

# 초기 비틀림이 있는 회전하는 복합재료 블레이드의 진동특성에 대한 연구

기영중\* · 김지환\*\*

## Vibration Characteristics of Rotating Composite Blades with Initial Twist

Young-Joong Kee\*, Ji-Hwan Kim\*\*

### ABSTRACT

Vibration analysis of rotating blade is the main purpose of the present study. In this study, general formulation is performed for rotating shell structures including the centrifugal force, Coriolis acceleration and initial twist. Furthermore, simplified equations are derived for the case of an open cylindrical shell. Based on the concept of degenerated shell element with the Reisser-Mindlin's assumptions, the finite element method is adopted for solving the problems. In addition, it is investigated the effect of the stacking sequence of the composites on the vibration characteristics of the blade. The results are summarized for the various parameters such as the speed of rotation and pre-twist of the blade. Also, present results are compared with the previous works and experimental data.

### 1. 서 론

터보 기계류에 사용되는 블레이드의 형상 설계 및 제작 기술의 진보를 통해 곡률과 아울러 비틀림을 갖는 셸의 형상을 띄고 있다. 따라서 이를 유한요소화 하는 과정도 기존의 보 또는 판 모델과는 다른 접근방법을 요구하게 된다.

Leissa[1] 등은 고전 셸 이론을 기초로 Ritz 방법을 이용하여 셸의 진동 특성에 대한 연구를 수행하였으며, Lee[2] 등은 두께가 변화하는 직사각형 투영면을 갖는 회전하는 얇은 셸에 대한 진동 특성을 조사하였다. 또한 Liew[3] 등은 초기 비틀림이 주어진 원뿔형의 셸에 대한 진동 특성을 연구하였다.

앞서 언급한 연구들에서 보인 바와 같이 셸 구조물에 대한 해석 방법은 다양하게 시도되었으며, 그 중에서 유한요소법을 적용한 연구가 활발히 수행되고 있다. 또한 Ahmad[4] 등은 특별한 가정 없이 임의의 셸 형상에 대한 해석을 가능케 하는 감절점 셸 유한 요소(degenerated shell

element)의 개념을 소개하였다. Haug 과 Hinton[5] 은 가정된 변형도(assumed strains)을 이용하여 shear-locking 이 발생하지 않는 개선된 감절점 유한요소를 제시하였으며, Zheng[6] 등은 원심력과 Coriolis 가속도의 영향이 고려된 회전축과 같은 원통형 셸에 대한 진동 해석을 수행하였다.

항공우주 기술의 발달과 더불어 경량의 복합재료가 구조부재로써 널리 사용되고 있으며, 많은 연구가 수행되고 있다. Lam[7] 등은 일차전단변형 이론을 기초로 하여 직교 적층된 회전하는 원통형 실린더의 진동특성에 대한 연구를 수행하였으며, Bhumbra[8] 등은 회전하는 복합재료 평판의 자유 진동 특성과 각 모드의 형상들에 대해 조사하였다.

본 연구에서는, Reisser-Mindlin 의 가정과 더불어 초기 비틀림과 회전으로 인한 원심력 및 Coriolis 가속도의 영향이 고려된 복합재료 셸 형상 블레이드의 진동특성에 대한 연구를 수행하였으며, 감절점 셸 유한요소를 이용하여 수치적인 결과를 구하였다. 또한 복합재료의 적층 변화에 따른 진동특성의 변화를 조사하였다. 수치적인 해석에 사용된 블레이드는 회전판의 반경에 대한 영향과 장차각

\* 서울대학교 기계항공공학부 항공우주공학전공

\*\* 교수, 서울대학교 기계항공공학부, 교신저자(E-mail: jwhkim@snu.ac.kr)

의 영향을 고려하기 위해 블레이드가 회전축으로부터 임의의 자리에 위치하도록 하였으며, 개방된 원통형 실린더 모델을 적용하였다. 또한, 본 연구의 해석결과를 기존의 유한요소법을 통한 결과 및 실험결과와 함께 비교하였다.

## 2. 이론

다음과 같은 기본적인 가정을 도입한다.

첫째, 변형전의 중립곡면에 대해 수직인 직선면은 변형 후에도 직선을 유지하나, 중립곡면에 대해 수직일 필요는 없다.

둘째, 쉘의 각각의 층에서 수직방향의 응력성분은 없고, 두께방향의 전단변형은 허용한다.

### 2.1 기하학적인 정의

Figure 1에 보인 바와 같이 요소내의 임의의 점 P에 대한 위치를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + z\mathbf{e}_3 \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{X}_0$ 는 중간곡면상의 점 O의 위치를 나타내며,  $\mathbf{e}_3$ 는 중간곡면에 대해 수직인 단위 벡터이다. 그리고, 두께방향으로 무차원화된 좌표계인  $\zeta$ 를 도입하면 식(1)은 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \zeta \left( \frac{h}{2} \right) \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

또한, 변형전의 직선요소  $\overline{OP}$ 는 변형 후  $\overline{OP'}$ 으로 변하며,  $z\mathbf{e}_3$ 는  $z\mathbf{e}'_3$ 으로 회전한다. 점 P에 대한 변위 벡터인  $\mathbf{U}$ 는 다음과 같다<sup>4)</sup>.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \zeta \mathbf{U}_c \quad (3)$$

본 연구에서는, 9절점 등매개변수 감결점 쉘 유한요소를 이용하며, 각 절점은 병진운동 성분인  $u, v, w$ 와 회전변위  $\alpha, \beta$ 의 5개의 자유도를 갖는다. 이를 이용하면 식(3)은 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \left( \mathbf{U}_0 + \zeta \frac{h}{2} [\mathbf{e}_{2i}, \mathbf{e}_{1i}] \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \right) \quad (4)$$

### 2.1 운동 방정식

변형율에 의한 에너지  $U$ 의 표현 식은 아래와 같다.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + U_C \right), \quad (i, j = x, y, z) \quad (8)$$

여기서  $n$ 은 적층수이며,  $U_C$ 는 원심력의 영향에

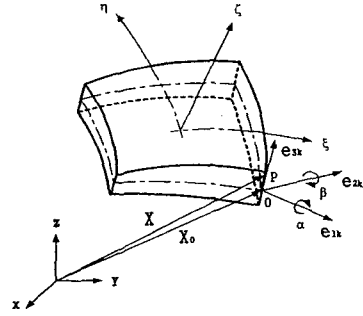


Figure. 1 Geometry and deformation of the degenerated shell element

의해 나타나는 항으로서 그 표현 식은 다음과 같다.

$$U_C = \frac{1}{2} \int_V (N_x^0 w_{,x}^2 + N_y^0 w_{,y}^2 + 2N_{xy}^0 w_{,x} w_{,y}) dV \quad (9)$$

본 연구에 적용된 블레이드의 형상이 Fig. 2에 나타나 있다. 블레이드 임의의 점에서의 속도 벡터에 대한 표현은 아래와 같이 표현되며,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (10)$$

이에 대한 운동에너지의 표현 식은 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (11)$$

또한, 아래의 Hamilton의 원리를 통해 회전하는 블레이드에 대한 지배 방정식을 유도하였으며,

$$\delta \int (T - U) dV = 0 \quad (12)$$

그 결과는 다음과 같이 표현된다.

$$[\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{d}}\} + ([\mathbf{K}_L] + [\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_{CF}]) \{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}_F\} \quad (13)$$

$[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ 는 질량행렬과 감쇠행렬이고,  $[\mathbf{K}_L]$ ,  $[\mathbf{K}_G]$ ,  $[\mathbf{K}_{CF}]$ 는 선형 강성행렬, 기하학적 강성행렬, 원심력에 의한 강성행렬을 나타내며,  $\{\mathbf{F}_F\}$ 는 원심력에 의한 하중벡터이다.

동적인 해석을 위해 식(13)를 시간에 대해 독립인 정적인 해와 시간에 대해 종속적인 동적 부분으로 나누게 되면 다음과 같이 표현된다.

$$\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{d}_s\} + \{\delta(t)\} \quad (14)$$

식(14)를 이용함으로써 아래와 같은 최종적인 형태의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$[\mathbf{M}] \{\delta\} + [\mathbf{K}_G] \{\delta\} + ([\mathbf{K}_L] + [\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_{CF}]) \{\delta\} = \{0\}$$

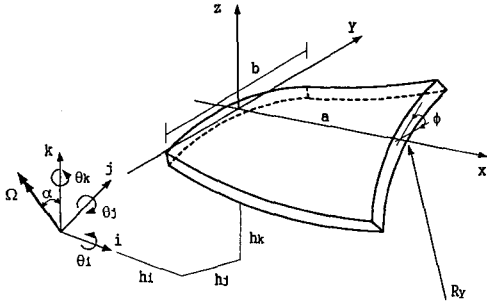


Figure. 2 Rotating blade with the offsets from a reference frame

### 3. 결과 및 검토

#### 3.1 초기 비틀림의 영향

본 연구에서 사용한 코드의 검증은 위하여 정지된 상태에서 초기 비틀림  $\phi$  을 갖는 빔, 평판 및 개방형 원통 실린더에 대한 고유진동수의 변화를 Table. 1 에 정리하였다. 사용된 기호 1B, 2B, 1EB, 1CB 는 굽힘 거동을 의미하며, 1T 는 비틀림을 나타낸다. 쉘 이론을 통한 고유진동수의 값이 다른 이론들을 통한 결과보다 큰 것을 볼 수 있으며, 초기 비틀림각이 증가할수록 굽힘 거동에 대한 진동수는 감소하는 반면, 비틀림에 대한 진동수는 증가함을 볼 수 있다.

Table. 1 Comparison with the frequency parameter ( $\lambda$ ) of the shell, plate and beam theories,  $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

$\phi$	Mode	Shell Present	Plate Present	Plate [9]	Beam [9]
0°	1B	5.26	3.49	3.46	3.35
	2B	25.07	22.01	21.44	20.73
	1T	8.61	8.51	8.53	6.43
	1EB	43.84	43.62	46.14	42.17
	1CB	28.46	27.33	27.05	-
30°	1B	4.24	3.42	3.41	3.32
	2B	23.44	19.51	18.88	18.21
	1T	13.69	14.43	16.88	15.42
	1EB	47.48	47.48	49.60	45.56
	1CB	27.23	27.41	27.98	-
45°	1B	4.01	3.35	3.36	3.29
	2B	15.77	17.22	16.51	16.19
	1T	22.51	20.45	22.31	21.99
	1EB	49.74	49.74	54.00	45.56
	1CB	27.83	28.76	30.40	-

#### 3.2 회전 속도의 영향

회전하는 블레이드의 물성치는 아래와 같고, 참고문헌 [1]과 비교하여 그 결과를 Table. 2 에 나타내었다.

$$E=200\text{GPa}, a=b=30.5\text{cm}, R_y=2a$$

$\nu=0.3, \rho=7,860\text{Kg/m}^3, a/t=100, \Omega=\omega/\omega_0$   
회전 속도가 증가할수록 각 모드별로 진동수가 증가함을 볼 수 있으며, 참고 문헌과 비교할 때 비교적 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다.

Table. 2 Comparison with the frequencies of the blades (Hz)

Mode	$\Omega=0.0$		$\Omega=1.0$	
	Exp. [1]	Present	Anal. [1]	Present
1	85.94	85.34	150.98	150.61
2	137.8	139.48	170.28	170.61
3	248.6	251.81	301.94	340.46
4	342.9	347.77	418.24	410.67
5	387.4	391.63	463.48	456.23

Figure. 3 은 초기 비틀림과 회전이 있는 블레이드의 최저차 모드에 대한 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 앞 절에서 살펴본 정지상태에서의 결과와는 달리 회전 속도와 초기 비틀림각이 증가할수록 진동수의 증가함을 볼 수 있으며, 이는 원심력으로 인한 블레이드의 강성증대로 판단된다.

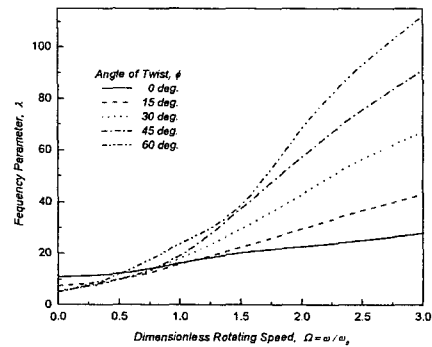


Figure. 3 The variations of frequency as a function of rotating speed and angle of twist

#### 3.3 복합재료 개방형 블레이드

진동 해석을 위한 복합재료 블레이드는 중립곡면이 두께방향의 기하학적인 중성에 위치하며, 이에 대해 대칭으로 적층된 것으로 국한한다. 복합재료는 Graphite/Epoxy 로써 물성치는 아래와 같다.

$$E_{11}=98.0\text{GPa}, E_{22}=98.0\text{GPa}, G_{12}=G_{23}=5.6\text{GPa}$$

$$\nu=0.28, \rho=1,520\text{Kg/m}^3, \text{Lamina thickness } t=a/8$$

Figure.4 는 적층각이 다른 복합재료 블레이드의 초기 비틀림각 변화에 따른 최저차 모드의 진동수 변화이며, 초기 비틀림 각이 증가할수록 그 값이 감소함을 볼 수 있다.

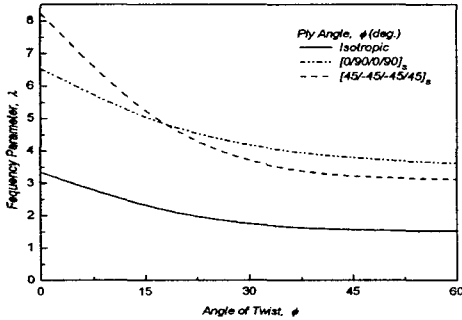


Figure. 4 The variation of fundamental frequency of the composite blade

Figure. 5 는 회전속도가 증가할수록 원심력으로 인한 강성증대로 진동수의 값이 증가함을 볼 수 있으며, 초기 비틀림이 있는 경우의 진동수가 더 높음을 알 수 있다. 또한 복합재료를 사용함으로써 적층각의 변화에 따라 블레이드의 강성이 변화하여 고유진동수가 증가함을 알 수 있다.

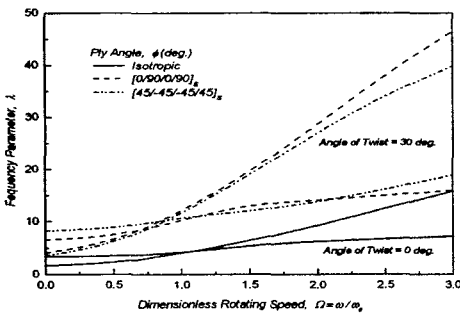


Figure. 5 The effect of stacking sequence upon the initially twisted blade

#### 4. 결 론

본 연구에서는 초기 비틀림을 갖는 회전하는 복합재료 블레이드의 진동 특성을 감절점 셀 유한요소를 이용하여 조사하였다. 블레이드의 회전으로 인한 원심력과 Corioli 가속도의 영향이 포함되었으며, 원심력에 의해 발생하는 부가적인 기하학적 강성행렬의 영향도 함께 고려하였다. 블레이드의 회전 속도가 증가할수록 원심력의 증대로 인한

블레이드의 강성증대로 고유진동수의 값이 증가하였으며, 초기 비틀림각이 커질수록 고유진동수가 증가하였다. 또한 최적설계를 고려할 경우, 설계된 블레이드의 형상을 변화시키지 않고 사용된 복합재료의 적층각을 적절히 조절하여 블레이드의 강성을 변화시킴으로써 원하는 진동 특성을 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

#### 후 기

본 연구는 Brain Korea 21 의 지원에 의해 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- [1] A.W. Leissa, J.K. Lee & A.J. Wang. (1982) Rotating blade vibration analysis using shells. *Journal of Engineering for Power*, 104, 296-302.
- [2] J. K. Lee, A.W. Leissa & A.J. Wang. (1984) Vibrations of blades with variable thickness and curvature by shell theory. *Journal of Engineering for Power*, 106, 11-16.
- [3] K.M. Liew, M.K. Lim, C.W. Lim, D.B. Li & Y.R. Zhang. (1995) Effects of initial twist and thickness variation on the vibration behavior of shallow conical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 180(2), 271-296.
- [4] Sohrabuddin Ahmad, Bruce M. Irons & O.C. Zienkiewicz. (1970) Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 419-451.
- [5] H.C. Huang & E. Hinton. (1986) A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22, 73-92.
- [6] Z.C. Zheng. (2001) The influence of rotation on vibration of a thick cylindrical shell, *Journal of Sound and Vibration*, 242 (3), 487-505.
- [7] K.Y. Lam & Wu Qian, Vibration of thick rotating laminated composite cylindrical shells, 1999, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.225 (3), 483-501.
- [8] R. Bhumbla, J.B. Kosmatka & J.N. Reddy. Free vibration behavior of spinning shear deformable plates composed of composite materials, 1990, *AIAA Journal*, Vol.28 (11), 1962-1970.
- [9] S. Mohamad Nabi & N. Ganesan. Comparison of beam and plate theories for free vibrations of metal matrix composite pre-twisted blades, 1996, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.189 (2), 149-160.