Vol. 2, No. 1, 1965. 10

多樣體의 微分構造

朴　　漢　　植

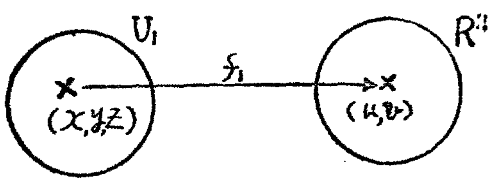
筆者는 topologist 가 아니다. 그런데 [1], [2]를 읽고 느끼는 바가 있어, 이들에 立脚하여 表題의 解說을 敢히 試圖한다. 잘 못된 点, 未備한 点等은 本業의 topologist 에 의하여 앞으로 解說있기를 期待하면서 無知의 蠻勇을 낸다.

只今 3次元球面 S^3 를 생각하자. S^3 는 $x^2+y^2+z^2=1$ 을 滿足시키는 모든 3個의 實數의 組(x, y, z)의 集合이다. 여기서 S^3 上의 다음과 같은 두 領域을 생각한다.

$$U_1: z>-\frac{1}{2}, \qquad U_2: z<\frac{1}{2}$$

U_1 上의 点 $P(x, y, z)$에 대해서 P와 点 $A(0, 0, -1)$을 지나는 直線이 xy-平面과 만나는 点을 $Q(u,v,0)$라고 하자. 이와 같이 해서 U_1 上의 点 P에 對해서 xy-平面 R^2 上의 点 $Q(u,v)$를 對應시키면 U_1에서 R^2에의 寫像

$$f_1: U_1\to R^2, \quad f_1(x,y,z)=(u, v)$$



를 얻는다. 여기서 u,v를 x,y,z로 나타내면

$$u=\frac{x}{1+z}, \qquad v=\frac{y}{1+z} \qquad (1)$$

가 된다. [線分 PA의 xz-平面, yz-平面에의 正射影을 求하여 比例關係를 利用하면 된다.]

또 (1)에서 $x=(1+z)u, \quad y=(1+z)v$

이것을 $x^2+y^2+z^2=1$ 에 代入하면

$$(u^2+v^2+1)z^2+2(u^2+v^2)z-(1-u^2-v^2)=0$$

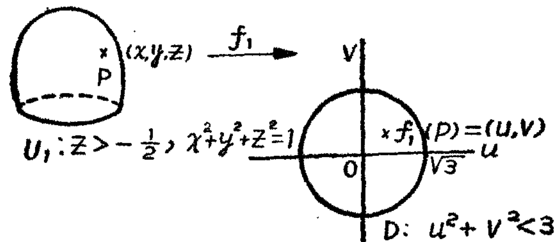
$$\therefore (z+1)[(u^2+v^2+1)z-(1-u^2-v^2)]=0$$

$z\neq -1$ 이므로

$$\left.\begin{aligned} z&=\frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1} \\ \therefore \quad x&=\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad y=\frac{2v}{u^2+v^2+1} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(1), (2)에서 f_1은 1對1寫像이다. 그리고 (x, y, z)가 連續的으로 變化하면 (u, v)도 連續的으로 變化한다. 寫像 f가 1對1寫像이고 f와 f의 逆寫像이 連續일 때 f를 位相寫像(topological mapping 또는 homeomorphism)이라고 한다([3]의 p.72). 따라서 f_1은 U_1에서 R^2 속에의 位相寫像이다.

또 点 P가 U_1 上을 움직이면 点(u,v)는 半徑 $\sqrt{3}$ 인 圓의 內部 D上을 움직인다.



따라서 f_1에 依한 U_1의 像은 D이므로 U_1과 D는位相同型(homeomorphic)이다. 마찬가지 方法으로 U_2 上의 点 $P(x, y, z)$에 對해서 P와 点$(0, 0, 1)$을 지나는 直線이 xy-平面과 만나는 点을 $(\bar{u}, \bar{v}, 0)$이라고 하자. 여기서 U_2上의 点 P에 對해서 平面 R^2 上의 点 $(\bar{u}, \bar{v})$를 對應시키면 U_2에서 R^2에의 寫像

$$f_2: U_2\to R^2, \quad f_2(x, y, z)=(\bar{u}, \bar{v})$$

를 얻는다. 이 (x, y, z), $(\bar{u}, \bar{v})$ 사이에는

$$\bar{u}=\frac{x}{1-z}, \qquad \bar{v}=\frac{y}{1-z} \qquad (3)$$

$$x=\frac{2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+1}, \quad y=\frac{2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+1}, \quad z=\frac{\bar{u}^2+\bar{v}^2-1}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+1} \qquad (4)$$

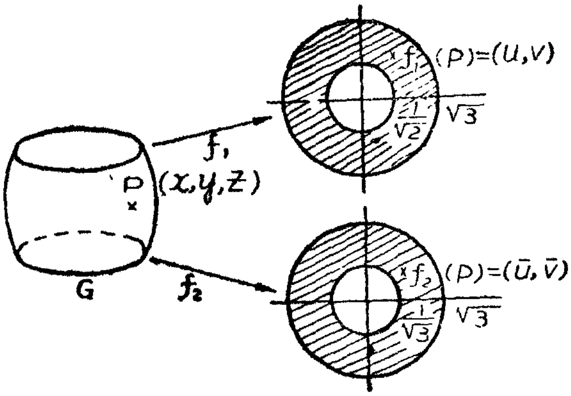
인 관계가 있고 P가 U_2 上을 움직일 때 点 $(\bar{u}, \bar{v})$는 上述한 半徑 $\sqrt{3}$ 인 圓의 內部 D上을 움직인다. 따라서 f_2는 U_2에서 R^2 속에의 位相寫像이 되고 U_2와 D는 位相同型이다.

위에 있어서 U_1 上의 点 (x, y, z)에 對해서 $f_1(x, y, z)=(u, v)$를 点 P의 局所座標, U_1을 座標近傍(coordinates neighbourhood), (U_1, f_1)을 局所座標系라고 한다. U_2, f_2에 對해서도 마찬가지이다.

U_1과 U_2의 共通部分 G

$$G=U_1\cap U_2 : -\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}$$

에 속하는 点 P(x,y,z)는 두 個의 局所座標(u,v), $(\bar{u},\bar{v})$를 갖는다.



이들의 關係는 (2)를 (3)에, (4)를 (1)에 代入하므로서

$$\bar{u}=\frac{u}{u^2+v^2}, \qquad \bar{v}=\frac{v}{u^2+v^2}$$
$$u=\frac{\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}, \qquad v=\frac{\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}$$

가 된다. G의 点 P에 對해서는 $u^2+v^2>0$, $\bar{u}^2+\bar{v}^2>0$이므로 $\bar{u}$, $\bar{v}$를 (u,v)의 函數로 보고 몇번이나 連續的 微分可能하다. 또 u,v를 $(\bar{u},\bar{v})$의 函數로 보고 몇번이나 連續的 微分可能하다.

위의 경우 球面 S^3上의 두 局所座標系 (U_1,f_1), (U_2,f_2)에 依하여 S^3上의 하나의 微分構造가 주어졌다고 한다.

只今까지 이야기를 球面 S^3의 경우에 限定했다. 그런데 實은 球面 S^3는 多樣體(manifolds)의 한 例이다.

1956年 Princeton 大學의 J. Milnor는 7次元球面上에 普通의 微分構造와 다른 微分構造가 들어가는 것을 보였다. 그 以後로 多樣體의 微分構造의 問題는 全世界의 位相幾何學者의 注目하는 바가 되고 現在도 發展途上에 있으며 位相幾何學에서의 가장 큰 問題의 하나가 되어 있다는 이야기이다. 이를테면 微分構造를 적어도 하나 갖는 多樣體 M(微分構造를 가질 수 없는 多樣體도 存在한다.)이 주어졌을 때 M上의 微分構造를 세는 일은 尙今도 未解決이다.

그러면 다음에는 多樣體의 뜻을 밝혀 보자. [4]에 多樣體의 說明이 있는데 여기서는 [1]에 따라 通俗的으로 살펴보자. 球面 S^2는 다음 式을 滿足시키는 点(x,y,z)의 集合이다.

$$x^2+y^2+z^2=1$$

그런데 이 点集合은 点들이 헤터져 있는 것이 아니고, 한 点의 가까이에 또 다른 点이 存在한다. 点 (x_1,y_1,z_1)과 (x_2,y_2,z_2)가 가까이 있다는 것은

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

곧 $$1-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$$

가 充分히 0에 가깝다는 뜻이다. 点$(x,y.z)$에 가까운 点의 어떤 集合을 近傍이라고 한다. 近傍을 생각할 수 있는 集合을 位相空間이라고 한다([4]의 p.30).

多樣體는 勿論 位相空間인데 그 近傍에 特別한 것을 취할 수 있는 것이다. 간단히 말하면 n次元多樣體 M은 그 各各의 点의 近傍에 n次元 球(n-disk)을 취할 수 있는 것이다. 2次元 球라는 것은 2次元 Euclid 空間 R^2에서 座標가 $u^2+v^2<1$을 滿足하는 것과 位相同型인 것이다. [5]의 p.20에는 n次元 多樣體를 位相空間으로서 各点이 n次元 Euclid空間에서의 어떤 開集合과 位相同型인 近傍을 갖는 것으로 定義되어 있는데 마찬가지 이야기가 되겠다.

이로서 一次元直線이나 二次元 Euclid 平面이 多樣體임은 알 수 있는데 球面 S^3도 上述한 寫像 f_1에 依하여 多樣體임을 쉽게 알 수 있다.

끝으로 多樣體上의 微分構造의 槪念을 一般化해 보자.

只今 M의 開集合으로 되는 한 族$\{U_j : j\in J\}$과 各 U_j에서 n次元 Euclid 空間 R^n 속에서 寫像 φ_j의 族$\{\varphi_j : j\in J\}$가 주어지고 다음 條件을 滿足한다고 하자.

(Ⅰ) 모든 U_j의 和集合은 M이다. 곧

$$M=\bigcup_{J\epsilon j} U_j$$

(Ⅱ) 各 j에 對해서 U_j의 φ_j에 依하는 像 $D_j=\varphi_j(U_j)$는 R^n의 開集合이고, φ_i는 U_j에서 D_j上에의 位相寫像이다. 곧 φ_j는 1對1이고 φ_j와 그 逆寫像$(\varphi_j)^{-1}$은 連續이다.

(Ⅲ) $U_j\cap U_k=\phi$ (ϕ는 空集合)인 任意의 j,k에 對해서 다음 式이 成立하는 $U_{jk}=U_j\cap U_k$의 各 点 p에 對해서

$$\varphi_j(p)=(u_1(p), u_2(p), \cdots\cdots, u_n(p)),$$
$$\varphi_k(p)=(\bar{u}_1(p), \bar{u}_2(p), \cdots\cdots, \bar{u}_n(p))$$

로 놓으면 $\varphi_k(p)=(\varphi_k\cdot(\varphi_j)^{-1})\cdot\varphi_i(p)$ 이므로

$\varphi_j(\mathrm{U}_{jk})$上에서 定義된 n 變數의 函數 $\varphi_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$이 一意的으로 存在하고

$$u_i(\mathrm{p})=\varphi_i(u_1(\mathrm{p}), u_2(\mathrm{p}), \cdots\cdots u_n(\mathrm{p}))$$

가 U_{jk}의 各点 p에 對해서 成立한다. 이 n 個의 函數 φ_i $i=1, 2, \cdots\cdots, n$은 몇 번이나 連續的으로 微分可能하다. (이것을 C^∞이라고 한다) 곧 任意의 自然數 s와 各 i에 對해서 φ_i의 s階의 偏微分

$$\frac{\partial^s \varphi_i}{\partial u_{i_1}\, \partial u_{i_2} \cdots \partial u_{i_s}}, \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots\cdots \leq i_s \leq n$$

이 $\varphi_j(\mathrm{U}_{jk})$의 各点에서 存在하고, 또 連續이다.

이 때 $D=\{(\mathrm{U}_j, \varphi_j); j \in J\}$인 系는 n次元 多樣體 M 上에 하나의 微分構造 (또는 C^∞—構造)를 定義한다고 한다. 또 M에 D를 附隨해서 생각했을 때 (M, D)를 微分多樣體 (또는 C^∞—多樣體)라고 한다. 그리고 $(\mathrm{U}_i, \varphi_j)$를 局所座標系, U_j를 座標近傍이라고 한다

微分多樣體의 實例로서 n次元 Euclid空間 R^n n次元球面 S^n, 實射影平面 $P_2(R)$, fibre bundle의 例가 [2]에 나와 있으나 여기서는 이 程度로 끄치고, 이들에 關한 좋은 參考書籍으로는 [5], [6]이 있음을 附記하고 蠻勇에 終止符를 찍을까 한다.

[1] 小松醇所, "多樣體とは 何か" 數理科學 1964. 4

[2] 足立正久, "多樣體の 微分構造" 數理科學 1964. 11

[3] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison Wesley Mathematics Series

]4] S.Lefschetz, *Introduction to Topology*, Princeton University Press

[5] N.E. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press

[6] L.Auslander, R. Mackenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGaraw Hill Series

[註] [6]의 書評이 本誌 創刊號 p. 32에 나와 있다

(서울大學校)