VIC 방법을 사용한 2차원 날개의 LES 해석

김 명 수[1], 김 유 철[2], 서 정 천[3*]

Large Eddy Simulation for a 2-D hydrofoil using VIC(Vortex-In-Cell) method

M.S. Kim, Y.C. Kim, and J.C. Suh

VIC (Vortex-In-Cell) method for viscous incompressible flow is presented to simulate the wake behind a modified NACA16 foil. With uniform rectangular grid, the velocity in field is calculated using streamfunction from vorticity field by solving the Poisson equation in which FFT(Fast Fourier Transform) is combined with 2nd order finite difference scheme. Here, LES(Large Eddy Simulation) with Smagorinsky model is applied for turbulence calculation. Effective viscosity is formulated using magnitude of strain tensor(or vorticity). Then the turbulent diffusion as well as viscous diffusion becomes particle strength exchange(PSE) with averaged eddy viscosity. The well-established panel method is combined to obtain the irrotational velocity and to apply the no-penetration boundary condition on the body panel. And wall diffusion is used for no-slip condition. Numerical results of turbulent stresses are compared with experimental results (Bourgoyne, 2003). Before comparing process, LES(Large Eddy Simulation) SGS(Subgrid scale) stress is transformed Reynolds averaged stress (Winckelmans, 2001).

Keywords: VIC방법, 난류 모델(Turbulence model), Smagorinsky, 수정된 NACA 16 단면 (modified NACA 16), LES (Large Eddy Simulation), 아격자 응력 (Subgrid scale stress)

1. 서 론

프로펠러 주변의 유동 특성을 예측하기 위한 방법들은 그 동안 많은 연구자들에 의해 수행되어 왔다. 2차원 단면 형상에 대한 해석은 3차원의 복잡한 형상 물체 주변의 유체 현상을 직관적으로 예측 가능하게 하므로, 2차원 단면 현상을 해석하는 것을 우선 수순으로 할 수 있다. 뿐만 아니라, 2차원 단면 현상에 대한 해석을 통해 해석자가 선택한 유체 해석 방법에 대한 검증을 쉽게 하고, 나아가 3차원 형상에 대한 해석의 기반이 된다.

본 논문에서는 와도를 기저로 한 점성 유동 해석법 (vortex method) 을 채택하였다. 와도를 기저로 한 해석법의 장점은 다음과 같이 열거할 수 있다.

① 유체와 고체 강체 사이의 근본적인 차이를 반영할 수 있다. 와도로 표현되는 전단 현상은 유체를 설명하는 기본이기 때문이다.

② 속도 구배에 있어 비대칭 부분 (skew-symmetric part) 이므로, 와도에 대한 이해는 공간 상의 단일 점에 대한 유체 운동을 포함하고, 주변 입자 운동의 상대적인 영향을 반영한다.

③ 따라서, 속도에 비해 직접적으로, 전단 현상의 동역학적인 메커니즘을 반영한다.

이러한 와도 기저의 해석법은 크게 유한 체적법 (Eulerian description)과 라그랑지안 입자 해석법(Lagrangian particle description)으로 나누는데, 본 논문에서는 라그랑지안 입자 해석법을 채택한다. 역시 다음과 같은 장점을 열거할 수 있다.

① 격자를 필요로 하지 않는 방법이다.

② 유한 체적법에서 필요로 하는 비선형 대류항의 계산을 해결할 수 있다. 유한 체적법에서는 오일러리안 격자를 이산화 하는 어려움이 발생하나, 입자법은 연속체의 성질을 반영한다.

1 정회원, 서울대학교 조선해양공학과
2 한국해양연구원 해양시스템안전연구소(MOERI)
3 정회원, 서울대학교 조선해양공학과, 해양시스템공학연구소(RIMSE)
* TEL : 02) 880-7341
* Corresponding author E-mail: jungsuh@snu.ac.kr

계산된 와도들로부터 속도장을 계산하는 방법은 와도 - 유량함수(stream function) - 속도 관계를 따른다.

전체 과정에 난류 모델을 적용하고, 레이놀즈 응력 (Reynolds stress) 을 계산한 결과를 보였다.

2. 배경 이론

2.1 라그랑지안(Lagranian) 입자 방법

전체 속도장은 freestream과 비점성 유동의 속도, 점성 유동의 속도로 분해하여 합한다. 이 근거는 Helmholtz' decomposition에 있다.

$$\underline{u} = \nabla\phi + \nabla \times \underline{\omega} \tag{1}$$

우변 첫 항은 Green function method (혹은 panel method)를 사용하여, 두 번째 항은 앞으로 기술된 Lagrangian particle method를 사용하여 계산하고, 두 계산 결과에 freestream의 속도를 합하여 구성하였다.

2.2 라그랑지안(Lagranian) 입자 방법

유체 유동장 전체에 걸쳐 위치 별로 와도 세기를 구할 수 있는 지배 방정식인 와도 이송 방정식은, Navier-Stokes 방정식에서 curl을 취해 구한다.

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{\omega} = \underline{\omega}\cdot\nabla\underline{u} + \nu\nabla^2\underline{\omega} \tag{2}$$

좌변 첫 번째 항은 와도 벡터의 시간 변화율, 두 번째 항은 대류에 의한 와도 입자의 이동을, 우변 첫 번째 항은 와도의 신축 형태를, 두 번째 항은 점성에 의한 와도의 확산을 표현하는 항이다.

전미분을 취하고, 2차원 해석이므로 신축항이 사라진 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \nu\nabla^2\underline{\omega} \tag{3}$$

전체 유동장에 분포된 와도 입자 세기에 의한 각 위치 별 와도의 크기는 Gaussian 순정 함수를 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\underline{\omega}(\underline{x},t) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\zeta(\underline{x}-\underline{x}_i) \tag{4}$$

α_i는 와도 입자의 세기를 면적분한 순환(circulation) 값이다. 유동 장에 분포된 개별 위치의 와도 세기는 서로에게 전달된다는 의미이다.

식 (3)의 우변에 있는 확산항의 계산은 입자 세기 교환 (Particle Strength Exchange : PSE) scheme을 사용한다.

$$\nu\nabla^2\omega \approx \frac{2\nu}{\epsilon^2}\int_S \eta_\epsilon(|\underline{x}-\underline{y}|)(\omega(\underline{y})-\omega(\underline{x}))dS_y$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{2\nu}{\epsilon^2}\sum_{j=1}^{N}(S_i\alpha_j - S_j\alpha_i)\eta_\epsilon(\underline{x}_i-\underline{x}_j) \tag{5}$$

2.3 VIC 방법

라그랑지안 입자 방법에서, 와도 이송 방정식으로부터 얻은 와도장으로부터 각 입자의 속도를 구할 때, Biot-Savart 적분을 사용한다. 그러나 계산 안정성(stability)를 확보하기 위해 시간 간격(timestep)을 작게 해야 하고, 이는 충분히 발달된 유동장을 확인하기 위해 계산 시간을 오래 잡아야 하는 결과를 가져 온다. 따라서 속도를 계산하기 위한 정규 격자를 도입하고, 와도-유량 함수 관계식인 푸아송(Poisson) 방정식에 FFT (Fast-Fourier Transform)을 적용한 뒤, 계산된 유량 함수로부터 속도를 구한다.

와도장으로부터 유량 함수를 구하는 관계식은 다음과 같다.

$$\nabla^2\underline{\psi} = -\underline{\omega} \tag{6}$$

위의 방정식을 이산화하여 유한 차분한 뒤 계산한 유량 함수로부터 속도를 구하는 관계식은 식 (7)과 같다.

$$\underline{u}_\omega = \nabla \times \underline{\psi} \tag{7}$$

2.4 LES (Large Eddy Simulation)와 난류 응력

난류 유동장 해석은 모든 크기의 난류를 직접 해석하는 방법이 있으나 (Direct Numerical Simulation : DNS), 격자의 크기가 작아지고, 계산 시간이 증가하는 원인이 된다. 이에 정규 격자의 크기와 비슷하거나 큰 eddy 와 작은 eddy 들로 구분하여, 큰 eddy는 지배 방정식을 따르고, 작은 eddy들을 modeling 하는 방법을 사용한다.

본문에서는 작은 eddy들을 modeling 하는데 Boussinesq

가설을 따른 Smagorinsky model을 적용한다. 이는 와도 이송 방정식의 계산에 적용하기 편리한 장점이 있다. 기술한 내용을 2차원에서 표현하는 식은 다음과 같다.

$$\frac{D\overline{\omega_i}}{Dt} = \nu \nabla^2 \overline{\omega_i} - \nabla \cdot \boldsymbol{R} \tag{8}$$

와도 기저 방법을 사용할 때, Smagorinsky model에서 난류 응력 항인 $-\nabla \bullet \boldsymbol{R}$ 은 식 (9)과 같이 modeling된다.

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{R} = \nabla \cdot (\nu_t \nabla \underline{\omega}) \tag{9}$$

ν_t는 eddy diffusivity 혹은 유효 점성 계수 (effective eddy viscosity)라고 하며, 식 (10) 과 같이 계산된다.

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 |\overline{\omega}| \tag{10}$$

C_S는 Smagorinsky 계수이며, Rogallo and Moin (1984)에서 $0.10 < C_S < 0.24$로 제시한 바 있다. 본 논문에서는 0.21을 사용한다.

Model을 적용하여 난류 응력항을 계산할 때 PSE scheme(식 (11))의 형태로 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\nu_t \nabla \underline{\omega}) \\ &= \frac{1}{2\epsilon^2} \sum_j (\nu_{t_i} + \nu_{t_j})(\underline{\alpha_j} - \underline{\alpha_i}) \eta_\epsilon (\underline{x_i} - \underline{x_j}) \end{aligned} \tag{11}$$

이는 확산항의 계산에 사용되는 PSE scheme과 선형적으로 합하여 사용할 수 있다는 장점이 있다.

식 (11)의 PSE scheme을 적용시켜 계산한 여과된 (filtered) 와도장으로부터 stress term은 다음과 같이 구성한다. [3] (Smagorinsky model)

$$\boldsymbol{R_{ij}} = 2\nu_t S_{ij} \tag{12}$$

2.6 계산 안정성(Stability)

수치 해석을 이용한 계산 방법의 정확도를 평가하는 기준은 크게 두 가지가 있다. 첫째로, 함수의 이산화로 인해 time step이 진행 될수록 계산이 발산하지 않도록 하는 것이다. 수렴된 계산 결과를 얻기 위해서는 계산 안정성 (stability) 조건을 만족시켜야 한다. 둘째로, 이산화시킨 함수들로부터 계산한 결과와 analytic 계산 결과의 일치성 (consistency)이다. 본 계산에서는 안정성 조건을 만족시킨 계산 결과를 언급할 것이다.

확산 항을 이산화 하는 PSE scheme을 사용할 때 field의 와도 입자 세기가 발산하지 않도록 하는 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\nu \Delta t}{\epsilon^2} < 0.595 \tag{13}$$

0.595는 Gaussian 순정 함수를 사용하고, Euler explicit scheme을 사용했을 때의 값이다. blob 간의 세기 교환 함수와 time step 진행 scheme 종류에 따라 우변 값은 달라질 수 있다. 본 계산에서는 $\nu \Delta t / \epsilon^2 = 0.5$를 사용하였다.

유체 입자의 유속에 의한 이동량과 유동장 격자 크기의 관계는 다음과 같은 형태의 조건을 사용하였다.

$$U \Delta t = 2\epsilon \tag{14}$$

2.7 LES 결과와 실험 결과의 비교

LES는 공간 격자에 대한 평균, 혹은 가중치가 적용된 평균으로 filtering 이라는 표현을 사용하므로, 시간 평균낸 실험 결과의 레이놀즈 응력과 직접적으로 비교하기 어려움이 따른다. 따라서 다음과 같이 수정하여 비교한다. [10]

어떤 변수 f에 대해 시간 평균을 취하면 $< f >$로, 공간 평균을 취하면 $\overline{f}$로 표현한다고 정의한다.

LES 장에서의 공간 평균 취해진 함수 $\overline{f}$의 시간 평균된 값은 실험 혹은 DNS 해석에서 나온 함수 f와 같다는 가정에서 시작한다. 시간 평균된 실험 결과는 아격자 규모 (subgrid scale)의 영향이 거의 없기 때문이다.

$$< f > \approx < \overline{f} > \tag{15}$$

그리고 실험에서 나온 레이놀즈 응력을 다음과 같이 정리하면,

$$\begin{aligned} R_{ij}^{\mathrm{EXP}} &\equiv \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle - \langle u_i u_j \rangle \\ &\approx \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle - \langle \overline{u_i u_j} \rangle \\ &= \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle - (\langle \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} \rangle + \langle \overline{A_{ij}} \rangle) \\ &= R_{ij}^{LES} - \langle \overline{A_{ij}} \rangle \approx R_{ij}^{LES} - \langle \overline{A_{ij}^M} \rangle \end{aligned} \tag{16}$$

$R_{ij}^{LES} = \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle - \langle \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} \rangle$는 LES 해석 결과

에 대응되는 레이놀즈 응력을 나타낸다. 식 (15)에 의해 $R_{ij}^{LES} = \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle - \langle \overline{u_i}\,\overline{u_j} \rangle$로 놓고 본 논문에서는 R_{ij}^{LES}를 계산하여 실험 결과와 비교하였다.

3. 해석 대상 및 계산 정보

본 논문에서 해석을 대상으로 한 날개는 NACA 16 단면이다. NACA 16 단면은 leading edge(이하 LE)로부터 chord 길이의 28% 위치에서부터 trailing edge(이하 TE)까지 압력면이 평평한 형상을 갖는다. TE의 형상을 둥글게 하기 위해 베벨(bevel) 각을 44도(이하 G1), 56도(이하 G2)를 갖도록 수정하여 해석을 수행하였다.

Fig. 1은 해석 대상의 형상을 비교한 그림이다. Fig. 2는 전체 날개 형상을 나타낸 것이다. x 좌표는 전체 chord 길이로 무차원화되었고, LE는 x=-0.5, TE는 x=0.5의 좌표에 놓인다. flat bottom의 y 좌표는 0, 최대 두께는 약 chord 길이의 8% 정도이다.

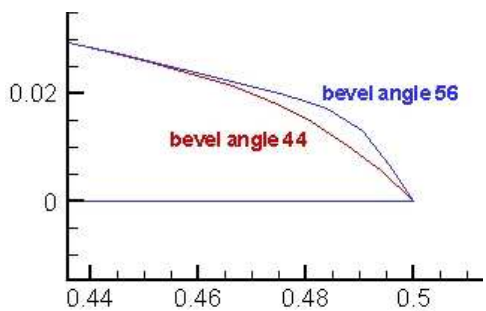

Fig. 1 Comparison of trailing edges

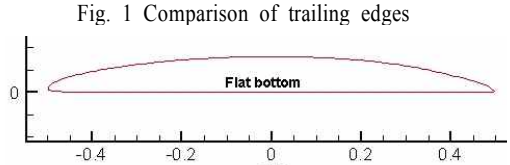

Fig. 2 Whole geometry of modified NACA16

날개 표면의 panel과 계산 field 정보 등은 Table 1.과 같다. panel 정보는 panel 방법에 의한 계산, 라그랑지안 입자법 계산 초기에 물체 벽면으로부터의 와도 확산 속도를 계산하기 위함임을 밝혀 둔다.

입자를 이송 시킨 후 panel 벽면의 slip 속도로부터 발생하는 확산으로부터 simulation time이 진행될 수록 blob의 수가 증가한다. 따라서 field blob의 수가 증가하며, field blob의 수에 따라 계산 시간의 영향을 크게 받음을 알 수 있다.

Table. 1 Information of computing

bevel angle : 44° (G1)		bevel angle : 56° (G2)	
Reynolds #	10,000	Reynolds #	10,000
# of panels	250	# of panels	250
panel size (average)	0.008097	panel size (average)	0.008105
simulation time	8 (seconds)	simulation time	8 (seconds)
time step	0.004	time step	0.004
blob size	0.001	blob size	0.001
# of field blobs (Max.)	796840	# of field blobs (Max.)	836634
calculation time	74.7 (hours)	calculation time	107.3 (hours)

4. 계산 결과

4.1 평균 유동장 (resolved scale, $\tilde{u}$)의 확인

simulation time이 2초, 4초, 8초일 때 TE 뒤로 나타나는 와도장은 Fig. 3 (G1), 4 (G2)와 같다. timestep이 진행될수록 TE 후류에서의 와도장을 모두 표현하기 위해 날개 단면의 크기가 상대적으로 작아졌다.

time step이 증가할수록 TE 후류의 와도가 현저하게 나타나는 것을 확인할 수 있다. starting vortex 및 각 vortex 중심에서의 세기는 contour 범위 밖이며, $O(1)$이다. 또한, LE 근처의 박리점에서 $O(10^3)$의 강한 와도 세기가 나타난다. starting vortex 중심에서의 와도 세기는 약 $O(10^1)$ 정도로 나타난다. 이는 G2에서도 마찬가지이다.

time step 2초에서는 2D 날개 단면의 근처에서 경계층 내부에 강한 와도가 존재함을 확인할 수 있으며, chord 길이의 약 1.5배 영역까지 경계층이 확장되었음을 알 수 있다. time step이 진행될 수록 TE에서 떨어져 나온 wake 후류에서 vortex blob 중심의 와도 세기가 강하게 나타냄을 알 수 있다. [11]과 비교하였을 때 Reynolds 수가 상대적으로 낮고, 층류 유동 영역에서 해석되었다는 점을 감안하면, TE 후류에서의 vortex가 상하 대칭의 경향이 강하게 나타난다는 것을 8초일 때의 결과로부터 알 수 있다. starting vortex는 시간이 지날 수록 후류에 와도를 분포시키면서 크기가 작아짐을 알 수 있다.

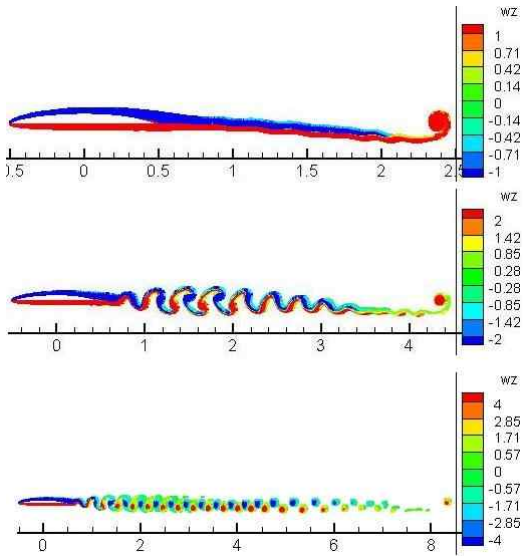

Fig. 3 vorticity field of wake of G1

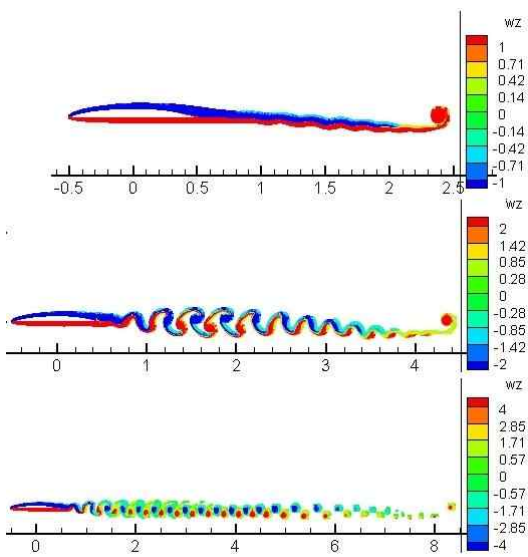

Fig. 4 vorticity field of wake of G2

TE 부근에서의 와도장을 확대한 사진은 Fig. 5와 같다. time step 4초에서, G1의 결과이다. Resolved scale의 속도 벡터를 이용하여 streamline을 구성하였다. TE 후류에서 상하 교대로 발생하는 Karman vortex를 확인할 수 있다.

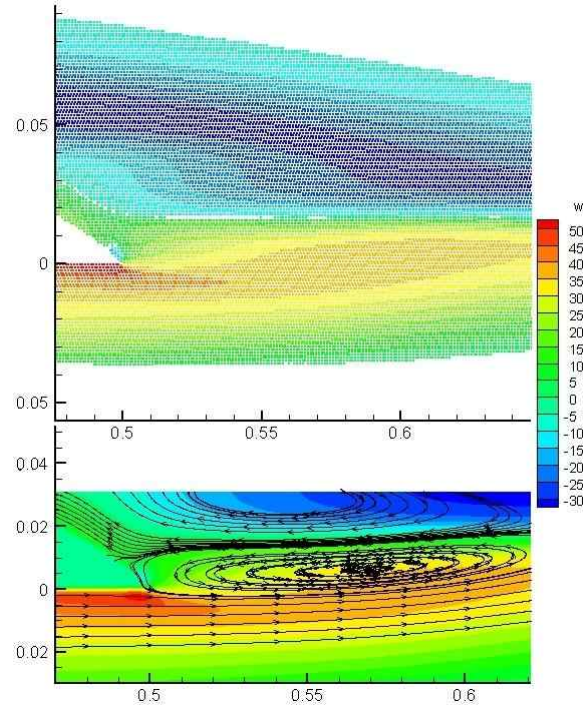

Fig. 5 streamlines of TE wake (G1), t = 4

뿐만 아니라, TE 후류에 나타나는 강한 세기의 와도 입자 분포를 통해 경계층 영역을 확인할 수 있다.

4.2 변동 (fluctuated or unresolved scale, $\underline{u}'$) 성분의 확인

Fig. 6~7은 계산 결과 중, TE 근처에서의 변동 성분의 변화를 살펴 본 것이다. Fig. 6은 $x/C = 0.93$ 위치에서의 G1 에 대한 레이놀즈 응력 계산 결과를 비교하였다. (A)는 흡입면의 바깥 부분 (두께 방향 $y/C > 0.03$)의 영역을 그린 것이다. 왼쪽의 실험 결과는 y_0를 날개 단면의 표면(surface)를 나타낸다. 따라서 흡입면 표면에서부터 두께 방향으로 단면 바깥으로 향하는 방향을 따라 레이놀즈 응력을 찍은 결과가 되며, 마찬가지 영역에 대해 오른쪽의 계산 결과를 보였다. 그러나 전체적인 난류 영역이 계산에서 더 넓게 나타났다. Re 의 차이로 인한 경계층 두께의 차이에서 기인한 현상으로 생각해 볼 수 있다.

마찬가지로 Fig. 6의 (B)는 압력면 바깥 부분 (두께 방향 $y/C < 0$)의 영역에서 레이놀즈 응력을 그렸다. 왼쪽의 실험 결과에서 y축은 압력면으로부터의 거리를 chord로 무차원화 한 것이다. 계산 결과는 y 축이 음인 영역이 실험 결과를 도시한 것과 같은 위치이므로, y축을 반전하여

위로 향할 수록 압력면에서 멀어짐을 표현하였다.

흡입면에서 음의 레이놀즈 응력을 보인다는 점, 압력면에서 양의 값을 보인다는 점, 계산 대상의 단면에서 멀어질 수록 0에 수렴한다는 점은 비슷한 결과를 보인다.

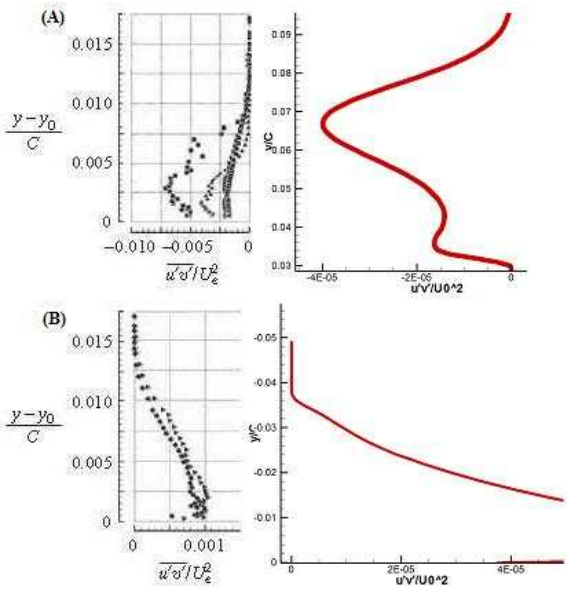

Fig. 6 Comparison of Reynolds stress $\overline{u'v'}/U_0^2$ at $x/C=0.93$, (Left : experimental result, Right : Calculation result)
(A) : outer region of suction side
(B) : outer region of pressure side

Fig. 7은 $x/C=1.009$의 영역에서 레이놀즈 응력을 출력한 것이다. 빨간색 점은 G1에 대해, 파란색 점은 G2에 대한 계산 결과를 보인다.

계산에서 field blob을 출력하게 한 영역의 격자 크기의 최소 단위를 10^{-3}으로 결정하여 실험과 정확하게 일치하는 영역은 아니다, 그러나 흡입면에서 상부로 갈 수록, 압력면에서 하부로 갈 수록 0에 수렴한다는 특징, TE 근처의 위치에서 특이점의 경향을 보이려 한다는 점은 실험 결과와 비슷한 경향을 보인다. 실제 계산 결과에서 $x/C=1.0$, $y/C=1.0$ 위치에서는 레이놀즈 응력이 발산하는 결과를 보였다.

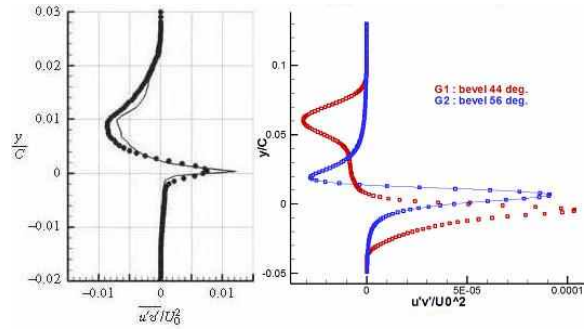

Fig. 7 Comparison of Reynolds stress $\overline{u'v'}/U_0^2$
(A) : experiment (Re = 50M) at $x/C=1.0094$
(B) : computation (Re = 10k) at $x/C=1.009$

Fig. 6~7에서 보인 결과는 레이놀즈 수의 차이에 기인한 영향을 제외하면, TE 근처에서 변동 성분에 의한 레이놀즈 응력의 분포 경향이 비슷함을 확인할 수 있다. 그러나 알고리즘의 계산 효율성을 향상시켜 같은 레이놀즈 수에서의 계산 결과를 도출하여 응력 분포가 더 일치하는 경향을 확인하려는 시도 뿐 아니라 근사한 절대치가 나타남을 확인하기 위한 연구가 추가적으로 필요하다.

5. 결론 및 향후 연구

본 논문에서의 계산은 레이놀즈 수가 10,000인 상황에 적용되었다. 물체 주변의 유동이 난류 영역으로 이르기에는 100,000 이상이 되어야 하므로 본 계산은 vortex 기저 방법에 난류 model을 적용시킨 결과 검증에 의의를 둔다. 계산 기법의 안정성을 유지하는 time step과 격자 크기는 더욱 작아져야 하며, 작아진 격자 크기 만큼 coding 시 와도 입자의 위치 벡터나 와도 입자의 세기 등을 저장할 배열을 더 많이 사용해야 한다. 레이놀즈 수 10,000에 맞춘 것은 계산 메모리 한계로 인한 것이므로 code 최적화 혹은 병렬 처리 등의 논의가 추가적으로 필요하다.

LES는 공간 평균 혹은 공간에 가중치를 적용한 평균 계산 결과이다. 계산 결과의 비교 대상이었던 실험 결과에는 시간 평균이 적용된 Reynolds stress 계산 결과를 보이고 있으므로, 직접적인 비교를 통해 계산 결과를 비교하는 것보다는 LES에서 계산된 아격자 응력(Subgrid stress)과 Reynolds stress를 비교할 수 있는 계산을 통해 계산 결과의 아격자 응력을 수정해야 한다. 이는 식 (16)의 $\langle \overline{A_{ij}^M} \rangle$를 수정하는 절차를 거쳐야 한다.

Fig. 6~8 처럼 실험에 비해 레이놀즈 수가 낮아졌음에도 불구하고, 레이놀즈 응력이 나타나는 범위가 더 넓어진

이유에 대해서는 추가적인 논의가 필요하다. Re가 커지면 관성의 영향에 비해 점성 영향이 증가하기 때문에 경계층이 증가하는 것을 원인으로 생각해 볼 수 있다. 여기에 전체적인 응력 절대치가 실험에 비해 작아진 것은 실험에서의 관성력 비율보다 계산에서 관성력의 비율이 낮아진 데서, 변동 성분의 영향이 상대적으로 감소하였음을 생각해 볼 수 있다.

와도 기저 방법 및 난류 modeling을 통한 해석이 실효성 있는 결과를 얻기 위해서는 3차원 양력 기전 추진체 형상(예 : 프로펠러)의 해석으로 확장해야 하며, 이는 2차원 와도 이송 방정식에서 사라진 신축 항을 포함한, 추가적인 연구가 필요하다.

후 기

본 연구는 지식경제부 산업원천기술개발사업인 “친환경 추진기 캐비테이션 성능 제어기술 개발(10033662)” 의 일부로 수행되었고, 국가지정연구실 사업 (No. ROA-2007-000-10028-0) 의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받고 있음을 밝힌다.

참고문헌

[1] 2000, G.Cottet and P.D. Koumoutsakos, *Vortex Methods - theory and practice*, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] 1977, J.N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, Massachusetts.

[3] 1993, D.C. Wilcox, Turbulence Modeling for CFD 2nd., DCW industries, California.

[4] 2003, 김광수, “A vorticity-velocity-pressure formulation for numerical solutions of the incompressible Navier-Stokes equations", 박사학위논문, 서울대학교, 서울.

[5] 2005, 전동수, “3차원 Lagrangian 보우텍스 방법을 이용한 실린더 주변 유동 해석”, 석사학위논문, 서울대학교, 서울.

[6] 2005, 이승재, “Numerical simulation of single-bubble dynamics with two way coupling using the Lagrangian vortex method”, 박사학위논문, 서울대학교, 서울.

[7] 2009, 이경준, “(An)Immersed boundary vortex in cell method combined with a panel method for incompressible viscous flow analysis”, 박사학위논문, 서울대학교, 서울.

[8] 2005, D.A. Bourgoyne et al., "Vortex shedding from a hydrofoil at high Reynolds number", Jounal of Fluid Mechanics, Vol. 531, pp. 293-324.

[9] 2003, D.A. Bourgoyne et al. "Time-averaged flow over a hydrofoil at high Reynolds number", Jounal of Fluid Mechanics, Vol. 496, pp. 365-404.

[10] 2002, G.S. Winckelmans et al. "On the comparison of turbulence intensities from large-eddy simulation with those from experiment or direct numerical simulation", Physics of Fluids, Vol. 14-5, pp. 1809-1811.

[11] 2010, 김유철 외 2인, “보텍스 방법을 이용한 2차원 날개 단면의 난류 유동 해석”, 대한조선학회 춘계학술대회 발표논문, pp.1025-1032.