◇解　　說◇

實數와 位相(繼續)

金　　致　　榮

實數에서 抽象되는 가장 代表的인 槪念은 距離槪念일 것이다. 實直線上에서 두점 $P(x)$와 $Q(x)$ 사이의 距離 곧 線分 PQ의 길이는 $|x-y|$로서 表示된다. 이와같이 絶對値로서 두點 사이의 距離가 나타나게 되며, 이 槪念은 곧 n次元 Vector 空間에로 擴張가능하다.

假令 順序붙은 n個의 實數의 쌍 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 全體集合을 R^n이라고 하자. 여기 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$은 任意의 實數이다. 只今 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in R^n$이고, $\alpha\in R$ (R은 實數體)일때

$$x+y=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n)$$
$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

으로서 加法과 scalar를 곱하는 方法을 定義하면 이 두 算法은 交換律, 結合律 및 分配律을 滿足하게 되며 R^n은 加群으로 되고 이때 單位元은 $0=(0, 0, \cdots, 0)$으로 된다. 이 R^n은 實數體 위에서의 n次元 Vector 空間이라고 부르며 單位元 $0=(0, \cdots, 0)$을 null vector라고 한다. 또 x와 y의 內積(inner product)를

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

으로서 定義하고 또 x의 norm $|x|$를

$$|x|=(x\cdot x)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

로서 定義하면 n次元 Enclid 空間 R^n을 얻게된다. 이때 두점 x, y 사이의 거리 $\rho(x,y)$를

$$\rho(x,y)=|x-y|$$

로서 定義하면 곧

i) $x, y\in R^n$; $\rho(x,y)\geqq 0$

ii) $x, y\in R^n$; $\rho(x,y)=0 \rightleftarrows x=y$

iii) $x, y\in R^n$; $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

iv) $x, y, z\in R^n$; $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqq\rho(x,z)$

인 關係가 成立하게 된다. 이 4개의 性質이 바로 距離空間에 대한 公理인 것이다. 公理iv)는 三角形의 公理로서 R^n에서는 Schwarz의 不等式을 利用하면 곧 證明되는 事實이다.

이와같이 任意의 集合 X에 對하여 函數 $\rho: X\times X\to R$ 이 위의 公理 i)~iv)를 滿足할때 ρ를 X의 metric이라고 부르고 이 ρ가 定義된 集合 X를 距離空間이라고 불렀다. 特히 公理 ii)를 公理 ii)′ 곧

ii)′ $x, y\in X$: $\rho(x,y)=0\leftarrow x=y$

로 바꾸면 Pseudo metrie 空間 X를 얻게된다.

距離空間 X에서 $S_\gamma(x)=\{y : \rho(x,y)<\gamma,\ \gamma\in R\}$를 x를 中心으로 하고 半經 γ인 球라고 부르기로 할때 族 $B=\{S_\gamma(x) : \gamma\in R,\ x\in X\}$를 base로 擇하면 X에 Topology가 導入되며 따라서 X는 位相空間으로 된다.

그런데 今世紀에 있어서 General Topology의 가장 重要한 問題로 close up 되었든 것은 位相空間이 어떤 條件을 滿足할때 이기다 距離函數 ρ를 適當히 導入하여 巨離 ρ에 依하여 導入되는 族 $B=\{S_\gamma(x) : \gamma\in R,\ x\in X\}$를 base로 가지는 位相 即 距離 ρ에 依하여 誘導되는 位相이 이空間의 本來의 位相과 一致하게 할수 있느냐 하는 것이었다. 이것을 General Topology에서는 位相空間의 距離化 問題(Metrizability Problem)이라고 일커른다.

이 問題는 General Topology에서는 가장 重要한 問題로서 그동안 많은 Topologist들에 依하여 다루어 졌으며 1951年에 이르러서야 完全히 解決되었다. 맨처음에 이 問題에 着手한 사람은 P. Urysohn이었다. 그는 位相空間 X가 距離化可能한 必要充分條件을 誘導한 것이 아니고 充分條件만을 提示하였던 것이다. 即 그는 位相空間 X가 metrizable이기 爲한 充分條件으로서 그것이 regular T_1이며 同時에 countable base를 가진다는 것이었다.

그러나 이것은 必要條件은 아니었다. regular T_1-space가 countable base를 가지면 이 空間은 必然的으로 separable space로 되며, 距離空間 반드시 separable은 아니기 때문이다.

이러한 缺點을 보충하기 爲하여 그後 많은 數學者가 努力한 결과 1937年 佛蘭西數學者 A. Weil가 그의 論文 "Sur les espace á structure uniforme"에서 uniform space의 構造를 硏究하는 途中 實質的으로는 位相空間 X가 距離化可能하기 爲한 必要充分條件은 X가 K-base를 가진다는 것임을 보여준 셈이다. 그러나 여기서 滿足할만한 結論을 주지 못하였기 때문에 結局 이 距離化問題는 1950年 R. H. Bing 및 Nagata에 依하여 또 그다음해인 1951 에는 Smirnov에 依하여 完全히 解決을 보게 된것이다.

即 R. H. Bing은 그의 論文 "Metrization of Topological Spaces"에서 位相空間 X가 距離化可能한 必要充分條件으로서 그것이 regular T_1이며 σ-discrete base를 가진다는 것을 提示하였다.

여기서 σ-discrete base의 說明을 하여두기로 하자. 位相空間 X의 部分集合族 A가 locally discrete라 함은 X의 各點이 오로지 A의 많아야 한개 하고만 만나는 近傍을 가질때 이때만 locally discrete라고 부르며, 特히 族 A가 σ-discrete라 함은 A가 locally discrete인 subfamily들의 countable 개의 union으로 되어 있을 때만을 말한다.

이와같이 定義된 σ-discrete인 集合族 A를 가진다는 條件으로서 countable base를 가진다는 條件과 代置함으로서 空間이 separable이라는 條件이 除去되어 必要充分條件으로 되게 되었다. σ-discrete인 槪念과 類似한 槪念으로서 σ-locally finite의 槪念을 導入하여 countable base를 가진다는 條件과 代置한것이 J. Nagata의 論文 "On a Necessary and Sufficient Condition of Metrizability"(1950)였다. 이보다 一年後에 이와 꼭같은 槪念으로서 亦是 必要條件을 導入한이가 Y. M. Smirnov이다.

Metrization 問題는 位相空間에 對한것 外에 uniform space에 關한것도 있지만 그것은 나중으로 밀기로 하고 다시 實數體로 되돌아가서 生覺하기로 하자.

現代解析學의 根本을 이루고 있는 것은 어디까지나 收斂槪念이라고 볼수 있을 것이다.

實數의 列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}=\{a_n\}$이 收斂하기 爲한 必要充分條件은 任意의 陽數$\varepsilon$에 對하여 適當한 自然數 N이 存在하여 $p, q>N$이면 $|a_p-a_q|<\varepsilon$ 이 恒常成立하는 것이다. 이 事實은 實數內에서 恒常成立하는 事實로서 위의 必要充分條件을 우리는 Cauchy의 判定法이라고 부르고 있다 그러나 이 Cauchy의 判定法은 任意의 距離空間에서는 成立하지 않으며, 一般的으로 이 Cauchy의 條件을 滿足하는 sequence를 Cauchy sequence라고 부른다. 即 距離函數 ρ를 가지는 距離空間 X에 있어서 sequence $\{a_n\}$이 Cauchy sequence 라함은, 恒常

$$\varepsilon>0 : \exists N$$

$$p, q>N \to \rho(a_p, a_q)<\varepsilon$$

인 事實이 成立할때를 말한다. Cauchy sequence가 成立하는 距離空間을 우리는 完備空間이라고 부른다. 곧 이 空間은 點이 完備되어 있다는 뜻이다.

距離空間에서는 위에서와 같이 距離槪念을 빌어서 Cauchy sequence의 槪念을 導入할 수 있지만, 距離가 導入되어 있지 않은 假令 位相空間 같은데는 이槪念을 導入할 수가 없다. 그러면 距離槪念이 없는 位相空間에서는 어떻게 하면 Cauchy sequence의 槪念을 導入할 수 있을까? 하는 問題가 自然히 대두되게 된다.

여기서 解析學에서의 또 한가지 重要한 槪念을 生覺하기로 하자. 解析學에서의 連續函數 $y=f(x)$의 基本性質의 하나로 函數 $y=f(x)$가 閉區間 $[a, b]$에서 連續이면 이 函數는 이 區間에서 一樣連續임을 잘 알고 있다.

只今 이 一樣連續性을 좀더 仔細히 生覺하여 보기로 하자. 函數 $y=f(x)$가 區間$[a, b]$內의 한점 x_1에서 連續이란 任意의 陽數 ε에 대하여 適當한 陽數 δ가 存在하여 $|x-x_1|<\delta$이면 恒常 $|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$ 이 成立할때를 말한다. 그리고 $y=f(x)$가 $[a, b]$ 內의 모든點에서 連續일때 이函數는 이 區間에서 連續이라고 한다. 여기서 注意해야 할것은 各 $\varepsilon>0$에 對하여 δ의 값은 點 x_1이 어디있는가에 따라 그값이 變한다는 事實이다. 곧 δ는 x_1의 函數라고 볼수 있다. 그러나 이 δ의 값이 x_1의 位置에 無關係하게 다

만 $\varepsilon>0$의 값에만 依存하여 定하여질때 函數 $y=f(x)$는 이 區間에서 一樣連續이라고 부른다.

위에서 본바와 같이 函數의 一樣連續性은 두 點사이의 距離槪念을 利用하여 導入되는 槪念임으로 距離空間에서는 이 槪念을 導入할 수 있지만, 距離가 導入되어있지 않은 位相空間같은데서는 이 一樣連續性을 導入할수는 없다. 그러면 어떻게하면 位相空間에서도 一樣連續性의 槪念을 導入할수 있을까?

一樣連續性과 類似한 槪念으로서 函數列 $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}=\{f_n(x)\}$의 一樣收斂性도 生覺할수 있다. 이 一樣收斂性도 亦是 距離槪念을 通하여 誘導되는 槪念이므로 距離空間에서는 生覺할수 있지만 一般位相空間같은데서는 生覺하기 어렵다. 그러면 어떻게하면 位相空間에서도 이와같은 槪念들을 生覺할수 있게 될까?

그러기 爲하여는 距離空間보다는 若干 一般化되어 있지만 位相空間보다는 좀 具體化된 空間, 곧 距離空間과 位相空間과의 中間에 位置한 空間을 生覺하지 않으면 안되게 된다.

一般位相空間에서 이 一樣性을 처음生覺한 사람은 J. Von Neumann 일 것이다. 그는 그의 論文 "On Complete Topological Space"(1933)에서 이 問題를 다루었지만 처음 다루는 것이어서 큰 成果는 거두지를 못하였다. 그러나 1938年에 이르러 A. Weil에 依하여 이問題는 組織的으로 硏究되었다. 그는 그의 論文 "Sur les espaces á structure uniform et sur la topologie générale"에서 비로소 一樣連續性, 一樣收斂性 및 Cauchy sequence의 槪念을 完全히 定義할 수 있는 空間에 到達하였으며 이와같은 空間을 Uniform space (一樣空間)이라고 그는 命名하였다. 이와 前後하여 L.W.Cohen은 그의 論文 "Uniformity Properties in Topological Space Satisfying the First Denumerability postulate"(1937) 및 "On Imbeding Space in a Complete Space"(1939)에서 亦是 이 一樣性을 다루었으며 이들 論文은 勿論 퍽 斷片的이기는 하지만 훌륭한것들이라고 보아야 할것이다.

A. Weil가 처음 導入한 uniform space는 uniform neighbourhood system의 槪念을 通하여 이 空間을 定義하였다. 그는 任意의 集合 X에 대하여 X의 部分集合族 $\mathbf{N}=\{V_a : a\in A\}$ 로서 다음 條件을 滿足하는 것을 生覺하였다. 即

i) 各 $x\in X$ 및 各 $a\in A$에 對하여 $V_a(x)\in\mathbf{N}$ 이며 또 $x\in V_a(x)$이다.

ii) index set A는 order relation$\geqq$에 關하여 有向 集合이다.

iii) $a\geqq b\rightarrow\forall x\in X : V_a(x)\subset V_b(x)$

iv) $\forall a\in A\ [\exists b\in A : y\in V_a(x)\rightarrow x\in V_b(y)]$

v) $\forall a\in A\ [\exists b\in A : y\in V_b(x), z\in V_b(y)\rightarrow z\in V_a(x)]$

이의같은 部分集合族 $(\mathbf{N},\leqq)$을 그는 uniform neiborhood system이라 불렀고 이와같은 近傍系가 導入된 集合 X를 uniform space라고 하였다.

그러나 1940년 J. W. Tukey는 그의 論文 "Convergence and Uniformity in Topology"에서 같은 uniform space를 uniform covering systems을 가지고 定義함으로서 一樣性을 記述하는데 퍽으나 効果的임을 보여주었다. 그러나 이 uniform covering systems의 槪念은 이미 1923年 Alexander와 Urysohn이 位相空間의 metrizability 問題를 다룰때 使用된 槪念과 同一한 것이었다.

其後 많은 數學者들에 依하여 uniform space가 硏究되어 今日에 와서는 uniform space는 大略 다음과 같이 導入되는 것이 普通이다.

한集合 X의 cartesian product set인 $X\times X$의 空이 아닌 部分集合族 $\mathbf{U}$가 다음 條件을 滿足할 때 $\mathbf{U}$를 X의 uniformity라 부르며 双$(X,\mathbf{U})$를 uniform space라 한다.

i) $\mathbf{U}$의 각 member U는 diagonal Δ를 포함한다. (여기 Δ는 $\Delta=\{(x,x) : x\in X\}$인 $X\times X$의 部分集合이다.)

ii) $U\in\mathbf{U}$이면 $U^{-1}\in\mathbf{U}$이다. (여기 U^{-1}는 $U^{-1}=\{(x,y) : (y,x)\in U\}$인 集合을 意味한다.)

iii) $U\in\mathbf{U}$이면 適當한 $V\in\mathbf{U}$가 存在하여 $V\circ V\subset U$로 된다. (여기 $V\circ V$의 뜻은
$$V\circ V=\{(x,z) : (x,y)\in V,\ (y,z)\in V \text{ for some } y\in X\}$$
인 集合을 意味한다.)

iv) $U\in\mathbf{U}$, $V\in\mathbf{U}$이면, $U\cap V\in\mathbf{U}$이다.

v) $U\in\mathbf{U}$이고 $U\subset V\subset X\times X$이면 $V\in\mathbf{U}$이다

이와같이 uniformity를 導入하는 方法은 N. Bourbaki의 Topologie générale에서 取扱된 方法이다. 그러나 uniformity는 또 收斂하는 sequences의 全體 family에 依하여도 定義할 수 있다. 筆者가 論文 "On Definitions of Uniform Space by the Convergence Classes"에서 試圖해 본 方法이 바로 이것이었다.

여기서는 잠시 實數體 R에다 Bourbaki의 方法에 依하여 uniformity를 導入하고 이 uniformity로서 Cauchy sequence의 槪念, uniform continuity 및 uniform convergence의 槪念을 導入하여 보기로 하자.

R이 實數集合일때 R×R의 部分集合 V_γ을 다음과 같이 定義하자.

$$V_\gamma=\{(x,y): |x-y|<\gamma,\ x,y\in R\}$$

여기에서 γ은 任意의 實數이다. 只今 R×R의 部分集合族 U를 V_γ들을 媒介로 하여 다음과 같이 定義하면 U가 바로 R의 Uniformity로 된다. 即

$$U=\{V: V\supset V_\gamma \text{ for some } \gamma\in R\}$$

라고 生覺하면 이 U는 위에서 말한 uniformity에 關한 5個의 性質을 滿足하게 되며 따라서 R에 對한 uniformity로 된다. 그러면 이 uniformity에 依하여 R內에다 다음과 같이 topology를 導入할 수도 있다. 只今 R의 部分集合族 T를 다음과 같이 定義하자. 即 R의 部分集合 T의 各點 x에 대하여 U의 元 V가 存在하여 $V(x)\subset T$로 되는 그런 T의 全體族을 T라고 놓으면 T는 R의 topology로 되며 이 位相을 R의 uniform topology라고 부른다. 따라서 uniform space는 이 uniform topology에 依하여 位相空間으로 된다.

그러면 여기서 Cauchy sequence 및 一樣性에 關하여 다시 生覺하여 보자.

實數列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$이 R에서 Cauchy sequence라고 함은 任意의 U의 元 V에 대하여 適當한 自然數 N이 存在하여 $p, q>N$이면 항상 $(x_p, x_q)\in V$가 成立할 때를 말한다고 하면 된다. 이 定義는 우리가 앞에서 이야기 하였든 Cauchy sequence의 槪念과 完全히 一致됨은 明白하다. 다음에는 uniform continuity의 槪念을 유도하여 보자. 函數 $f: R\to R$이 uniform continuous 라함은 U의 任意의 元 V에 대하여 U內에 U가 存在하여 $(x,y)\in U$이면 恒常 $(f(x), f(y))\in V$로 될 때를 말한다라고 定義하면 된다.

이 事實은 任意의 陽數 γ에 대하여 陽數 s가 存在하여 $|x-y|<s$이면 恒常 $|f(x)-f(y)|<\gamma$로 된다는 뜻이며, 이것이 바로 $f(x)$가 uniform continuous 인것을 나타냄은 明白한 事實이다. 萬一 A가 R의 部分集合일때 函數 $f(x)$가 A에서 uniform continuous 임은 다음과 같이 定義하면 된다. 即 f의 A에로의 制限函數 $f|A$가 A에서의 relative uniformity에 關하여 uniform continuous 일때를 말하기로 하면 된다. 마지막으로 函數列 $\{f_n(x)\}$의 uniform convergence에 關하여도 다음과 같이 하면 된다. 即 任意의 U의 member V에 대하여 또 R의 各點 x에 대하여 自然數 N이 存在하여 $p, q>N$이면 恒常 $(f_p(x), f_q(x))\in V$로 될때 f는 uniform converge하는 것이다.

以上에서 우리는 uniform space가 導入되게 된 由來에 관하여 生覺하여 왔지만 여기서는 uniform space에 關한 한 두 개의 問題를 考察함으로서 이글을 끝맺기로 하자. 于先여기서도 位相空間때와 마찬가지로, 이 uniform space가 어떤 條件下에서 metrizable인가 하는 것을 살펴보자.

그러나 이 問題는 位相空間의 距離化問題보다는 훨신 容易하게 解決되었다. 이 問題가 第一먼저 다루어진것은 P. Alexandroff와 P.Urysohn의 論文 "Une condition necessaire et suffisante pour qu'une class(C) soit une class(D)"(1923)에서였으며 여기서 그네들은 Hausdorff space가 metrizable이기 위한 必充條件으로서 countable base를 가지는 uniformity가 存在하되 이 uniform topology가 元來의 topology하고 一致하도록 되는것임을 밝혔다. 이 論文은 本來의 目的은 位相空間의 距離化問題를 다룬것이지만 結果的으로는 uniform space가 pseudometrizable이기爲한 條件을 解決한거나 거이 다름이 없다. 이 問題를 비로서 完全히 解決한것은 E. W. Chittenden으로서 그는 그의 論文 "On the Metrization Problem and Related Problems in the Theory of Abstract Sets."(1927)에서 uniform space가 pseudo metrizable이기 爲한 必充條件은 그 uniformity가 countable base를 가진다는 것으로 됨을 보였으며, 그의 證明法은 其後 A. M. Frink 및 Aronszajn 等에 依하여 簡略化되었다. 그러나 이 問題를 完全히 위에서 말한바와 같은 形態로

서 그 條件을 提示한 처음가는 사람은 亦是 A. Weil 였다.(1937). 이 pseudo-metrizable 인 條件에서 uniform space 가 metrizable 이기 爲한 必充條件이, uniformity 가 countable base 를 가지며 그 uniform topology 가 Hausdorff topology 로 되는 것임을 보는 것은 容易하다.

uniform space 에 關하여 한가지 더 이야기하여 두고 싶은것은 uniformizability 에 關한 問題이다. 即 位相空間이 어떤 條件하에서 uniformizable 로 되는가 하는 問題이다. 이問題는 位相空間의 Metrizability 問題와 analogy 되는 問題로서 퍽 興味있는 것이며, 이問題도 間接的으로는 A. Weil 에 依하여 解決되었다고 볼수있다(1937). 이에 依하면 位相空間 X 가 uniformizable 이기 爲한 必充條件도 그것이 completely regular 인 것으로 된다. 이 證明에 있어서는 X×X 위에서 uniform continuous 인 pseudo-metrics 全體의 集合인 gage 의 槪念이 利用되어 比較的 複雜하게 되어 있지만 1957 年 F. A. Behrend 는 이 問題를 string 의 槪念을 導入하여 比較的 깨끗하게 證明하고 있다. 이와 關聯하여 筆者가 論文 "Uniformizability of a Topological Space"에 다룬것도 바로 이문제를 locally cofinal subdirected set의 槪念을 通하여 取扱한 것임을 附言하여 둔다.

uniform space 에 關하여는 아직 completion 問題, compactifiability 問題, function space 와의 關聯性 問題, paracompactness 와의 關聯性問題等等 重要한 것이 많지만 紙面上關係로 딴機會에 미루기로 하고 여기서 붓을 놓기로 한다.

1965. 1. 23 (延世大學校)