상수의 개념

복합재료 구조물의 예비 설계시, 비록 단면이나 배향각이 결정되지 않은 상태에서 Tsai가 제안한 유사등방성 상수를 사용하면 문제해결이 더 간단해진다(Kim, 1991, 1995). 역대칭 형태의 적층판을 포함한 $B_{16}=B_{26} \rightarrow 0$, $D_{16}=D_{26} \rightarrow 0$ 로 되는 적층판들은 특별직교 이방성 적층판과 같은 방정식으로 취급 될 수 있다(Kim, 1995). 모든 비등방성 재료는 변환된 좌표축의 불변량인 이러한 상수들을 갖고있는데 이것은 각각의 복합재료가 갖고 있는 최소한의 강도를 나타낸다. 적층판에 작용된 하중에 대하여, 선택된 층의 각도 배향에 관계없는 최소값은 어떠한 강성요소보다 더 좋은 설계요소가 된다. Quasi-isotropic 상수는 다음과 같다.

$$[Q]^{iso} = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), & U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), & U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) = U_1 - 2U_5, & U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{aligned}$$

이다.

Quasi-isotropic 상수를 사용할 경우

$$D_{11} = D_{22} = D_3 = \left(\frac{h^3}{12}\right) Q_{11}^{iso} = \frac{h^3}{12} U_1 \quad (16)$$

이며, 식(12)는 다음과 같이된다.

$$\begin{aligned} (\omega_n^{iso})^2 &= \frac{\pi^4}{\rho h} \left(\frac{h^3}{12}\right) Q_{11}^{iso} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \\ &= \frac{\pi^4}{\rho h} \left(\frac{h^3}{12}\right) U_1 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

DEN^{iso}를 다음과 같이 정의하면

$$DEN^{iso} = \left(\frac{h^3}{12}\right) U_1 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \quad (18)$$

식 (17)은 다음 식으로 표현된다(Kim, 1995).

$$(\omega_n^{iso})^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} (DEN^{iso}) \quad (19)$$

2.3 정확해를 얻기위한 수정계수의 사용

진동에 관한 정확한 값을 쉽게 얻기 위하여 김덕현(1991, 1995)은 다음과 같은 공식을 제안하여 예비 설계시 수정계수를 사용하여 “정확한 해”를 구할 수 있는 방법을 마련하였다.

Quasi-isotropic 상수가 사용될 때 진동에 관한 공식은 식(19)와 같다. 여기에 수정계수를 적용시키면 “정확한 해”는 다음과 같이 표시 될 수 있다.

$$(\omega_n)^2 = (\omega_n^{iso})^2 \cdot (FRC^2) \quad (20)$$

$$\text{여기서 } FRC^2(1) = \frac{[4(U_1 - U_3) + 2(U_1 - 3U_3)(e^2 - 1) + (U_1 - U_2 + U_3)(e^4 - 1)]}{U_1[4 + 2(e^2 - 1) + (e^4 - 1)]} \quad (21)$$

$$\text{또는 } FRC^2(2) = \frac{[D_1 + 2D_3 + D_2 + 2D_3(e^2 - 1) + D_2(e^4 - 1)]}{\left(\frac{h^3}{12}\right)U_1[4 + 2(e^2 - 1) + (e^4 - 1)]} \quad (22)$$

이고 $e = \frac{na}{mb}$ 이다.

만일 $e=1$ 이면

$$FRC^2(1) = \frac{U_1 - U_3}{U_1} \quad (23),$$

$$FRC^2(2) = \frac{D_1 + 2D_3 + D_2}{\left(\frac{h^3}{3}\right)U_1} \quad (24)$$

이다.

어떤 배향각을 갖는 적층복합판은 층수가 증가함에 따라, $B_{16}=B_{26} \rightarrow 0$ 이 되고, 이때 이 적층복합판은 특별직교 이방성 적층판의 공식으로 정확한 해가 구해질 수 있다.

예비 설계시에는 재료의 종류, 층수, 배향각 등이 결정되지 않았으므로 기술자들은 처음부터 난관에 봉착하게 된다. 이때 재료(보강재와 모재)만 결정하면 사용될 재료의 최소한의 강도를 나타내는(Kim, 1995, p.326) quasi-isotropic 상수, U_1, U_4 및 U_5 가 식(6) 및 (15)로부터 구해질 수 있다. 이 값으로 구조물 전체를 해석하면 각 단면에서의 부재 두께와 힘의 흐름을 얻을 수 있으므로, lamina 수와 섬유 배향각을 설계할 수 있게된다. 이때 새로운 A_{ij}, B_{ij} 및 D_{ij} stiffness 등으로 전체 구조물 해석을 다시할 필요없이, Q_{ij} 로 구한 값에 FRC를 곱하면 "정확한" 값을 얻을 수 있게 된다. 최초의 예비설계에서는 보강재의 배향각을 결정하지 않았으므로 FRC(1)을 사용하는 것이 편하고, 구조물의 일차 "정확한" 해석이 끝난 다음 각 단면의 '최종' 배향각을 설계하고 FRC(2)를 사용하여 설계의 정확성을 증가시킬 수 있다.

3 수치해석

3.1 대상구조물의 특성 및 형상

수치해석을 위해 고려한 $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$ 형 적층복합판의 형상은 그림 1과 같으며, 소재는 유리섬유와 에폭시가 사용되었다. 혼합법칙에 의한 "unidirectional lamina의 물성은 다음과 같다.

$$E_1 = 38.6\text{GPa}, E_2 = 8.27\text{GPa}, \nu_{12} = 0.26, \nu_{21} = 0.0557, G_{12} = 4.14\text{GPa}, t_0 = 0.000125\text{m}$$

식(6)에 의한 "reduced stiffness"는 다음과 같다.

$$Q_{11} = 39.167218 \text{ GPa}, Q_{12} = 2.181797 \text{ GPa}, Q_{22} = 8.391527 \text{ GPa}, Q_{66} = 4.14 \text{ GPa}$$

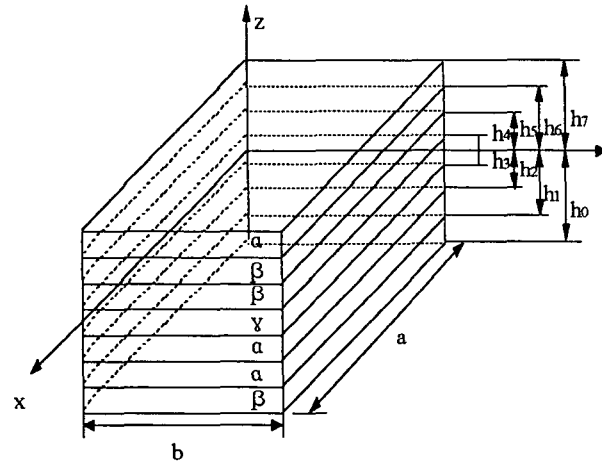


표 1. $[75/-75/-75/90/75/75/-75]_1$ 형태 적층판의 강성특성

r(N) stiffness	강성특성			
	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
B_{ij}	0	0	0	0
A_{11}^*/D_{11}^*	0.99368	0.99987	0.99997	0.99999
B_{16}^*/D_{11}^*	0	0	0	0
B_{26}^*/D_{11}^*	0	0	0	0
D_{16}^*/D_{11}^*	0	0	0	0
D_{26}^*/D_{11}^*	0	0	0	0

그림 1. $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$ 형태의 적층복합판

대표적으로 $\alpha=75^\circ, \beta=-75^\circ, \gamma=90^\circ$ 일 경우에는 $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$ 형태의 적층의 강성은 식 (4), (5) 및 (6)에 의하여 구할 수 있으며, 층수증가에 따른 "normalized" stiffness를 구하여 D_{11}^* 에 대한 비율을 계산하면 표

1과 같다. 여기서 r 은 1에 불과한데도 $A_{11}^*/D_{11}^* = 0.9968 \approx 1$ 이어서 이미 "normalized" A 및 D stiffness, $A^*=D^*$ 이므로 이 적층은 "quasi-homogeneous laminate"가 되어, 고전적 이론과 공식들이 사용될 수 있고(Kim, 1995, p.324) 이를 위해 "quasi-isotropic" 상수를 쓸 수 있다.

$[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$ 적층판의 배향각 변화에 따른 D_{ij} 값은 표(2)에 주어졌다.

표 2. $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$ 형태 적층판의 각도변화에 따른 휨강성 D_{ij}

Angle Case	α	β	γ	D_{11}	D_{22}	D_{12}	D_{66}
I	+45°	-45°	90°	0.954367	0.959376	0.492458	0.601778
II	+60°	-60°	90°	0.618756	1.480315	0.399794	0.509114
III	+75°	-75°	90°	0.490564	1.979162	0.214467	0.323787

3.1 형상비 증가에 따른 적층복합판의 고유진동수

고유진동수의 계산에는 김덕현의 방법이 사용되었는데, 이 방법은 다른 여러 발표문에 소개 되었으므로(1974, 1989) 이 논문에서는 설명하지 않는다. 표(1)에서 제시된 보강재 배향각을 갖고 형상비(b/a)가 1~6까지 증가할 때 $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$ 형태의 적층복합판의 고유진동수와 수정계수값이 표 (3) ~ 표(5)에 주어져 있다.

표 3. Case I에 대한 적층판의 고유진동수와 수정계수, $r(N)=1(7)$

Method	Aspect Ratio					
	1	2	3	4	5	6
ω_n^{Kim}	22.73391	13.46879	11.43812	10.67614	10.31165	10.11011
ω_n^{orth}	22.73389	13.46879	11.43811	10.67614	10.31165	10.11011
ω_n^{iso}	21.09101	13.18188	11.71723	11.20460	10.96733	10.83844
FRC(1)	0.91498	1.18570	1.28367	1.32462	1.34507	1.35659
FRC(2)	1.07790	1.02177	0.97618	0.95284	0.94022	0.93280
$\omega_n^{iso} FRC(1)$	22.73382	13.46876	11.43808	10.67611	10.31162	10.11006
$\omega_n^{orth} FRC(2)$	19.29787	15.62979	15.03988	14.84189	14.75185	14.70333
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{iso}$	1.07790	1.02177	0.97618	0.95284	0.94022	0.93280

표 4. Case II에 대한 적층판의 고유진동수와 수정계수, $r(N)=1(7)$

Method	Aspect Ratio					
	1	2	3	4	5	6
ω_n^{Kim}	21.92545	11.76218	9.63057	8.83752	8.45893	8.24970
ω_n^{orth}	21.92544	11.76218	9.63056	8.83752	8.45892	8.24969
ω_n^{iso}	21.09101	13.18188	11.71723	11.20460	10.96733	10.83844
FRC(1)	0.91498	1.18570	1.28357	1.32462	1.34507	1.35659
FRC(2)	1.03956	0.89229	0.82191	0.78874	0.77128	0.76115
$\omega_n^{iso} FRC(1)$	19.29787	15.62979	15.03988	14.84189	14.75185	14.70333
$\omega_n^{orth} FRC(2)$	21.92542	11.76213	9.63054	8.83751	8.45892	8.24968
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{iso}$	1.03956	0.89230	0.82192	0.78874	0.7712	0.76115

표 5. Case III에 대한 적층판의 고유진동수와 수정계수, $r(N)=1(7)$

Method	Aspect Ratio					
	1	2	3	4	5	6
ω_n^{Kim}	20.21175	10.09059	8.29612	7.68341	7.40348	7.25253
ω_n^{orth}	20.21174	10.09058	8.29612	7.68341	7.40348	7.25253
ω_n^{iso}	21.09101	13.18188	11.71723	11.20460	10.96733	10.83844
FRC(1)	0.91498	1.18570	1.28357	1.32462	1.34507	1.35656
FRC(2)	0.95831	0.76549	0.70803	0.68574	0.67505	0.66915
ω_n^{iso} FRC(1)	19.29787	15.62979	15.03988	14.84189	14.75185	14.70333
ω_n^{orth} FRC(2)	20.21164	10.09056	8.29610	7.68337	7.40347	7.25253
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{iso}$	0.95831	0.76549	0.70803	0.68574	0.67505	0.66915

4. 결 론

복합재료 적층판의 지배방정식은, 횡방향 전단변형률 ($\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$)이 무시될 수 있을 때도, 복잡한 세 개의 연립 편미분 방정식을 필요로 해서, 일반 건설기술자들에게는 너무 복잡하다. 그러나 B_{16} 와 B_{26} 강성이 작아지면 이를 복잡한 식은, 비교적 간단한 특별직교 이방성판의 지배 방정식으로 변환다. 여기에 유사동방성상수를 사용하면 이 방정식은 기술자들에게 낮은 등방성판의 4차 미분방정식으로 변환다. 구조물의 예비설계시 용력상태가 미지수이어서 섬유배향각을 결정할 수 없으면, 섬유와 모재등을 결정후 각각의 복합재료가 갖고 있는 최소한의 강도를 나타내는 유사동방성 상수를 사용하여 여러 가지 용력 및 변형을 구한 다음, 본 논문에 제시된 "수정계수"를 사용하여 "정확한"값을 구하고 정확한 섬유배향각을 설계하고 위의 "간단한" 과정을 다시 거치면 정확한 결과가 손쉽게 얻어지게 된다.

본 논문에 제시된 $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]$, 배향각을 갖는 적층판은, 건설 구조물에 많이 사용될 수 있는 특성을 갖고있으면서 $\alpha = -\beta, \gamma = 0^\circ$ 또는 90° 일 때 r 이 증가하면 $B_{16}=B_{26} \rightarrow 0, D_{16}=D_{26} \rightarrow 0$ 이되어 위에 설명한 간단한 방법으로 해석을 가능하게 한다.

본 논문에서 계산한 고유진동수는 김덕현의 방법으로 구해졌는데, 이 방법에 필요한 변위는 단순지지된 등방성판에 대한 "정확한"해로 알려진 Navier 해법을 특별직교이방성판의 지배방식에 적용하여 구했으므로, 고유진동수는 특별직교 이방성판의 해와 일치한다.

기술자들의 참고를 위해서 섬유배향각의 변화와 판두께 및 형상비 증가에 따른 여러 가지 데이터를 제공 했는데, 본논문에서 다른 배향각을 가진 적층판은 $r=1$ 일 때, 이미 $B_{16}=B_{26}=D_{16}=D_{26} \rightarrow 0$ 으로 됨을 알 수 있다.

참고문헌

1. Kim, D. H(1995), *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, London, England.
2. Kim, D. H(1995), "A Simple Method of Analysis for the Preliminary Design of Particular Composite Laminated Primary Structures for Civil Construction", *Journal of Material Processing Technology* 55, London, England, pp 242-248.
3. Kim, D. H(1974), "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Members," *Proceedings, International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites*, October, Seoul, Korea, pp1-2-1 ~ 1-2-38.
4. Kim, D. H(1989), et all, "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements", *1st Japan Int'l SAMPE Symposium*, Nov. 28~Dec. 1, pp 863~868.
5. Kim, D. H(1991), "Design of Composite Material Structures", *Proc of China-Japan-USA Trilateral Symposium/Workshop on Earthquake Engineering*, Nov.5~9, Harbin, China, pp 1-5-1~1-5-10.
6. Tsai, S. W(1988), *Composite Design*, 4th Ed., Think Composite, Dayton, Ohio, U.S.A.