

덕트 내 모드 분석을 위한 센서 배치에 관한 연구

정원태, 이수갑

서울대학교 기계항공공학부 공력소음실험실

Configuration of sensor array for in-duct mode detection

W. Jeong, S. Lee

Aeroacoustics and Noise control Laboratory, Seoul National University

wontae@snu.ac.kr, solee@plaza.snu.ac.kr

요약

터보팬엔진등에서 발생하는 음장의 특징은 지배적인 음향모드 구조를 가진다는 점이다. 이러한 구조를 파악해내는 것은 소음원을 찾아내고 그 소음원의 전파를 규명하여 소음을 저감하는데 중요한 기여를 할 수 있다. 음향모드의 검출을 위해서 많은 연구가 이루어져 왔으며 센서의 이용방식에 따라 원음장에서의 측정법, 회전형 갈퀴 (rotating rake)를 이용한 측정법, 덕트내 벽면에 센서를 분포시키는 측정법으로 나눌 수 있다. 이중 벽면에 센서를 위치시키는 방법은 다른 방법에 비해 빠르게 측정결과를 얻을 수 있으며 측정장치가 간단하다는 장점이 있다. 본 연구에서는 기존에 이 방법의 단점으로 여겨져 왔던 많은 수의 센서를 줄이는 새로운 센서 배치에 대해 기술하였으며 측정하고자 하는 주파수에 존재하는 전체 모드의 개수와 비교하여 최소한의 센서 개수를 설명하였다.

1. 서론

터보팬엔진등의 엔진에서 발생하는 음장의 특징은 지

배적인 음향모드 구조를 가진다는 점이다. 이러한 구조를 파악해내는 것은 소음원을 찾아내고 그 소음원의 전파를 규명하여 소음을 저감하는데 중요한 기여를 할 수 있다. 음향모드의 검출을 위해서 많은 연구가 이루어져 왔으며 센서의 이용방식에 따라 원음장에서의 측정법 [1,2,3,4], 회전형 갈퀴 (rotating rake)를 이용한 측정법 [6,7,8,9], 덕트내 벽면에 센서를 분포시키는 측정법 [10,12,13,15]으로 나눌 수 있다. 이중 벽면에 센서를 위치시키는 방법은 다른 방법에 비해 빠르게 측정결과를 얻을 수 있으며 측정장치가 간단하다는 장점이 있다 반면 많은 수의 센서를 요구한다는 단점으로 인해 많이 이용되지 못했다. 본 연구에서는 벽면에 위치시킨 센서가 충분히 작은 오차로 모드를 분석할 수 있는 한계를 밝히고, 보다 나은 센서의 배치를 소개하고자 한다.

2. 본론

2.1 링형 센서배치를 이용한 덕트 내 모드 분석

주파수가 주어진 경우에 대해서 반사를 고려하지 않으면 입사하는 모드는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p_{mn}^+ = e^{i\omega t} a_{mn} \Psi_{mn} e^{-i\alpha_{mn}kz} \quad (1)$$

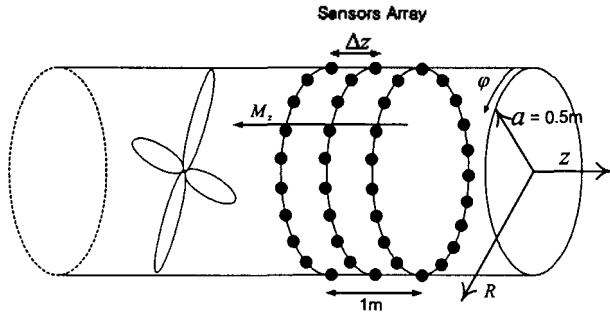


그림 1 덕트모드 검출을 위한 센서의 링형 배치

여기서 a_{mn} 은 모드의 크기이며, k 는 파수 ω/c 이다. c 는 덕트내에서의 음속이며, ω 는 주파수에 해당한다. κ_{mn} 은 고정벽면조건 $J'(\kappa_{mn}a) = 0$ 을 만족시키는 모드에 해당하는 고유값(eigenvalue)이다. 여기서 J_m 는 제 1종 m 차 베셀함수를 나타내고 함수에 붙은 프라임값은 미분치임을 나타내는 것이다 그리고 a 는 덕트의 반지름을 Ψ_{mn} 은 정규화된 모드형상함수이다.

$$\Psi_{mn} = J_m(\kappa_{mn}r)e^{im\phi} / N_{mn} \quad (2)$$

벽면에 부착된 센서로부터 얻어낸 음압의 벡터를 다음과 같이 나타낸다.

$$\hat{\mathbf{p}}^T = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_M] \quad (3)$$

음압을 형성하는 각각의 모드의 강도 벡터는

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_N] \quad (4)$$

로 표시하면 둘 사이의 관계는 모드전달함수 \mathbf{G} 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e} \quad (5)$$

얻어진 음압벡터로 모드의 강도를 계산하면

$$\hat{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{G}^+ \hat{\mathbf{p}} \quad (6)$$

와 같고 \mathbf{G} 의 가상역행렬은 $\mathbf{G}^+ = [\mathbf{G}^H \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^H$ 으로 표현된다.

수치적인 모델의 덕트는 강제경계 조건을 만족하며 양쪽 경계에서의 반사를 무시하고 균일속도를 가지는 유동을 포함하는 것으로 가정한다. 실제상황에서 센서부착을 위한 공간이 한정되어 있다는 것을 감안하여 센서부착부의 길이를 제한하였다. 센서의 배치는 1) 링형태로 여러 개를 배치하는 것과 2) 기울어진 형태로 배치하는 것 두 가지 방법을 시도하였다. 모드의 강도는 균일한 강도를 가지도록 조정하였으며, 각각의 위상은 랜덤하게 주었으며 100 번 이상의 시행을 통해 평균을 취한 값을 평가에 사용하였다.

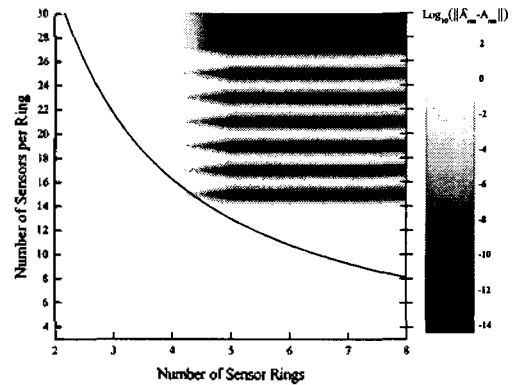


그림 2 $ka=15, M=0.3$ 일때 센서배치에 따른 오차

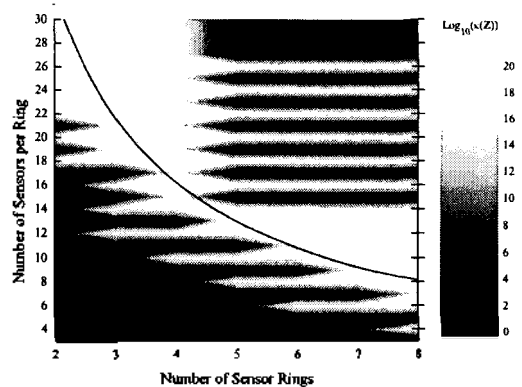


그림 3 $ka=15, M=0.3$ 일때 센서배치에 따른 condition number

각각의 센서배치에 따른 모드 검출을 평가하기 위하여 error norm 과 condition number 를 기준을 정하였다.

$$\text{Error norm: } \left\| A_{mn} - \hat{A}_{mn} \right\|_2$$

$$\text{Condition number: } \kappa(\mathbf{G}) = \left\| \mathbf{G} \right\| \left\| \mathbf{G}^{-1} \right\|$$

이러한 두개의 척도에 대한 결과가 그림 2 와 3 에 나타나 있다. 주어진 주파수와 자유류흐름 속도에 의해 결정되는 전과가능한 모드의 개수를 N 이라 하고, 원주방향의 최대 모드차수를 m_{\max} , 반지름 방향의 최대 모드 차수를 라 할 때 n_{\max} 라고 하면, Nyquist theorem 과 관련된 $2m_{\max} + 1$ 개 이상의 원주 방향의 센서갯수에서는 낮은 condition number 와 error norm 을 보이는 것을 쉽게 이해할 수 있다. 반면 그 아래의 영역에서 홀수 개의 원주 방향 센서갯수에서 좋은 결과를 보이는 것은 단순한 원주방향의 aliasing condition 에 기반하여 설명하기 어려운 점이 있다.

원주 방향의 두 개의 모드 m_1, m_2 의 aliasing condition 은 다음과 같다.

$$m_1 - m_2 = N_{s/r} \quad (7)$$

여기서 $N_{s/r}$ 은 하나의 링에 들어있는 센서의 개수이다. $N_{s/r}$ 이 $2m_{\max} + 1$ 보가 커지면 aliasing 이 발생하지 않게 된다.

$$m_1 - m_2 \leq |m_1| + |m_2| < 2m_{\max} + 1 \quad (8)$$

원형덕트 축방향을 따라서도 모드의 정보를 얻을 수 있는데 축방향의 Fourier Transform 을 통해서 공간의 주파수인 $\alpha_{mn} k$ 를 구별할 수 있는 것이다.

이렇게 원주 방향과 축방향을 통해서 얻을 수 있는 정보인 m, α_{mn} 은 각각 discrete 한 값이며 동시에 두 값이 다음의 식에 의해 구속되어 있다.

$$\alpha_{mn} = \sqrt{1 - (\kappa_{mn} / k)^2 (1 - M_z^2)} \quad (9)$$

(6)식에 의한 모드 강도의 계산에서 원주방향과 축방향의 모드 정보가 모두 포함되게 되고 중복된 정보가 들어가는 경우가 발생하게 된다. 이러한 모드의

검출에서 문제가 되는 것은 양방향 모두에서 aliasing 이 생겨서 모드를 구분하지 못하게 되는 경우이다. 두개의 모드 $(m_1, n_1), (m_2, n_1)$ 가 $m_1 = -m_2$ 의 관계가 성립할 때 $\alpha_{m_1 n_1} = \alpha_{m_2 n_1}$ 가 되므로 축 방향으로의 모드

구분이 불가능해진다. 이 경우에는 원주방향으로 두 개의 모드의 구별이 가능해야만 하는데 이 조건이 성립하지 않는 경우가 $N_{s/r} = 2m_1$ 이다. 그림 2,3 에서 원주방향의 센서의 개수가 짝수가 될 때 나쁜 결과가 나오는 것을 설명할 수 있을 것이다.

2.2 변형된 센서 배치

링형배치의 경우 원주상으로 음압을 측정하는 위치가 하나의 링에 들어있는 센서의 개수와 같고 축상으로 음압을 측정하는 위치가 링의 개수와 같아서 측정하는 센서의 개수에 비해서 실제로 얻을 수 있는 정보가 한정되어 있다고 볼 수 있다. 이러한 맹점을 보완하기 위하여 링형의 배치를 축방향으로, 원주방향으로 변형시킴으로써 좀 더 나은 결과를 기대할 수 있다. 원주방향과 축방향의 변형을 위한 파라미터로 $\Delta\phi, \Delta s$ 로 정의하고 i 번째 센서링의 j 번째 센서의 위치를 다음과 같이 정의한다.

$$z_{ij} = (i-1)\Delta d + (j-1)(i-1)\Delta s \quad (10)$$

$$\theta_{ij} = (j-1)\Delta\theta + (i-1)\Delta\phi \quad (11)$$

$Ka=20, Mz=-0.3$ 에 대하여 새로운 센서배치를 적용한 결과는 표 1 에 도시되어 있으며, 보다 나은 condition number 와 error norm 을 보여주는 것을 확인할 수 있다.

표 1 새로운 센서배치와 링형 센서배치의 효과

	Original Configuration	New configuration
Condition number	2.64e+17	5.90e+04
Error norm	1.31e+00	4.28e-11

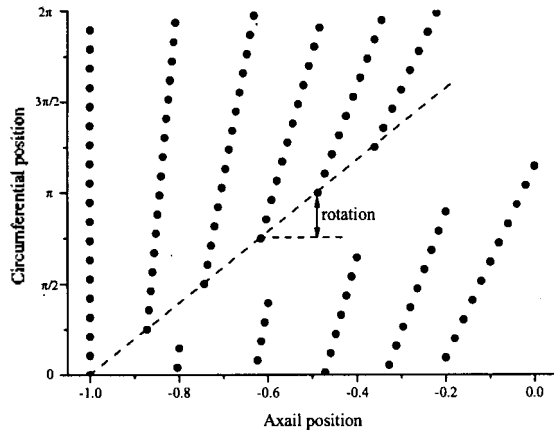


그림 4 원래의 배치에서 변형된 센서의 배치의 예시

3. 결론

덕트내 센서의 배치를 통한 음장모드분석에 관련하여 기존의 링형 센서배치에 대하여 condition number와 error norm을 이용하여 분석하였고, Nyquist theorem을 이용하여 예측할 수 있는 한계 이하의 센서에서도 좋은 결과를 얻을 수 있음을 보였으며, 보다 적은 수의 센서에서도 효과적인 모드의 검출을 할 수 있는 센서의 배치를 소개하였다.

참고문헌

- 1 Pickett G.F., Sofrin T. G., and Wells R. A., "Method of Fan Sound Mode Structure Determination. Final Report," NASA CR-135293, Aug. 1977.
2. F. Farassat, and M. K. Myers, "A Study of Wave Propagation in a Duct and Mode Radiation," 2nd AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, AIAA Paper 96-1677, May 1996.
3. F. Farassat, Douglas M. Nark, and Russell H. Thomas, "The Detection of Radiated Modes from Ducted Fan Engines," 7th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, AIAA Paper 2001-2138, May 2001.
4. R. H. Thomas, F. Farassat, L. R. Clark, C. H. Gerhold, J. J. Kelly, and L. E. Becker, "A Mode Detection Method Using

the Azimuthal Directivity of a Turbofan Model," AIAA Paper 99-1954, 1999.

5. Serge Lewy, "Inverse Method Predicting Spinning Modes Radiated by a Ducted Fan from Free-field Measurements", The 18th International Congress on Acoustics ICA 2004 , Kyoto, Japan, April 2004.
6. Laurence J. Heidelberg, David G. Hall, James E. Bridges, and M. Nallasamy, "A Unique Ducted Fan Test Bed for Active Noise Control and Aeroacoustics Research ,," NASA Technical Memorandum 107213, AIAA Paper 96-1740.
7. Laurence J. Heidelberg, and David. G. Hall, "Inlet Acoustic Mode Measurements Using a Continuously Rotating Rake," *Journal of Aircraft*, Vol. 32, No.4, 1995, pp. 761-767.
8. Laurence J. Heidelberg, Daniel L. Sutliff, and M. Nallasamy, "Azimuthal Directivity of Fan Tones Containing Multiple Modes," 35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, AIAA Paper 97-1587, Jan. 1997.
9. Daniel Sutliff, James Bridges, and Edmane Envia, "Comparison of Predicted Low Speed Fan Rotor/stator Interaction Modes to Measured," 3rd AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, AIAA-97-1609.
10. M. J. Fisher, P. Joseph, and P. A. Nelson, "Method and Apparatus for the Active Control of Sound Radiated from Flow Ducts," UK Patent WO9735300, 1997.
11. M. Abom, "Modal Decomposition in Ducts Based on Transfer Function Measurements between Microphone Pairs," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 135, Issue 1, 1989, pp. 95-114.
12. E. J. Kerschen, and J.P. Johnston, "A Modal Separation Measurements Technique for Broadband Noise Propagating Inside Circular Ducts," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 76, Issue 4, 1981, pp. 499-515.
13. P. Joseph, P. A. Nelson, and M. J. Fisher, "Active Control of Fan Tones Radiated from Turbofan Engines. II. In-duct Error Sensors," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 106, August 1999, pp. 779-786.