函 數 解 析 學

— 位相 벡터 空間을 主로 —

宋　　基　　善

1. 緖　言

無限次元의 函數空間의 解析을 主題로 하는 函數解析學은 Volterra 의 變分學의 硏究에 그 始初를 둔 것으로 그後 積分方程式의 解를 求하는 問題가 그의 發展을 크게 刺戟하였다. 公理的이고 抽象的인 方法을 取하므로서 個個의 問題를 別途로 取扱하는 것보다 統一的이고 一般的인 結論을 얻게 되는 이 函數解析學의 廣範圍한 全般에 걸치어 그 解說을 꾀한다는 것은 現在의 筆者로서 能히 到達하지 못하는 領域에 屬하는 것이 分明하므로 主로 位相 Vector 空間論의 解說을 試圖하되 本稿의 材料는 거의 Goffman 의 解說的인 論文 Preliminaries to Functional Analysis, Studies in Modern analysis(4)와 Bourbaki 의 Espaces Vectoriels topologiques(3)에서 取한 것이다.

2. 固定點定理

f 가 實數體 R 위에서 定義된 實函數로 條件 (※) 한 常數 k, $0<k<1$, 가 存在하되 임의의 $x\epsilon R$, $y\epsilon R$ 에 對하여

$$|f(x)-f(y)|\leqq K|x-y|$$

를 滿足한다고 하자. 이때 우리는 函數 f 에 固定點, 卽 $f(x)=x$ 되는 點이 오직 한個 存在함을 다음과 같이 말할 수 있다.

그 固定點을 찾기 爲하여 우리는 所謂漸次 近似法을 使用한다. 卽 任意의 한 點 x 를 擇하여 이 點을 $x_1=x$ 로 놓자. 다음에 $x_2=f(x_1),\cdots\cdots$, $x_{n+1}=f(x_n),\cdots\cdots$ 이와 같이 하여 우리는 한 점렬(수열) $\{x_n\}$ 을 얻는데 그 動態를 보기 爲하여 그 距離를 생각하여 보면 條件 (※)에 依하여

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqq k|x_n-x_{n-1}|$$
$$=k|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\leqq k^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqq\cdots$$

$\leqq k^{n-1}|x_2-x_1|$ 을 얻는다. k는 $0<k<1$ 인 常數이었으므로 任意의 $\varepsilon>0$ 에 對하여 N을 定할 수 있되

$$\sum_{n\geqq N} k^n<\varepsilon$$

되게 할 수 있다. 그러면 $n\geqq N$ 이고 p가 任意의 自然數일 때

$$|x_{n+p}-x_n|\leqq\sum_{i=1}^{p}|x_{n+i}-x_n|\leqq\sum_{i=1}^{p}k^{n+i-1}|x_2-x_1|\leqq|x_2-x_1|$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}k^{n+i-1}=|x_2-x_1|\sum_{n\geqq N}k^n<|x_2-x_1|\varepsilon$$

이와같이 하여 점렬 $\{x_n\}$ 은 Cauchy 의 收斂條件을 滿足하므로 한 點 x_0 에 收斂하겠다. 이 點 x_0 가 函數 f 의 固定點이 됨은 f 가 連續(事實上 條件(※)는 f 가 平等連續임을 뜻한다)임을 注意하면

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x_0$$

에서 곧 알 수 있어 과연 f 의 固定點은 存在한다. 지금 y 가 f 의 또 하나의 固定點, 卽 $f(y)=y$ 이라 하면

$$|x_0-y|=|f(x_0)-f(y)|\leqq k|x_0-y|$$

이요, k 는 <1 인 正數이므로 $x_0=y$ 될 수 밖에 없어 固定點이 存在하되 오직 하나밖에 없음이 完全히 밝혀졌다.

定理1 函數 f 가 實數體 R 위에서 定義된 實函數로 條件 (※)를 滿足하면 f 의 固定點이 오직 하나 存在한다.

3. 距離空間

위의 定理1의 證明은 實數體 R 이 實數의 絶對値에 關하여 距離空間(卽 두 實數 x 와 y 사이의 距離 $d(x,y)$ 로 $|x-y|$ 를 擇한다)임과 實數體의 完備性(completeness)에 依存하였으므로 그 定理의 擴張을 꾀할 수 있겠다.

지금 한 集合 E 의 任意의 두 元의 雙 (x,y) $(x\epsilon E,\ y\epsilon E)$ 에 對하여 한 實數 $d(x,y)$ 가 對應하되 任意의 元 $x\epsilon E$, $y\epsilon E$, $z\epsilon E$ 에 對하여

1) $d(x,y)\geqq 0$ 이고 等號는 $x=y$ 일때, 그리고 이때에 限하여 成立하고

2) $d(x,y)=d(y,x)$ (對稱性)

3) $d(x,z)\leqq d(x,y)+d(y,z)$ (三角不等式)를 滿足할 때 E 를 "d 를 距離로 하는 距離空間"이라 한다.

d 를 距離로 하는 距離空間 E 內의 점렬 $\{x_n\}$ 이

한 點 x_0에 收斂한다는 것은 任意의 $\varepsilon>0$에 對하여 한 自然數 N을 찾을 수 있되 $n \geqq N$이면 $d(x_n, x_0)<\varepsilon$ 되게 할 수 있음을 뜻한다. 만일 任意의 $\varepsilon>0$에 對하여 한 自然數 N을 찾을 수 있되 $m \geqq N$, $n \geqq N$이면 $d(x_m, x_n)<\varepsilon$ 되게 할 수 있을 때 점렬 $\{x_n\}$은 Cauchy 점렬이라 부른다. 收斂하는 點列은 Cauchy 점렬이나 Cauchy 점렬이 반드시 收斂한다고 할 수는 없다. 모든 Cauchy 점렬이 收斂하는 距離 空間은 完備이다 라고 말한다. 그러면 우리는 다음 固定點 定理를 얻는다.

定理 2. E를 完備인 距離空間이라 하자. E위에 定義된 E로 가는 函數 f에 對하여 한 定數 k, $0<k<1$,가 存在하되 임의의 $x \in E$, $y \in E$에 對하여

$$d(f(x),\ f(y)) \leqq kd(x,y)$$

이면 f는 오직 하나의 固定點을 갖는다.

이 定理의 證明은 定理1의 그것과 거의 같으므로 省略하고 精力的이고 探究心이 强한 讀者의 演習問題로 남긴다.

4. 距離벡터空間

E_n을 n次元의 Euclid 空間, 即 모든 n個의 實數의 排列 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in R,\ i=1, 2, \cdots n\}$의 集合이라 하자. E_n의 任意의 두 元 $x=(x_1, x_2, \cdots x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots y_n)$ 사이의 거리를 다음과 같이 定義할 수 있다.

$$d_1(x,y)=\sup_{1 \leqq i \leqq n}|x_i-y_i|$$

$$d_2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

$$d_3(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_4(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p>1)$$

d_3이 事實上의 거리됨은 任意의 두 實數 a와 b에 對하여 잘 알려진 不等式

$$2|ab| \leqq a^2+b^2$$

에 基礎를 둔 所謂 Cauchy-Schwarz의 不等式, 即 任意의 實數 $a_1, a_2 \cdots, a_n$; $b_1, b_2 \cdots, b_n$에 對하여 成立하는

$$(\Sigma|a_i b_i|)^2 \leqq (\Sigma a_i^2)(\Sigma b_i^2)$$

을 利用하여 證明할 수 있는 不等式

$$[\Sigma(a_i+b_i)^2]^{\frac{1}{2}} \leqq [\Sigma a_i^2]^{\frac{1}{2}}+[\Sigma b_i^2]^{\frac{1}{2}}$$

에서 $a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$로 놓아

$$[\Sigma(x_i-z_i)^2]^{\frac{1}{2}} \leqq [\Sigma(x_i-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}+[\Sigma(y_i-z_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

을 얻으므로 即

$$d(x,z) \leqq d(x,y)+d(y,z)$$

를 滿足하기 때문이다.

d_4에 對해서는 우리가 알고있는 不等式 $p>0$, $q>0$이고 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 이면 任意의 두 實數 a, b에 對하여

$$|ab| \leqq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}$$

(이 不等式은 위의 不等式 $2|ab| \leqq a^2+b^2$의 擴張임을 注意)

을 利用하여 證明할 수 있는 Hölder의 不等式 (Cauchy-Schwarz의 不等式의 擴張):

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

을 써서 얻는 Minkowski의 不等式

$$(\Sigma|a_i+b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leqq (\Sigma|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\Sigma|b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

을 利用하면 된다. 뿐만 아니라 E_n內의 두 元 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$과 $y=(y_1, y_2 \cdots, y_n)$ 사이의 合을

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2 \cdots, x_n+y_n)$$

로 定義하고 또 한 元 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$과 한 實數 λ와의 곱을

$$\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

로 定義하면 E_n은 하나의 벡터空間을 이룬다. 벡터空間 E_n위에 거리 d_1, d_2, d_3 그리고 d_4를 넣어 생각하였을 때 그 空間을 各各 $l_\infty(n)$, $l_1(n)$, $l_2(n)$, $l_p(n)$으로 表示한다.

定理 3 空間 $l_\infty(n)$, $l_1(n)$, $l_2(n)$, $l_p(n)$은다 完備인 거리공간이다.

本 定理는 本質的으로 實數의 完備性에 基盤을 둔 것으로 그 證明은 위에서 말한 諸不等式을 쓰면 된다.

5. 노름空間

앞절에서 말한 結果는 곧 無限次元으로 擴張할 수 있다. 即

l_∞로서 모든 實數列 $x=(x_1, x_2, \cdots)$으로서 $\sup_i|x_i|<\infty$인 것들의 集合

$l_1=\{\alpha=(x_1, x_2, \cdots) : \Sigma|x_i|<\infty\}$, 즉 모든 絶對收斂하는 數列들의 空間

$$l_2=\{x=(x_1, x_2, \cdots) : \Sigma|x_i|^2<\infty\},$$

$$l_p=\{x=x_1, x_2, \cdots) : \Sigma|x_i|^p<\infty\}$$

위의 空間들은 그 空間內의 두 元의 合을 "自然的"으로 定義하고(좌표끼리) 또 한 元과 한 實

數와의 곱을 "自然的"으로 定義하면 벡터空間됨은 쉽게 볼 수 있으나 다만 앞절에서 본 諸不等式의 $n\to\infty$인 境遇(이는 事實上 모든 有限의 경우의 極限이므로 萬一 그不等式들이 모든 有限의 境遇에 成立한다면 自動的(?)으로 無限의 境遇에도 成立함이 期待된다!)를 앞절에서 본 距離 d_1, d_2, d_3 그리고 d_4를 定義한 式에서 Σ 記號의 上端인 n을 各各 ∞로 바꾸어 놓으면 對應하는 空間 l_∞, l_1, l_2, 그리고 l_p에서의 距離를 주는 定義式을 얻는다.

벡터空間의 距離는 그 空間위에 定義된 "노름"(norm)로 因하여 定해질 때가 있다. 한 벡터空間 E위의 노름은 E위에서 定義된 實數値 函數로 (x의 노름을 $\|x\|$로 表示)

1) 零벡터 θ의 노름 $\|\theta\|=0$이요,
$x\neq\theta$이면 $\|x\|>0$

2) 任意의 實數 λ에 對하여 $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

을 滿足하는 것이다. 벡터空間 E위에 한 노름이 定義되어 있을 때 E를 노름벡터空間(normed linear spacd) 또는 簡單히 노름空間이라 부른다. E가 노름空間일 때 두 元 $x\in E$와 $y\in E$ 사이의 距離를

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

로 定義하면 E는 하나의 距離空間이 된다.

위에서 말한 空間들 l_∞, l_1, l_2 그리고 l_p의 元 x에 對하여 各各 $\|x\|_\infty=\sup|x_i|$ $\|x\|_1=\Sigma|x_i|$, $\|x\|_2=(\Sigma|x_i|_2)^{\frac{1}{2}}$, $\|x\|_p=(\Sigma|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$로 定義하면 이들은 各各 對應하는 空間위의 노름이 되고 이 노름들에 依하여 定義되는 距離는 우리가 처음 出發한 距離와 같다.

完備인 노름空間을 Banach 空間이라 부른다.

定理 4 위에서 본 諸空間은 Banach 空間이다.

讀者에게 이 定理를 證明해 보시기를 권한다.

6. Banach 空間

重要한 노름空間은 위에서 말한 數列空間에서보다 函數空間, 即 一定한 集合위에서 定義된 函數들을 元으로 하는 空間에서 찾아볼 수 있다. 가장 간단한 것으로 單位區間 $I=[0, 1]$ 위에서 定義된 모든 連續函數들의 集合을 C(I)로 나타내면 이것이 벡터空間을 이룸은 밝고 또 임의의 元 $f\in C(I)$에 對하여

$$\|f\|=\sup\{|f(t)|: t\in I\}$$

로 定義하면 C(I)가 노름空間됨도 보기 쉽다. 또한 C(I)가 完備, 따라서 Banach 空間됨은 "連續函數列의 平等極限은 하나의 連續函數이다"의 定理에 依하여 알 수 있다. 또 하나의 古典的, 그러나 大端히 重要한 空間으로 L_p空間들이 있다. 即 任意의 正數 $p\geq1$에 對하여 그 p제곱이 絕對可積分(Lebesgue)인 函數들의 空間이다. 따라서 $f\in L_p$는

$$\int_0^1|f(t)|^p dt<\infty$$

를 뜻한다 (*). Holder, Minkowski 不等式의 積分版이 또한 成立하여 L_p空間이 벡터空間을 이루고 또한 任意의 $f\in L_p$에 對하여

$$\|f\|_p=\left[\int_0^1|f(t)|^p dt\right]^{1/p}$$

로 定義하면 L_p는 이 노름에 對하여 Banach 空間이 됨이 證明된다.

7. 다시 固定點定理에 關하여

固定點 問題의 한 應用으로 다음 問題를 생각하여 보자. 지금 $k(x,y)$는 $0\leq x\leq1$, $0\leq y\leq1$에서 連續인 函數, $g(x)$는 $0\leq x\leq1$에서 連續인 函數라 할 때 Fredholm 形의 積分方程式

$$(**)\quad g(x)+\lambda\int_0^1 k(x,y)f(y)dy=f(x)$$

을 滿足하는 連續函數(區間 $0\leq x\leq1$ 위에서 定義된) f가 存在하느냐?

任意의 函數 $u\in C(I)$에 對하여 한 點 $x\in[0,1]$에서의 函數値가 $g(x)+\lambda\int_0^1 k(x,y)u(y)dy$로 決定되는 函數를 Ku로 나타내면, 即

$$(Ku)(x)=g(x)+\lambda\int_0^1 k(x,y)\cdot u(y)dy$$

이면 g의 連續性과 k의 平等連續性을 利用하여 Ku도 I위에서 定義된 連續函數임이 밝혀져, 即 $Ku\in C(I)$이 되어 $K:u\to Ku$는 C(I) 위에 定義된 C(I)에로 가는 函數(線型)됨을 알 수 있다. 그리하여 函數 f가 積分方程式 (**)의 解됨은 $Kf=f$, 即 f가 變換 K의 固定點됨과 같은 뜻이다. 지금 任意의 두 元 $u\in C(I)$, $v\in C(I)$에 對하여 Ku와 Ku의 距離를 求해보면

$$\|Ku-Kv\|=\sup_{x\in I}|Ku(x)-Kv(x)|$$

(*) 正確하게 말하면 거의 도처에서 0되는 函數의 積分은 0이므로 L_p空間은 그 p제곱이 絕對可積分인 函數들의 거의 도처에서 0되는 函數들에 對한 商空間으로 定義된다.

$$=\sup_{x\in I}\left|\left[g(x)+\lambda\int_0^1 k(x,y)u(y)dy\right]\right.$$
$$\left.-\left[g(x)+\lambda\int_0^1 k(x,y)v(y)dy\right]\right|$$
$$=|\lambda|\sup_{x\in I}\left|\int_0^1 k(x,y)\Big(u(y)-v(y)\Big)dy\right|$$
$$\leqq|\lambda|\sup_{x\in I}\int_0^1|k(x,y)||u(y)-v(y)|dy$$
$$\leqq|\lambda|M\sup_{y\in I}|u(y)-v(y)|=|\lambda|\cdot M\|u-v\|$$

여기서 $M=\sup\{|k(x,y)|: x\in I, y\in I\}$

그러므로 만일 $|\lambda|M<1$ 卽 $|\lambda|<\frac{1}{M}$인 λ에 對하여는 定理2를 適用할 수 있어 積分方程式(✻✻)는 오직 하나의 解를 가짐을 알 수 있다.

8. Hilbert 空間

4節에서 본 空間 l_2는 Hilbert가 積分方程式

$$U(x)+\int_a^b k(x,y)\cdot U(y)dy=f(x)$$

의 解를 硏究함에 있어서 (1906) 얻은 空間으로 오늘날의 Hilbert空間의 起因이 된 것이었다. Hilbert空間의 公理的인 取扱은 J. von Neumann에 依하여 1929年에 發表되었으며 그는 그의 量子力學의 基礎에 關한 硏究와 關聯하여 有界가 아닌 線型變換을 取扱하였고 한便 거의 같은 무렵에 Stone와 Wintner도 같은 事業에 從事하였다.

Hilbert空間은 Banach空間의 特殊한 것으로 그 노름이 內積(Inner product, scalar product)으로 定義된다.

l_2의 두 元 $x=(x_1, x_2, \cdots)$과 $y=(y_1, y_2, \cdots)$의 內積 (x,y)를

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_iy_i$$

로 定義하면 우리는 곧 다음 事實들이 成立함을 알 수 있다.

1) 임의의 두 元 $x\in l_2$, $y\in l_2$에 對하여

$$(x,y)=(y,x)$$

2) 임의의 두 元 $x\in l_2$, $y\in l_2$와 임의의 實數 λ에 對하여

$$(\lambda x, y)=\lambda(x,y)$$

3) 임의의 $x,y,z\in l_2$에 對하여

$$(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$$

4) 임의의 $x\in l_2$에 對하여 $(x,x)\geqq0$이고 $(x,x)=0$은 $x=0$와 同等

1), 2), 3)에 依하여 內積은 또한

$$(x,\lambda y)=\lambda(x,y),\ (y+z,x)=(y,x)+(z,x)$$

도 滿足함을 알 수 있다. 이와같이 하여 內積은 對稱的인 雙一次形이 되고 또

$$\|x\|=(x,x)^{1/2},\ \|x\|\geqq0\text{이며}$$
$$\|x\|=0\text{은 } x=\theta\text{와 同等}$$

임을 알 수 있다.

一般으로 實數를 係數域으로 하는 벡터空間 H위에 (1), (2), (3), (4)를 滿足하는 內積이 定義되어 있고 H에 노름을

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}$$

로 導入하였을 때 H가 이 노름에 關하여 完備이면 H를 Hilbert空間이라 부른다.

空間 L_2의 任意의 두 元 f와 g에 對하여

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)\cdot g(t)dt$$

를 定義하면 이것이 위의 (1), (2), (3)을 滿足함은 밝으나 (4)는

(4)′ 임의의 $f\in L_2$에 對하여 $(f,f)\geqq0$이고, $(f,f)=0$은 $f=0$(거의 도처)와 同等

으로 代置된다. 그러나 먼저 말한 脚註에 依하면 거의 도처에서 0되는 함수 f는 L_2空間의 θ벡터로 볼 수 있으므로 (4)′ 대신 (4)를 그대로 쓸수 있고 6節에서 定義한 L_2空間의 노름은 $\|f\|_2=(f,f)^{1/2}$으로 表示되어 L_2가 이 노름에 關하여 完備이므로 L_2도 하나의 Hilbert空間됨을 알 수 있다.

Euclid空間에서와 마찬가지로 內積으로 因하여 Hilbert空間內의 두 벡터의 直交性을 말할 수 있다. 卽 두 벡터(元) $x,y\in H$가

$$(x,y)=0$$

을 滿足할 때 x와 y는 서로 直交한다고 말한다. 그리하여 우리는 임의의 Hilbert空間 H內에 完全直交系 $\{x_\alpha\}$, 卽

$$(x_\alpha, x_\beta)=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta\text{이면}\\ 1 & \alpha=\beta\end{cases}$$

을 滿足하는 部分集合을 所謂 Schmidt의 正規直交法에 依하여 定할 수 있다. 이같이 하나의 完全直交系 $\{x_\alpha\}$를 擇하면

定理 5 任意의 $x\in H$는

$$x=\Sigma(x,x_\alpha)x_\alpha$$

로 表示되며

$$\|x\|^2=\Sigma(x,x_\alpha)^2$$

으로 表示된다. 또한

定理 6 두 Hilbert空間 H_1과 H_2의 基의 Cardinality가 같으면 H_1위에서 定義된 H_2위로 가는 函數 Φ를 定할 수 있되 任意의 $\alpha,\beta\in R$, $f,g\in H_1$

에 對하여

$\Phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\Phi(f)+\beta\Phi(g)$, $(\Phi(f),\Phi(g))=(f,g)$ 되게 할 수 있다. 卽 基의 Cardinality 가 서로 같은 두 Hilbert 空間은 本質的으로 같다는 結論을 얻는다. 特히 l_2 와 L_2 는 各各 조밀한 可附番集合을 가지므로 그들은 本質的으로 같다고 볼 수 있다.

9. 位相벡터空間, 局部凸空間

노름空間의 一般的인 定義는 1920—22年 사이에 S. Banach, H. Hahn 그리고 E. Helly 等에 依하여 주어졌고 1934年에 A.N. Kolmogorv 는 一般的인 位相벡터空間(linear topological space)을 着想하되 그 空間이 노름을 갖기爲한 必要充分條件을 發見했다. 그 다음해 1935年 von Neumann 은 局部凸벡터空間(locally convex space)에 對한 公理를 세우고 그 理論을 展開하였다.

지금 E를 하나의 벡터空間이라 하고 E위에 位相이 定義되되

1) E×E에서 E로 가는 函數 $(x,y)\to x+y$ 와

2) R×E에서 E로 가는 函數 $(\alpha,x)\to\alpha x$ 가 連續일 때 E를 位相벡터空間이라 부른다. 지금까지 말한 노름空間, Banach空間 (따라서 Hilbert 空間도)들은 位相벡터空間의 特殊한 例들 이다. 特히 位相벡터空間으로 그 原點이 凸集合(한 集合 V가 凸이라 함은 임의의 $x,y\in V, 0\leq t\leq 1$에 對하여 $tx+(1-t)y\in V$ 됨을 뜻한다)으로 된 近傍系를 가질 때 이것을 局部凸空間이라 한다.

지금 E와 F가 位相벡터 空間이라 할 때 한 變換(函數, 作用素)(transformation, function, operator, map) T가 E위에 定義되고 F를 그 値域으로 갖되 모든 $\alpha,\beta\in R$, $x,y\in E$에 對하여

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$$

를 滿足할 때 T를 線型變換이라 한다. T가 線型일뿐 아니라 連續일 때 T를 連續線型變換(Continuous linear map)이라 하고 E위에서 定義된 F로 가는 모든 連續線型變換의 全部를 $L(E,F)$로 나타내면 $L(E,F)$는 그 元사이의 合과 實數와 그 元사이의 곱을 "自然的"으로 定義하면 또하나의 벡터空間이 된다.

特히 F가 實數體 R와 一致할 때 實數로 가는 E위에 定義된 連續線型變換을 連續線型(素)라 부르고 모든 連續線型들의 集合 卽 벡터空間 $L(E,R)=E'$ 를 E의 位相的 짝(共軛空間)(topological dual)이라 부른다.

한 位相벡터空間 E를 주었을 때 그 位相的 짝 E'를 決定하는 問題는 1909年에 F. Riesz 가 C(I)의 位相的 짝은 모든 Stieltjes 積分 $f\to\int_0^1 fdg$(*) 들의 集合이 됨을 發見한 것을 처음으로 하며 그後 그는 다시 $L_p(1\leq p<\infty)$의 位相的 짝은 L_q $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})$에 同型됨을 本質的으로 究明하였다.

x를 位相벡터空間 E의 한 元 x'를 그 位相的 짝 E'의 한 元이라 할 때 E×E' 위에 定義된 實函數$(x,x')\to x'(x)=\langle x,x'\rangle$를 생각하면 이는 第一變數, 第二變數의 各各에 對하여 線型이 되어 여기서 E의 性質을 究明하는데 그 位相的 짝 E'이 重要한 役割을 하게 됨을 짐작할 수 있겠다. 1935年 以後 이 觀點에 서서 E와 E'를 짝으로 同時에 硏究를 進行시켜 큰 貢獻을 세운 學者 가운데 Dieudonné 와 Mackey 가 있다.

例컨데 位相벡터空間 E에 弱位相, 强位相, E' 內의 適當한 部分集合族 위에서의 平等收斂의 位相 等의 導入(E' 에 對하여도 마찬가지) 또 그들 사이의 關係 等等의 問題들이 다루어 졌다. 그러나 局部凸空間의 理論이 애당초 純公理的으로 出發하였었기 때문에 그後 큰 應用을 發見치 못하였던次 1950年에 L.Schwartz 가 그 超函數論(一般的 函數論)(distribution theory)을 發刊함에 이르러 局部凸空間論이 砂上樓閣이 아님이 證明되었고 이 超函數論은 아직도 그 完成段階에 이르려면 먼 時日이 要하리라고 보겠다. 局部凸空間論에는 特히 Bourbaki 와 Grothendieck의 貢獻이 컸으며 Bourbaki 의 觀點은 空間의 特殊한 性質에 着眼하여 그 性質을 滿足하는 空間의 特徵化를 企圖한 것이라 하겠다.

函數는 그 取하는 函數値를 생각하여 順序 槪念을 導入할 수 있고 또 適當한 線型變換에도 順序槪念을 導入할 수가 있는데 벡터空間으로 同時에 束(lattice)을 이루는 벡터束의 槪念은 1928年 F. Riesz 에 依하여 주어졌고 그後 Banach 空間으로 束을 이루는 Banach束에 對하여는 Freudenthal, Kantorovitch, Kapransky, 中野秀五郞, 吉田耕作 等의 貢獻이 많았다. 局部凸間에 順序 槪念을 導入한 것은 Namioka 와 Schaefer 이었으며

(*) F. Riesz 의 이 理論이 Bourbaki 의 積分論의 出發點이 되었다. 卽 I위의 測度 μ 는 單純히 C(I)위에서의 連續線型, 卽 $\mu\in C(I)'$으로 보는 것이다.

이들은 局部凸空間 內에 順序에 依한 位相과 처음 位相과의 諸 關係를 論하였다.

Bibliography Ⅰ (Books)

1. Achieser, N.J., Glasmann, J.M. *Theorie der linearen Operatioren im Hilbert-Raum, Akademle Verlag, Berlln*, 1958
2. Babach, S. *Théorie des opérations linéaires, Warsaw, Monografie Matematyczne*, 1932
3. Bourbaki, N. *Espaces vectoriel topologique, Chap.* Ⅰ-Ⅴ, *Hermann, Paris*, 1953, 1955
4. Buck, R. C., *Studies in Modern Analysis, The Math. Ass. of Amer.* 1962
5. Dunford, N., Schwarz, J., *Linear operators, Part* 1, *Interscience Publishers, Inc, N.Y.* 1958
6. Grothendieck, A., *Espace vectoriels topologique, Sao Paulo*, 1958
7. Hilbert, D., *Grundzuge einer allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen Leipzig, B.G. Teubner*, 1912
8. Köthe, G., *Topologische lineare Raume, Springer*, 1960
9. Lighthill, M.J., *Introductlon to Fourier Integrals and Generalized Functions, Cambridge, Cambridge University Press*, 1958
10. Ljusternik, L.A., Sobolew, W.I., *Elemente der Funktionalanalysis, Berlin, Berlin Akademie*. 1955
11. Loomis, L.H., *An Introduction to abstract harmonic analysis, New York, Van Nostrand Co.*, 1953
12. Riesz, F.,B. *Sz-Nagy Lecons d'analyse fonctionelle*, 3*rd ed. Budapest, Akademiai Kiado*, 1955
13. Stone, M.H., *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, New York, Amer. Math. Soc.* 1932
14. Taylor, A.E. *Introduction to Functional Analysis, New York, John Wiley Co.*, 1958
15. Schwariz, L. *Théorie des distributions*, Ⅰ, Ⅱ *Hermann* 1950

Bibliography Ⅱ (papers)

1. Banach, S., Steinhaus, H. *Sur le principe de la condensation de singularités, Fund Math.*, 9(1927), *pp.* 51—57
2. Dieudonné, J., *La dualite dans les espaces vectoriels, topologiques, Ann. scien de l'Ecole Normale Sup., ser.* 3, 59(1942), *pp. 107—139*
3. Dieudonné, J., and Schwarz, L. *La dualité dans les espaces (F) et (LF), Ann. de l'Istitut Fourier, 1(1950), pp. 61—101*
4. Freudenthal, H. *Teilweise geordnete moduln, Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen (Amsterdam), vol. 39 (1936), pp. 641—51*
5. Gelfand, I. *Normierte ringe, Math. Sbornik, N.S. 9, (1941), pp. 3—23*
6. Kantorovitch, L.V. *Linear operations in semiordered spaces, Math. Sbornik, N.S. 2 (1937), pp. 121—65*
7. Kolmogorov, A.N. *Zur normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Studia Math. vol. 5(1935), pp.29—33*
8. Köthe, G. *Neubegrundung der Theorie der vollkomenen Raume, Math. Nach. 4(1951), pp. 70—80*
9. Mackey, G.W. *On convex topological linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 60(1946) pp. 519—37*
10. Namioka, I. *Partially ordered linear topological spaces, Memoir No. 24, A.M.S.*
11. von Neumann, J. *Allgemeine Eigenwertteorie Hermitescher Funcktionaloperatoren, Math. Ann. 102(1929), pp. 49—131*
12. …………… *On complete topological spaces Trans. Amer. Math. Soc. 37(1935), pp 1—20*
13. Schaefer, H.H. *Teilweise geordnete Vectorraume* Ⅰ, *Math. Ann. 135(1958), 115—141*
14. …… ……… Ⅱ, *Math. Ann. 138(1959), 259—286*
15. …… ………Ⅲ, *Math. Ann. 141(1960), 113—142*

(西江大學)