

Geometric Algebra 를 이용한 7 자유도 로봇팔의 새로운 역기구학 해석 7-DOF Robot Arm's new Inverse Kinematics Analysis using Geometric Algebra

*김제석¹, 지용관², 박장현³

*J. S. Kim(n4clover@gmail.com)¹, *Y. K. Ji(kcops@hanmail.net)², J. H. Park(jpark@hanyang.ac.kr)³

¹ 한양대학교 대학원 자동차공학과, ² 한양대학교 대학원 기계설계학과, ³ 한양대학교 기계공학부

Key words : Geometric Algebra, Conformal Geometry, Inverse Kinematics,

1. 서론

산업용 로봇은 목적하는 기능을 수행하기 위해 그에 필요한 최소한의 자유도 만을 갖도록 설계한다. 이는 로봇의 구조를 간단하게 만들고 기구학적 해석을 쉽게 할 수 있도록 하는 장점을 갖게 한다. 그러나 목적하는 기능 외 작업을 수행할 수 없어서 이를 보완하기 위해 여유자유도를 가진 직렬형(serial type) 로봇팔의 중요성이 대두되고 있다.

여유자유도를 가진 직렬형 로봇팔 중에서도 특히 사람의 팔을 모방한 Anthropomorphic 7 자유도 로봇팔 형태가 가장 널리 연구되고 있다. 이는 넓은 작업공간 확보가 가능하고 작업 능력이 뛰어나 조립공정 같은 좁은 공간이나 복잡한 환경에서도 작업이 가능하여 수요가 증대되고 있다.

Anthropomorphic 7 자유도 로봇팔 은 공간상의 위치와 자세를 표현하기 위한 6 개의 자유도보다 하나가 많은 7 개의 자유도를 가지기 때문에 해석하는데 많은 어려움이 따른다. 최근 이러한 어려움을 해결하기 위해 Geometric Algebra 를 이용한 연구가 활발하다.

본 연구에서는 Geometric Algebra 를 이용한 직관적인 알고리즘으로 7 자유도 로봇팔의 역기구학을 해석하는 방법을 개발하였다.

2. Geometric Algebra

Geometric Algebra 의 기원은 H.Grassmann 의 저서 “Die Lineare Ausdehnungslehre”에서 제안하였고, W.Clifford 가 그의 이론을 확장시켜 Geometric Algebra 를 제안하였다.[1, 2] 또한 D.Hestenes 는 기계와 물리학 분야에 처음으로 적용을 하였다. [3, 4] Geometric Algebra 의 자세한 내용은 [5-7]을 참고하기 바란다.

간략하게 Geometric Algebra 를 소개하면 어떤 차원상에서 기저벡터의 선형결합을 이용하여 다양한 물체를 수식으로 표현이 가능토록 만든 수학적 언어이다. 차원에 따라 각기 기본적으로 표현할 수 있는 기하학적 요소는 각기 다르다. Euclidean Geometric Algebra 는 3 차원 상에서 원점을 지나는 직선과 평면을 표현할 수 있다. 또한 Projective Geometric Algebra 는 4 차원 상에서 임의의 점과 직선 그리고 평면을 표현할 수 있다. 이에 한 차원 더 높은 Conformal Geometric Algebra 는 5 차원 공간 상에서 임의의 점과 직선, 평면, 원, 구 그리고 쌍점(point pairs)등 다양한 물체를 손쉽게 표현할 수 있다.

3. Conformal Geometric Algebra

5 차원 공간상에서 물체를 표현하는 Conformal Geometric Algebra 는 5 개의 좌표를 가지고 있다. 5 개의 좌표에 관한 기저벡터는 Euclidean 공간의 x, y, z 축을 표현하는 기저벡터 e_1, e_2, e_3 이외에 원점을 표현하는 e_0 와 무한한 곳에서의 점을 표현하는 e_∞ 을 가진다.

5 개의 기저벡터를 이용하여 표 1 과 같이 임의의 점이나 직선, 평면, 원, 구 등을 손쉽게 수학적으로 표현이 가능하다. 또한 그림 1 과 같이 Conformal Geometric 의 기본적인 요소들이 교차할 때 외적을 이용하여 점, 직선, 원 등의 표현을 간단하게 표현이 가능하다.

Table 1 List of the conformal geometric entities

Entity	Represent 1	Represent2
Point	$P = x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = \mathbf{p} - \frac{1}{2}r^2e_\infty$	$S^* = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$
Plane	$\pi = n + de_\infty$	$\pi^* = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge e_\infty$
Circle	$z = S_1 \wedge S_2$	$z^* = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = x_1 \wedge x_2 \wedge e_\infty$
Point pair	$Pp = S_1 \wedge S_2$	$Pp^* = x_1 \wedge x_2$

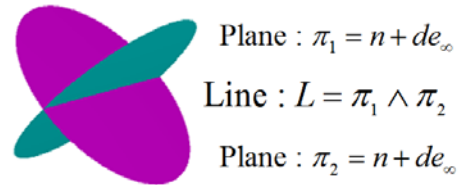


Fig. 1 Intersection of two planes

4. CGA 를 이용한 역기구학 해석

본 연구에서는 Anthropomorphic 7 자유도 로봇팔에 대한 역기구학을 Conformal Geometric Algebra 를 이용하여 해석하고자 한다. 그림 2 에서 보듯이 Anthropomorphic 7 자유도 로봇팔은 7 개의 관절의 회전축이 서로 교차하도록 설계된 형태이다. 이는 사람의 팔과 비교하여 처음 세 개의 회전관절($\theta_1, \theta_2, \theta_3$)은 어깨(shoulder)이고 마지막 세 개의 회전관절($\theta_5, \theta_6, \theta_7$)은 손목(wrist), 중앙에 위치한 회전관절은 팔꿈치(elbow)로 가정할 수 있다. 이 중에서 어깨와 손목의 세 회전관절은 각각의 중심에서 팔꿈치까지의 반경을 가지는 구형관절(spherical joint)로 가정할 수 있다. 이런 가정을 통해 원래 7 개의 변수를 3 개의 변수로 줄여서 7 자유도 로봇팔의 역기구학 해석을 간단히 할 수 있다.[1]

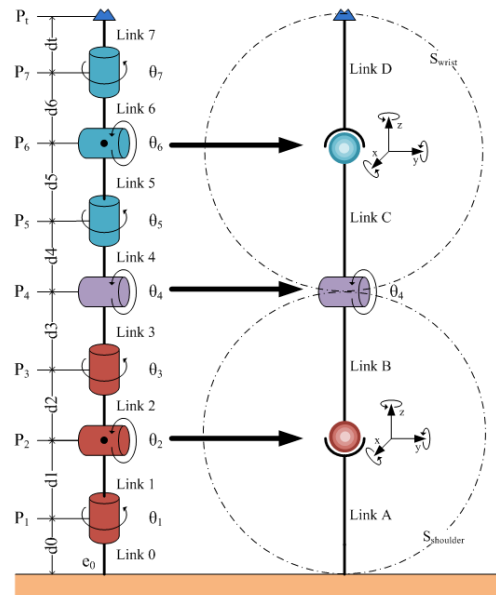


Fig. 2 Anthropomorphic 7-DOF Robot Arm

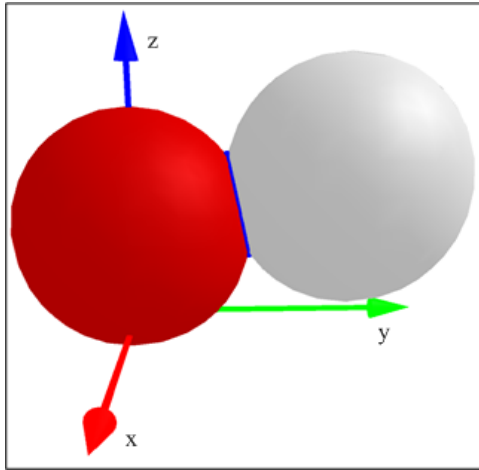


Fig. 3 Anthropomorphic 7-DOF Robot Arm

4.1 팔꿈치의 위치 결정

보통의 경우 두 개의 구가 교차하여 생성되는 원을 계산하는 것은 매우 어려운 일이다. 하지만 팔꿈치의 위치는 어깨와 손목의 구가 교차하는 원 상에 존재하므로 이를 Conformal Geometric Algebra 을 이용하여 어깨와 손목의 구가 교차하는 원을 외적을 이용하여 쉽게 계산할 수 있다. 그림 3 은 어깨를 중심으로 팔이 이동할 수 있는 공간을 빨간색 구 S_{shoulder} 를 나타낸다. 흰색으로 표현된 물체는 손목에서의 구 S_{wrist} 을 나타낸다. 그리고 두 구가 교차하는 파란색은 원 z_{elbow} 를 나타낸다.

4.2 장애물간의 충돌을 최소화

7 자유도 로봇팔의 작업공간 내에는 다양한 장애물이 존재할 수 있다. 만약 이 장애물들을 구로 표현할 수 있다고 한다면 CGA 를 이용하여 쉽게 팔꿈치와 장애물들 간의 거리를 목적함수로 생성할 수 있다. 우리는 이 목적함수가 최대화함으로써 장애물로부터 안전할 수 있는 로봇팔의 최적 위치를 결정할 수 있다.

먼저 장애물을 하나의 구로 표현이 가능하다면 장애물을 나타내는 구와 원 z_{elbow} 상의 점을 Conformal Geometric Algebra 를 이용하여 하나의 벡터로 표현할 수 있다. 이 벡터의 성분을 분해하면 점과 구 사이의 거리를 표현하는 다음과 같은 식이 생성된다.

$$P \cdot S = \frac{1}{2} [r^2 - (s-p)^2] \tag{4.1}$$

이 식을 이용하여 팔꿈치의 모든 점과 장애물인 구 사이의 거리를 최대화하는 목적함수를 식(4.2)와 같이 생성한다. 이 목적함수를 최소화하기 위해 최소자승 법(Least Squares Approach)을 적용한다.

$$\min \sum_{i=1}^n (P_i \cdot S)^2 \tag{4.2}$$

4.3 관절각 계산

Anthropomorphic 7 자유도 로봇팔의 관절 각들은 Conformal Geometric Algebra 의 두 객체(object)가 교차하여 생성되는 각을 식(4.3)을 이용하여 손쉽게 계산할 수 있다.

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{O_1^* \cdot O_2^*}{|O_1^*| \cdot |O_2^*|} \right) \tag{4.3}$$

5. 시뮬레이션

Geometric Algebra 를 계산하기 위한 프로그램은 많은 개인 또는 기관에서 개발하여 공개를 하고 있다. 본 연구에

서는 CLUViz 를 이용하여 연구를 수행하였다.

그림 4 와 같이 팔꿈치가 장애물에서 가장 멀리 있는 점에 위치한 것을 볼 수 있다.

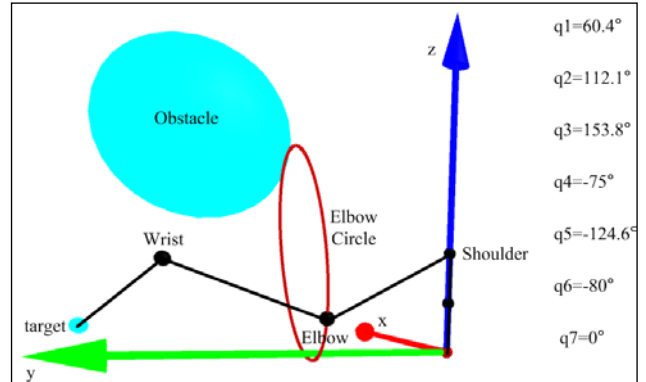


Fig. 4 7-DOF Robot Simulation using CLUViz

6. 결론

본 연구에서는 직관적이고 이해하기 쉬운 Conformal Geometric Algebra 를 이용하여 7 자유도 로봇팔 역기구학 해석을 수행하였다. 본 연구에서 제안한 방법은 직관적으로 계산이 가능하고 계산 량이 적다는 장점이 있다. 그러나 의사역행렬법과 같이 이동 중에 로봇팔 끝단의 위치나 자세를 원하는 값으로 쉽게 정할 수가 없다는 단점이 있다. 따라서 본 연구에서 제안한 방법을 이용하여 Artificial Potential Field 에 적용한다면 이동 중에도 로봇팔 끝단의 자세와 위치를 원하는 값으로 결정할 수 있을 것이다. 향후에는 본 연구에서 수행한 장애물 회피뿐만 아니라 로봇의 관절에서의 토크나 중력을 고려하여 로봇팔이 최적의 위치에 존재할 수 있는 역기구학 해석을 하는 연구가 필요할 것이다. 최종적으로 이 모든 것들을 바탕으로 다 개체 로봇의 협조제어가 이뤄져야만 진정한 여유자유도 로봇의 활용도가 증대될 것이다.

후기

본 연구는 지식경제부(산자부)의 우수제조기술 연구센터사업 지원으로 수행되었음. (과제번호:2008-000-0000-8054)

참고문헌

1. Clifford, P., *Applications of Grassmann's extensive algebra*. American Journal of Mathematics, 1878. 1(4): p. 350-358.
2. Clifford, W., *On the classification of geometric algebras*. Mathematical Papers, 1882: p. 397-401.
3. Hestenes, D., *New foundations for classical mechanics: Fundamental Theories of Physics*. 1999: Kluwer Academic Pub.
4. Hestenes, D. and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A unified language for mathematics and physics*. 1984: Springer.
5. Hildenbrand, D., et al. *Geometric Algebra and its Application to Computer Graphics*. 2004: Citeseer.
6. Rosenhahn, B. and G. Sommer, *Pose Estimation in Conformal Geometric Algebra Part I: The Stratification of Mathematical Spaces*. J. Math. Imaging Vis., 2005. 22(1): p. 27-48.
7. Hildenbrand, D., *Geometric computing in computer graphics and robotics using conformal geometric algebra*. 2006: Darmstadt.
8. Tolani, D., A. Goswami, and N.I. Badler, *Real-Time Inverse Kinematics Techniques for Anthropomorphic Limbs*. Graphical Models, 2000. 62(5): p. 353-388.