

하이브리드 구조 5축 공작기계의 기구식 수립을 위한 변수 설정 Proper Choice of Unknown Variables for Kinematic Analysis of a 5-DOF Hybrid Machine Tool

*고동주¹, #김태정¹

*Dongju Ko¹, #Taejung Kim(taejungkim@dankook.ac.kr)²

¹ 단국대학교 기계공학과

Key words : Forward Kinematics, Inverse Kinematics, Parallel Machine Tool, Hybrid Machine Tool, 5 Axis Machine Tool

1. 서론

제작상의 문제로 발생하는 기계운동의 오차를 그 요인에 대한 기구학적 고려를 통해 보정함으로써 기계의 정밀도를 효율적으로 향상시킬 수 있다. 기구 오차의 요인은 크게 계통오차(systematic error)와 우연오차(accident error)로 나뉘는데, 우연오차는 그 특성상 보정이 어렵다. 기구의 계통오차를 줄이는 일반적인 방법을 정리하면 다음과 같다.(Fig. 1 참조)

1. 기준 공구 경로를 선택하여 경로 상의 점들의 배열 \mathbf{p}_k ($k=1, 2, \dots$)을 추출한다.
2. 제작 오차로 이루어진 오차 파라미터 $\mathbf{E}=(e_1, e_2, \dots)$ 를 0으로 설정한다.
3. 대상기계의 역기구식을 풀어, 추출한 \mathbf{p}_k 에 해당하는 액츄에이터 변위 \mathbf{q}_k 를 구한다.
4. 단계 3에서 계산한 \mathbf{q}_k 를 적용한 정기구식을 풀어 공구자세의 배열 $\mathbf{p}_{i, theory, k}(\mathbf{E})$ 를 결정한다.
5. $\mathbf{p}_{i, theory, k}(\mathbf{E})$ 와 측정에 의한 공구자세 $\mathbf{p}_{measure, k}$ 로 계산되는 비용함수(cost function)를 다음과 같이 계산한다.

$$C(\mathbf{E}) = \sum_k \|\mathbf{p}_{i, theory, k}(\mathbf{E}) - \mathbf{p}_{measure, k}\|^2$$

6. 비용함수 $C(\mathbf{E})$ 를 감소시키도록 오차 파라미터 \mathbf{E} 값을 설정하고, 단계 3에서 단계 6까지의 과정을 비용함수 $C(\mathbf{E})$ 가 최소가 될 때까지 반복한다.

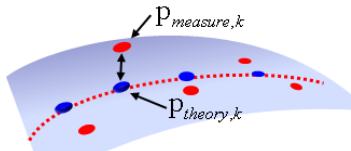


Fig. 1 Definition of the Cost function

위와 같이 비용함수 $C(\mathbf{E})$ 가 최소가 되도록 오차파라미터 \mathbf{E} 의 값을 결정하여 제어기에 그 값을 설정함으로써 기구학적 계통오차를 감소시킬 수 있다. 이 때, 기준 공구 자세 \mathbf{p}_k 로부터 액츄에이터 변위 \mathbf{q}_k 를 결정하기 위해 역기구식이 사용되며, \mathbf{q}_k 로부터 오차를 고려한 자세 $\mathbf{p}_{i, theory, k}(\mathbf{E})$ 를 결정하기 위해 정기구식이 사용되므로, 정기구식과 역기구식의 효율적인 계산이 기계의 제어와 정밀도 측면에서 모두 중요하다. 일반적으로 직렬기구의 역기구식(Inverse Kinematics)과 병렬기구의 정기구식(Forward Kinematics)을 닫힌꼴(closed form)로 표현하는 것이 어려운 것으로 알려져 있으며, 기존의 많은 연구가 수치해법을 사용하였다.[1]

직렬구조는 운동능력이 뛰어나고 작업영역 확보가 용이하여 이미 많은 공작기계에 적용되었으며, 병렬구조의 높은 강성유지능력을 공작기계에 적용하려는 연구도 보고된 바 있다. 근래에는 두 구조가 혼합된 하이브리드 구조를 통해 각 구조의 장점을 취합하려는 연구가 진행 중이다.[2]

본 논문에서는 과구속(over-constrained)조건을 포함한 하이브리드 구조 공작기계의 한 사례를 소개하며, 오차보정을 위하여 과구속 조건을 효율적으로 다루고 수치해법에 활용될 수 있는 형태의 기구학적 관계식을 수립하는 방법을 보인다.

2. 역기구식 수립을 위한 변수 설정

Fig. 2에 대상기계의 형상과 대상기계를 정면에서 바라본 모식

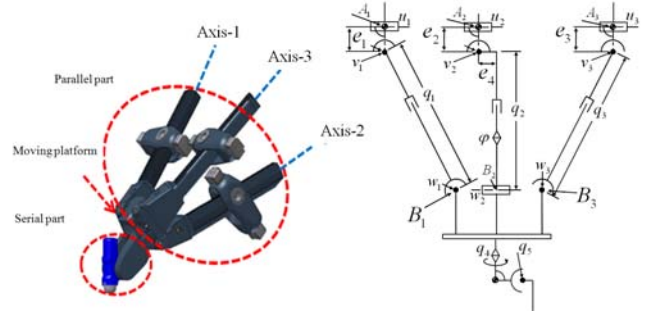


Fig. 2 A Hybrid Machine Tool

도를 나타내었다. Fig. 2에 보인 바와 같이 대상기계는 무빙플랫폼(moving platform)을 기준으로 직렬부(serial part)와 병렬부(parallel part)로 나뉜다. 직렬부는 두 개의 회전 액츄에이터로 구동된다. 병렬부는 axis-2를 기준으로 axis-1과 axis-3가 좌우대칭인 구조를 이루며, 각 축에 선형 액츄에이터가 부착되어 있다.

과구속(over-constrained)된 대상기계의 병렬부가 3자유도로 구동하기 위해서 'axis-1—moving platform—axis-3'의 기구적 연쇄가 한 평면상에 존재하도록 과구속을 포함하여 기계가 설계되어 있다. 이 과구속조건을 효율적으로 다루면서 역기구 해석을 수행하기 위해 Fig. 3에 보인 변수들을 사용하여 독립변수를 다음과 같이 설정한다.

$$\mathbf{X} = [u_2, v_2, q_2, \varphi, w_2, q_4, q_5]^T$$

선택된 미지수의 조합 \mathbf{X} 는 axis-2와 직렬부의 관절변수들로 이루어져 있다. axis-1, 3을 제거한 상태에서 axis-2와 직렬부로 이루어진 기구적 연쇄를 7자유도 직렬기구로 간주할 수 있다.

공구의 위치벡터 \mathbf{r}_{given} 과 공구의 방향벡터 \mathbf{t}_{given} 이 주어진 상태에서 독립변수 \mathbf{X} 를 사용하여 다음과 같은 기구학적 관계를 유도할 수 있다.

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}, \mathbf{E}) = \mathbf{r}_{given} \tag{1}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, \mathbf{E}) = \mathbf{t}_{given} \tag{2}$$

이 때 $\mathbf{r}(\mathbf{X}, \mathbf{E})$ 와 $\mathbf{t}(\mathbf{X}, \mathbf{E})$ 는 오차파라미터 \mathbf{E} 가 주어진 상태에서 axis-2와 직렬부로 구성된, 앞서 언급한 7자유도 직렬기구의 정기구식이다. 직렬기구의 정기구식을 유도하는 것은 간단한 것으로 알려져 있다. Fig. 4의 우측에 정기구식, $\mathbf{r}(\mathbf{X}, \mathbf{E})$ 과 $\mathbf{t}(\mathbf{X}, \mathbf{E})$ 를 계산하는 경로를 도식적으로 표현하고 있다. 한편, axis-1과 axis-3에 의한 무빙플랫폼의 과구속조건을 완화하여 표현하면 다음과 같다.

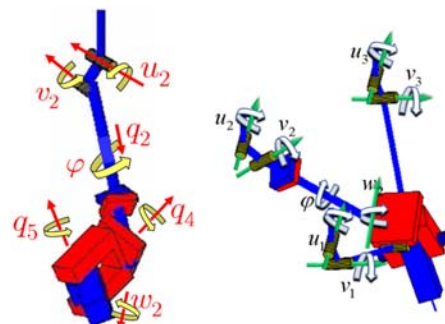


Fig. 3 Independent variables

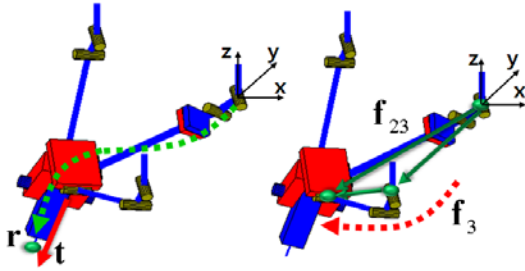


Fig. 4 Simultaneous equations for kinematic analysis

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{X}, \mathbf{E}) \cdot [\mathbf{r}_0(\mathbf{X}, \mathbf{E}) - \mathbf{a}] &= 0 & (3) \\ \mathbf{j}(\mathbf{X}, \mathbf{E}) \cdot \mathbf{I} &= 0 & (4) \end{aligned}$$

여기서, Fig. 5에 보인 바와 같이 \mathbf{j} 는 무빙플랫폼 위에 고정된 단위벡터, \mathbf{r}_0 는 무빙플랫폼 중앙에 고정된 위치벡터, \mathbf{I} 는 axis-1과 axis-3의 공통회전축 방향의 단위벡터, \mathbf{a} 는 공통회전 축 상의 한 점의 위치벡터이다.

위의 방정식 (1-4)를 $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ 꼴의 비선형 연립방정식으로 구성할 수 있다. 미지수 \mathbf{X} 를 결정하여 무빙플랫폼의 자세가 정해지면 axis-1과 axis-3 상의 관절변수는 쉽게 구할 수 있다. 주어진 공구의 방향벡터 \mathbf{t}_{given} 로부터 설정한 식(2)는 $\|\mathbf{t}\| = 1$ 의 구속조건에 의하여 3개의 식 중에서 2개만이 독립이다. 이와 같은 방정식의 중속성을 고려하여 역기구 해석을 위하여는 다음과 같이 변형된 Newton의 방법을 사용하는 것이 효율적이다.[3]

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - [(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{F}]_{\mathbf{X}_n} \quad (5)$$

위 식에서 $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X})$ 는 방정식 (1-4)를 표현하는 사상이며, $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{X})$ 는 사상 \mathbf{F} 의 자코비 행렬이다.

직렬로봇의 자코비 행렬 \mathbf{J} 를 구하는 것이 기구학적 고려를 통하여 효율적으로 수행될 수 있음이 잘 알려져 있다. Fig. 3에 표현된 7자유도 직렬기구의 자코비 행렬의 계산이 용이하므로, 위와 같이 구성된 방정식의 수치해를 식 (5)를 사용하여 효율적으로 구할 수 있다. 예를 들어, \mathbf{J} 의 첫 번째 열을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}_{u_2}) \\ \mathbf{u}_2 \times \mathbf{t} \\ (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) + \mathbf{j} \cdot [\mathbf{u}_2 \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{a})] \\ (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

이 때, \mathbf{u}_2 은 회전관절 u_2 의 회전축 방향의 단위벡터이고, \mathbf{p}_{u_2} 는 해당 회전축 상의 한 점의 위치벡터이다.

3. 정기구식 수립을 위한 변수 설정

병렬부의 정기구 해석이 일단 완료되면 직렬부의 정기구 해석을 수행하는 것은 간단한 문제이다. 아래에 과구속을 포함한 병렬부의 정기구 해석을 보인다.

정기구 해석을 위하여는 Fig. 3의 우측에 표현된 변수들을 미지수로 설정한다.

$$\mathbf{Y} = [u_1, v_1, u_2, v_2, \varphi, w_2, u_3, v_3]^T$$

무빙플랫폼이 axis-1, axis-2, axis-3의 종단부에 모두 접해 있으므로 각 축 상의 관절변수들을 조합하여 무빙플랫폼의 자세를 각기 결정할 수 있다. Fig. 2에 표현된 무빙플랫폼에 고정된 특정 점 B_1, B_3 의 위치를 고려하여 아래 형태의 기구학적 관계를 유도할 수 있다.

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{Y}, \mathbf{E}) = \mathbf{f}_{21}(\mathbf{Y}, \mathbf{E}) - \mathbf{f}_1(\mathbf{Y}, \mathbf{E}) = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{Y}, \mathbf{E}) = \mathbf{f}_{23}(\mathbf{Y}, \mathbf{E}) - \mathbf{f}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{E}) = 0 \quad (7)$$

여기서 $\mathbf{f}_{2k}(\mathbf{Y}, \mathbf{E})$, ($k=1, 3$)는 회전관절 w_k 축 상의 한 점 B_k 의 위치벡터를 axis-2 상의 관절변수로 표현한 함수로, axis-2를 직렬기구로 간주하여 수립한 정기구식이며, $\mathbf{f}_k(\mathbf{Y}, \mathbf{E})$ 은 axis- k 를 직렬기구로 간주하여 표현한 점 B_k 의 위치벡터이다. Fig. 4의

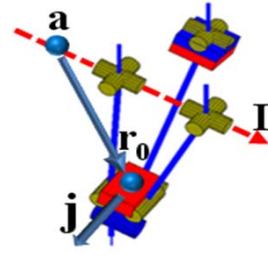


Fig. 5 Constraint relaxation

우측에 $\mathbf{f}_{23}(\mathbf{Y}, \mathbf{E})$ 과 $\mathbf{f}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{E})$ 를 계산하는 경로를 도식적으로 표현하고 있다.

병렬부의 무빙플랫폼의 회전을 제한하여 과구속을 표현하는 식 (3, 4)와 앞서 유도한 식 (6, 7)을 연립함으로써 8개의 독립변수로 표현된 $\mathbf{G}(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$ 꼴의 비선형 연립방정식을 구성할 수 있다. 이 연립방정식을 구성하는 8개의 방정식이 모두 독립이므로 일반적인 Newton의 방법을 적용한다.

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n - [\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}]_{\mathbf{Y}_n}$$

이 때 \mathbf{K} 는 위의 연립방정식을 표현하는 사상 $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{Y})$ 의 자코비 행렬이다.

이와 같이 방정식을 구성하는 것은 다음과 같은 장점이 있다.

- (1) axis-1과 axis-3을 각기 무빙플랫폼에 연결하기 위해 사용되는 관절변수 w_1 과 w_3 가 미지수에 포함되지 않는다.
- (2) axis-2와 무빙플랫폼의 결합조건을 나타내는 식이 해당 직렬기구의 정기구식에 포함되어, 명시적으로 방정식에 표현될 필요가 없다.
- (3) 무빙플랫폼에 고정된 특정 점 B_1, B_3 의 속도 해석을 통하여 수치해법에 필요한 자코비 행렬 \mathbf{K} 의 값을 계산하는 것이 용이하다. 예를 들어, \mathbf{K} 의 두 번째 열을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v_1} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial [\mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{a})] / \partial v_1}{\partial [\mathbf{j} \cdot \mathbf{I}] / \partial v_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial \mathbf{f}_1 / \partial v_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{f}_1 - \mathbf{p}_{v_1}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

이 때, \mathbf{v}_1 은 회전관절 v_1 의 회전축 방향의 단위벡터이고, \mathbf{p}_{v_1} 은 해당 회전축 상의 한 점의 위치벡터로서, 독립변수 설정에 기인한 아래의 성질을 활용하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_{21}}{\partial v_1} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial v_1} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial [\mathbf{j} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{a})] / \partial v_1} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial [\mathbf{j} \cdot \mathbf{I}] / \partial v_1} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

4. 결론

과구속된 특정 하이브리드 구조 기계의 정기구 및 역기구 해석을 수행하기 용이한 형태의 기구적 관계식을 유도하였다. Newton의 방법을 활용하여 유도된 연립방정식의 해를 수치적으로 구하였다. Newton해법에 필요한 자코비 행렬의 계산이 용이하고, 과구속과 관련된 관절변수가 미지수에 포함되지 않는 것이 제시된 방법의 특징이다.

후기

본 연구는 지식경제부가 주관하는 “병렬기구 고유연 머시닝센터 개발” 과제의 지원에 의해 수행되었음.

참고문헌

1. K. Liu, J. Fitzgerald, and F. L. Lewis, "Kinematic analysis of a Stewart platform manipulator," IEEE Trans. on Industrial Electronics, vol. 40, no. 2, pp. 282-293, 1993.
2. Seungkil Son, Teajung Kim, Sanjay E. Sarma and Alexander Slocum, "A hybrid 5-axis CNC milling machine," Precision Engineering, 430-446, 2009.
3. 고동주, 나승표, 김태정, "5축 병렬기구 공작기계의 기구식 수립," 한국정밀공학회, 565-566, 2009.