實 數 와 位 相

金　　致　　榮

現代數學의 各分野의 發展過程을 살펴보면 그 大部分이 實數體의 性質에서 派生되었다고 보아도 過言이 아닐 것 같다. 假令 現代代數學에 있어서의 群, 環, 體, ideal 等의 모든 理論도 結局 實數集合이 지니고 있는 性質의 抽象化에 不過한 것이고, 또 解析學의 分野를 살펴 보더라도 그것은 實數의 連續性을 土臺로 하여, 實數集合 R위에서 定義된 實函數 特히 連續函數의 性質을 極限槪念 또는 收斂槪念을 媒介로 하여 硏究한 것에 不過한 것이라고 볼 수 있을 것이며, 또 現代數學의 各分野에 걸쳐서 그 土臺를 이루고 있는 位相數學이야말로 完全히 實數體가 지니고 있는 位相的性質의 抽象化에 不過한 것이다.

筆者는 이 짤막한 글을 通하여 實數體R에서 位相的性質이 抽象化된 過程 및 그것이 어떻게 展開되어 나가고 있는가에 對한 한 두 面을 考察하여 보는 同時에 實數가 지니고 있는 그 構造의 多樣의 一面을 살펴 보려고 한다.

生覺컨대 解析學의 基本課題를 實數全體의 集合을 R內로 옮기는 連續寫像 f: R→R의 硏究라고 본다면, f의 domain 或은 range에 該當되는 實數集合 自體의 性質 特히 實數의 連續性을 究明한다는 것은 解析學에서 疎忽히 할 수 없은 重要課題의 하나일 것이다.

實數의 連續性의 解析的 表現으로서 우리가 잘 알고 있는 事實은 다음 4가지로서 이 命題들은 서로 同値임도 잘 알려져 있다. 即

1. Dedekind의 cut

實數全體R을 두 部分集合 A와 B로 分割(partition)하였을 때 $R=A\cup B,\ A\cap B=0,\ A,\ B\neq\Phi$. 가 滿足되되 A의 任意의 數가 B의 任意의 數보다 恒常 작게되어 있으면 雙(A,B)를 R의 切斷(cut)이라고 부른다. Dedekind는 이와같은 實數의 切斷(A,B)를 만들면 A에 最大數가 있든가, B에 最小數가 있든가, 이 두 境遇中 오로지 어느 한쪽만이 반듯이 成立하게 된다는 것으로서 實數의 連續性을 表示하는데 成功하였다.

2. Weierstrass의 定理

또 Weierstrass는 "有界인 數의 集合에는 반드시 上限(最小上界) 및 下限(最大下界)이 存在한다"라는 表現으로서 亦是 같은 連續性을 表示하였으며, 또 이와 同値인 것으로서

3. "有界인 單調數列은 收斂한다" 라는 表現도 可能하다. 마지막으로

4. Cantor의 定理

"直線上에서 閉區間列 $I_1, I_2, \cdots, I_n$, 이 存在하여 다음 條件

i) $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{dia}(I_n)=0$ (여기 $\mathrm{dia}(I_n)$은 I_n의 길이를 뜻함)를 滿足하면 모든 I_n에 屬하는 單한 點이 存在한다"라는 Cantor의 定理도 實數의 連續性을 表現한 重要한 定理의 하나인 것이다. (이 定理는 Fréchet의 V-space에다 一般化하면 다음과 같이 된다.

$E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$ 이 V-space 內의 空이 아닌 閉集合들의 減少列이고 그中 하나가 $\aleph_0$-compact이면 $E_1\cap E_2\cap\cdots$는 空이 아니다.) (W. Sierpinski, General Toyology 參考).

以上에서 言及한 實數의 連續性을 假定하면 우리는 解析學에서 重要視되는 Weierstrass의 다음 定理를 얻게 된다. 即

Weierstrass의 定理

數直線上에서 有界인 無限點集合 E에는 반드시 集積點(limit point)이 存在한다. 여기 한點 p가 E의 集積點이란 p의 任意의 ε近傍內에는 p以外에 E의 點이 恒常存在할 때를 뜻한다. (이 定理는 우리가 位相空間에서 말하는 countably compact 性 및 一樣位相空間에서의 完備性과 密接하게 關聯된 實數의 性質인 것이다).

이와 같이하여 19世紀末葉에 가서 Weierstrass의 集積點의 存在定理를 土臺로 하여 導集合의 槪念에 到達하게 되었다. 數直線上에서 集合 E의 導集合 E′란 E의 모든 集積點의 集合을 뜻한다. (導集合에 關하여는 Sierpinski의 General topology 및 Natanson 의 Theory of functions of a real variable 의 一章 參考). 한集合 E의 導集合이 自己自身에 包含되는 集合, 即 $E' \subset E$ 인 集合 E를 閉集合이라 불렀고 또 $E' \cup E = \bar{E}$ 라 놓고 $\bar{E}$를 E의 閉胞라 불렀다. 그러면 $\bar{E}$는 E를 包含하는 最少의 閉集合으로 되며 이 閉胞에 關하여는 다음 3性質이 成立하게 된다.

X, Y가 實直線上의 任意의 두 集合일 때.

i) $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$

ii) X가 單한 點으로 된 集合이든가 또는 空集合이면

$$\bar{X} = X$$

iii) $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$

이 세性質을 抽象하여 Kuratowski 는 位相空間을 定義하였다. (K. Kuratowski, Topologie I, Warszawa-Lwów, 1933) 即 그는 任意의 集合을 空間이라 부르고 그것을 I로 表示하고 I의 任意의 部分集合 X에다 $\bar{X} \subset I$ 를 結附시키는 operator 一를 導入하되 그것이 위의 3條件을 滿足하도록 擇하고 $\bar{X}$ 를 X의 fermeture 라 불렀다. 이것이 그가 定義한 位相空間으로서 우리가 只今 普通 말하는 T_1-space 인 것이다.

이와같이 定義된 位相空間에서 $X = \bar{X}$ 인 集合 X를 閉集合이라 부르기로 하면 이 空間의 全體 閉集合族Φ는 다음 3性質을 滿足하게 된다. 即

i) 全空間과 O集合은 閉集合이다.

ii) 有限個의 閉集合의 和는 閉集合이다.

iii) 任意個의 閉集合의 交集合은 亦是 閉集合이다. 또 閉集合의 餘集合을 開集合이라 부르기로 하면 위의 3性質의 雙對命題가 開集合族에 關하여 成立하게 된다. 이와같이 導入된 開集合族을 우리는 空間에 導入된 位相이라 불렀다. 이것은 바로 實數集合에서의 閉集合族 및 開合族이 지니고 있는 性質의 抽象化인 것이었다.

그러나 이와같이 얻어진 位相空間은 그것이 너무 一般的인 空間이어서 여기다 다시 차례로 制限條件 即 分離公理를 添加하여 다시 實數集合의 本然의 姿勢로 되돌아 가는 過程을 硏究하는 것이 또한 位相數學의 큰 課題의 하나로 되게 되었다. 그中에서도 가장 重要視된 問題로는 距離化問題(metrization problem) 一樣連續性의 導入問題, 따라서 또 一樣位相의 導入問題, 나아가서는 一樣化問題(uniformiz ability problem) 等이 close up 되었고 (이 問題들에 關하여는 앞에서 簡單히 다루어 보기로 하겠다), 또 實直線上에서 有界閉集合이 지니고 있는 性質을 位相空間에 附與하기 爲하여 Compact Space 의 硏究가 여러 方面으로 이루어졌다.

于先 實直線上에서의 Heine-Borel 의 定理를 回想하여 보자. 即

"開集合族 $\mathfrak{a} = \{\bigcup_\alpha : \alpha \epsilon A\}$ 가 有界閉集合 E(實直線위의)의 被覆(covering)이면 即

$E \subset \bigcup \{\bigcup_\alpha : \alpha \epsilon A\}$ 이면 $\mathfrak{a}$ 의 有限部分集合族 $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ 이 $\mathfrak{a}$內에 存在하여 이것이 亦是 被覆으로 된다"는 것이 이 定理의 內容이다. 이 定理의 位相空間에로의 擴張을 爲하여 우리는 Compact Space 의 定義를 다음과 같이 한다.

"S 가 位相空間으로서 S 의 任意의 open covering $\mathfrak{a}$ 가 恒常 finite subcovering 을 가지면 S 를 Compact 라 한다" 이 Compact space 의 定義는 그 雙對命題의 對遇를 生覺하면 다음과 같이 陳述할 수도 있다.

S의 部分集合族 $L = \{F_\alpha : \alpha \epsilon A\}$ 가 finite intersection property 即 L 의 任意의 有限個 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 의 交集合인 $\bigcap_{i=1}^{n} \{F_i\}$ 가 恒常 空集合이 아니라는 性質을 가지면 $\bigcap \{\bar{F}_\alpha : \alpha \epsilon A\}$ 도 空이 아니라는 것으로 compact 性을 表示할 수 있다. 本來 이 compact space 를 定義하는데 있어서 Fréchet 는 現在 우리가 使用하는 countable compactness 를 가지고 compact 라 불렀고 現在 compact 라고 부르는 것을 bicompact 라고 불렀다. (P. Alexandroff-H. Hopf 의 Topologie). 勿論 實直線 自體는 compact space 는 아니지만 Euclidian n-space 에서 한 部分集合이 compact 이기 爲한 必充條件은 그것이 closed bounded 이라는 것이 Heine-Borel 의 定理에서 말 할 수 있다.

이와 같이 Heine-Borel 의 定理에서 抽象된 compact space 에 關하여 많은 硏究가 이루어 졌으며 特히 이 空間에서는 위에서 말한 Cantor 의 定理가 成立하게 된다. 特히 compact space 에 關한 다음 Tychonoff 의 定理가 有名하다. 即

"任意個의 compact space 들의 product space는 亦是 compact space 이다.

이 定理에 對한 證明法은 여러種類가 紹介되어 있으나 特히 Bourbaki 의 證明法은 興味롭다. (J. H. Kelley, General Topology, N. Bourbaki, Topologie Générale 1章 § 10, 參考)

이 compactness와 關聯하여 實數의 部分集合으로서 가장 興味로운것은 Cantor set의 構造인 것이다. Cantor set 란 周知한 바와 같이 單位線分 [0, 1]의 部分集合으로서 三進無限小數로 展開하였을 때 0과 2만으로서 展開되는 數全體를 말한다. 只今 M을 단두點으로 이루어진 discrete topological space라 하고 ω를 positive integer 全體의 集合이라 할 때 Tychonoff Topology를 가지는 函數空間 M^{ω}를 生覺하면 Cantor set가 이 M^{ω}와 同位相(homeomorphic)으로 된다는 것은 容易하게 볼 수 있다. 只今 ω 代身 任意의 集合 Ω를 生覺할 때 函數空間 M^{Ω}를 Cantor Space 라 부르기로 하자. 그러면 任意의 Compact Hausdorff Space는 適當한 Cantor Space의 閉部分集合의 連續像(continuous image)으로 된다는 것도 容易하게 證明할 수 있다. 이 事實은 Compact Hausdorff Space의 構造가 Cantor set의 構造를 通하여 把握될 수 있다는 것을 意味한다.

只今 Point set Topology에서 重要한 位置를 차지하고 있는 Borel set 또는 operator A를 通하여 이루어지는 Analytic set는 그 構造가 퍽 複雜한 것이지만 그것이 모두 無理數全體의 連續像으로 恒常表示 可能하다는 事實을 위의 Cantor set의 境遇와 아울러 生覺한다면 Compact Hausdorff Space나 Borel set, analytic set, 하는 것이 도두 實數의 한 部分集合에서 派生된 것에 不過하다는 것을 알 수 있으며 나아가서는 實數集合의 構造의 多様性을 立證하여 주는 좋은 例인것이다. (Borel set, analytic set에 關하여는 F. Hausdorff Mengenlehre (1935), 또는 W. Sierpinski, general topology (1956)를 參考). Cantor set에 關하여는 J. L. Kelley, general Topology의 compact space 參考).

Cantor set에 關하여 마지막으로 또 하나 이야기 하여 둘 것은, Compact totally disconnected perfect metric space는 그것이 어떤 種類의 것이건 恒常 Cantor set와 同位相(homeomorph)으로 된다는 事實이 inverse limit systems을 使用하면 證明된다. (G. S. Young 및 J. G. Hocking의 Topology 2章 inverse limit systems 參考). 이 事實도 亦是 Cantor set의 構造의 重要性을 우리에게 보여주는 좋은 例題의 하나이다.

이와 같은 例題以外에도 實數體의 構造로서 抽象空間과 關聯되는 重要한 性質이 많지만 여기서는 더 以上 言及치 않기로 한다.

다시 compactness로 되돌아가 보자. Compact 性보다 若干 弱한 條件으로서 Compact 性이 局部的으로 附與된 locally compctness도 그 應用面에서 퍽 重要性을 지니고 있다. 位相空間 S가 locally compact라 함은 그 空間의 各點이 적어도 하나의 compact인 近傍을 가질 때를 말한다. 이 locally compact space의 構造는 特히 measure theory와 結附되어 많은 研究가 이루어졌다.

只今 S를 locally compct Hausdorff space라 하자. S의 모든 compact subset의 族을 $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$에 依하여 生成된 σ-ring을 S라 할 때 S의 集合을 Borel set라 부르며, S위에서 定義된 實函數 f가 σ-ring S에 關하여 measurable이면 f를 Borel measurable이라 한다. 特히 S의 compact subset로서 G_δ型의 集合全體를 $\mathcal{C}_0$. $\mathcal{C}_0$에 依하여 生成된 σ-ring을 S_0로 表示할 때 이 S_0에 속한 集合을 Baire set라 부르며, 이 S_0에 關하여 measurable인 實函數를 Baire measurable이라 한다. 只今 S위에서 定義된 連續實函數로서 S의 한 compact subset의 外部에서는 恒等的으로 0으로 되는 그런 函數의 全體族을 L(S)로 表示하기로 하고, μ를 Borel set 族 S위에서의 measure, μ_0를 그 Baire contraction이라 할 때는 L(S)에 속한 任意의 函數 f는 $\{x:f(x)\neq 0\}\subset C\in\mathcal{C}_0$ 이면 $\mu_0(c)<\infty$로 되어 f는 μ_0에 關하여 積分可能하여 $\int fd\mu_0=\int_c fd\mu_c$로 된다. 이와같이 하여 Lebesgue에 依하여 Enclid 空間에서 定義된 Lebesgue 積分은 locally compact Hausdorff space에 까지 擴張可能하게 된다. (P. R. Halmos, Measure theory, 10章 locally compact spaces) 또는 河田敬義, 積分論 參考)

特히 S가 locally compact topological group이면 S에서의 Borel measure μ는 다음 條件을 滿足할 때 Harr measure라 한다. 即 모든 空이 아닌 Borel 開集合 U에 對하여 $\mu(U)>0$ 이고, 모든 Borel 集合 E에 對하여 $\mu(xE)=\mu(E)$가 成立하는 μ를 말한다. 이와같이 하여 Lebesgue measure는 locally compact topological group에서 Harr measure에로 擴張되었다. 이와 같이 locally compactness는 그 應用面에서 重要한 位置를 차지함을 알수 있다. (P.R. Halmos, measure theory 11章, Harr measure 및 河田敬義, 積分論 또는 淡中忠郞, 位相群論 4章 參考).

compact space 에 關한 重要한 問題의 하나로 마지막으로 言及하여 두어야 할 問題는 compactification problem (compact 化問題)인 것이다. 即 주어진 位相空間 S를 그 部分空間으로 가지는 compact space $\bar{S}$를 求하는 問題를 compactification 問題라 부른다. 이와 같은 問題는 이미 여러곳에서 經驗하여 왔다. 假令 Euclid 實直線에다 ∞를 導入하여 射影直線을 만드는 것도 이에 該當되는 것이고 또 우리가 積分論(Lebesgue)에서 實數全體의 集合인 R 에다 $+\infty$, $-\infty$를 添加하여 擴大된 實數集合을 生覺하는 것도 그 한 例이다. 이 擴大된 實數集合에 있어서는 本來實數全體의 順序는 그대로 保存하고 $+\infty$를 最大數, $-\infty$를 最小數로 生覺함으로서 擴大된 實數集合은 그 順序位相 (여기서 順序位相이란 線型順序集合 (S, <)에 있어서 $\{x:x<a\}$ 또는 $\{x:a<x\}$ 型의 모든 集合들의 族을 subbase 로 가지는 位相을 말한다)에 關하여 compact space 로 되며 R 의 閉胞인 $\bar{R}$는 擴大된 實數集合 即 $R\cup(+\infty)\cup(-\infty)$로 된다. 이 $\bar{R}$에서는, 實數의 連續性을 表示하는 Weierstrass 의 定理 即 "有界 數集合에는 上限 및 下限이 存在한다"는 有界라는 條件을 除去해도 成立하게 된다.

또 하나의 compactification 의 例로서 우리가 자주 使用하는 것은 複素數平面上에다 ∞를 添加하는 것이 그것이다. 複素數函數論에서 複素數體에다 ∞를 添加함으로서 모든 理論이 便利하게 展開되게 되는데 이것을 位相數學的 見地에서 본다면 one-point compactification 을 한데 不過한 것이다. 그러면 于先 compactification 의 가장 簡單한 例로서 one-point compactification 을 生覺하여 보기로 하자.

one-point compactificaton 이란 位相空間 S 에다 한點 ∞를 添加하여 set $S^*=S\cup\{\infty\}$를 만들고 S^*에다 適當히 位相을 導入하여 S^*를 compact space 로 만들되, S는 S^*의 部分空間으로서 S 의 本來位相이 S^*에서의 相對位相과 一致하게 되도록 하는 것을 말한다. 그러기 爲하여는 다음과 같이 하면 된다. 即 S^*에서 U 가 open 이라는 것은 다음 i), ii) 條件이 滿足 될 때를 뜻하기로 하자. 即

i) $U\cap S$가 S에서 open 이고

ii) $\infty\in U$ 이면 $S-U$ 가 compact 이라야 한다.

이와 같이 導入된 開集合의 族은 S^*의 한 位相으로되며 이때 S는 S^*의 dense subspace 로 되어 있다. 이 one-point compactification 은 Alexandroff 에 依하여 이루어진 것이다.

보다 一般的인 compactification 으로 Stone-čech 의 compactification 을 生覺할 수 있다. 그러기 爲하여 여기서 compactification 의 正確한 定義를 하여 두기로 하자. 即 位相空間 S의 compactification 이란 雙(f, T)를 말하되 여기 T 는 compact 인 位相空間이고, f 는 S를 T 의 dense 인 部分空間위로 옮기는 位相寫像(homeomorphism)이다. 萬一 T가 Housdorff 空間이면 (f, T)를 Hausdorff compactification 이라 한다. 이와같이 compactification 의 定義를 하면 位相空間 S 의 모든 compactification 들의 族에다 順序關係를 導入할 수 있으며, 이 順序關係로서 compactification 全體의 族은 半順序集合으로 된다.

그러면 이제 čech 의 compactification 을 生覺하여 보자. S를 位相空間, F(S)를, S를 單位線分 $[0, 1]=I$ 內로 옮기는 모든 連續函數의 集合이라 하자. 그러면 平行體 $I^{F(S)}$는 Tychonoff 定理에 依하여 compact space 로 된다. 只今 mapping $e:S\rightarrow I^{F(S)}$를 다음과 같이 定義하자. S의 點 X를 $I^{F(S)}$의 點 e(x)로 옮기되, F(S)의 各 f에 對하여 e(x)의 f번째 座標가 f(x)로 되어 있다 하자. 이와 같이 定義된 寫像 e는 連續寫像으로 되며 特히 S가 Tychonoff space (completely regular T_1-space)이면 e는 S를 $I^{F(S)}$의 部分空間위로의 位相寫像으로 된다. 只今 e에 依한 S의 像인 e(S)의, $I^{F(S)}$에서의 閉胞를 $\beta(S)$로 表示하기로 할 때 雙$(e, \beta(S))$를 S의 Stone-čech 의 compactification 이라 부른다.

이와 같이 導入된 Stone-čech 의 compactification 은 위에서 導入한 半順序關係로 볼 때 maximal compactification 으로 된다는 것을 Stone 및 čech 가 證明하였다.

(E. čech, On bicompact spaces, Ann. of Math. 38(1937), M. H. stone, Application of the theory of Boolean rings to general Topology. Trans. Amer. Math. Soc. 42(1937)).

마지막으로 널리 알려진 Wallman compactification 을 하나 더 紹介함으로서 compact 化問題를 끝맺기로 하자.

只今 S를 T_1 space. F를 S의 모든 closed subset 들의 族이라 하고, 그리고 $\omega(S)$를, F와

subfamily a로서 finite intersection property를 가지되 이 性質에 關하여 F에서 maximal인 그런 a들 全體의 族이라 하자. 그러면 $\omega(S)$의 한 元 a에 關하여 a의 任意의 두元의 intersection은 亦是 a의 元으로 되고 또 그 dual도 成立하게 된다.

여기서 $\omega(S)$에다 位相을 다음과 같이 導入하자. 即 S의 各開集合 U에 對하여 U^*를 다음과 같은 것이라 하자. $\omega(S)$의 元 a로서, U의 subset가 a의 元으로 되어 있는 그런 a全體의 族을 U^*라 부르기로 하자. $U^*=\{a: a\in\omega(S),\ a$의 한 元이 U의 部分集合으로됨$\}$ 이다. 이와 같은 U^*들의 全體族은 어떤 位相에 對한 base의 條件을 滿足하게 되며 이것을 base로 가지는 位相을 $\omega(S)$內에 導入하면 $\omega(S)$는 compact space로 된다.

이 때 S를 $\omega(S)$ 內로 옮기는 寫像 φ를, S의 各點 x에 對하여 式 $\varphi(x)=\{A: A\in F, x\in A\}$에 依하여 定義하면 φ는 one-one cont.로 되고 $\varphi(S)$는 $\omega(S)$에서 dense subset로 된다. 雙$(\varphi, \omega(S))$가 Wallman compactification인 것이다. 여기서 興味있는 것은 空間 S가 normal space이면, $\omega(S)$는 Hausdorff space로 되며 이때 Wallman compactification은 事實上 Stone-Čech compactification과 位相的으로 equivalent로 되고 만다는것이다.

위에서 compact化 問題의 代表的인 것을 한두個 紹介하였지만 이 外에도 많은 사람들에 依하여 이와 같은 問題가 다루어 졌다.

假令 Tychonoff compactification이라든가 또는 1950年代에 Myškis가 이루어 놓은 業績等은 無視할 수 없는 것이다. 그는 compactification 問題를 두 方向으로 分離하여 compactification을 外的 記述과 內的記述의 두 種類로 나누어 硏究하였고 또 이와 같은 方向에서 많은 業績도 이루어졌다. (A. D. Myski. i) On the concept of boundary, Mat. Sborik 25(1949), ii) The definition of boundary by means of continuous mapping. Mat. sbornik 26(1950), iii) On the equivalence of certain methods of definition of boundary. Mat. sbornik 26(1650) 參考) 이外에도 topological group의 compact化問題, 또는 uniform space. function space의 compact化問題等 現在도 이 方向의 많은 硏究가 繼續 進行되고 있음을 附記하여 두고 紙面의 制限上 나머지部分인 距離化問題, uniformity 等에 關한 問題는 다음 回로 밀기로 한다. (다음回에 계속)

1964. 4. 20. (延世大)