研究論攷

調和解析法에 依한 月別시멘트 需要量推定

韓一시멘트 工業 株式會社
丹陽工場 生産管理室

洪 鍾 國

目 次

1. 序

韓國은 地理的으로 北溫帶에 位置하고 있으나 寒暑의 差는 比較的 甚하여 冬節에는 工事減退로 시멘트 消費量이 急激히 줄어지는 傾向이다. 따라서 시멘트는 完製品이나 半製品狀態로 越冬解凍期를 기다리게 된다.

年間生産計劃을 樹立하는데 있어 工場實務者로써 시멘트의 月別需要關數를 誘導하여 月別在庫量과 適正生産量을 推定, 가장 効果的인 生産活動을 도모하도록 했으면 하는것을 切稿하게 된다. 本感는 '66~'69年의 資料를 基礎로하여 月別시멘트 消費推定關數를 調和解析하고 이를 利用하여 '70年度 以後의 月別시멘트 需要量을 推定해 본 것이다.

2. 月別시멘트 需要量推定

2-1. 시멘트 需要關數

Table 1은 '66~'69年의 國內月別시멘트 消費量實績이다. (註1)

Table 1의 資料를 基礎로 月別시멘트 消費關數를 誘導한다. 시멘트의 月別國內消費量은 季節에 따라 週期的으로 變動되고 있으므로 12縱線法에 依據, 調和解析한다. 우선 變動 pattern에 相應하는 近似關數를 $y=f(x)$라 하고 다음과 같은 有限項의 Fourier級數를 適用한다.

$$\begin{aligned}f(x)=&a_1\sin x+a_2\sin 2x+a_3\sin 3x+\cdots\cdots\\&+a_{n-1}\sin(n-1)x+b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x\\&+b_3\cos 3x+\cdots\cdot+b_{n-}b_1\cos(n-1)x+b_n\cos nx\\&\cdots\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

이때

$$\left.\begin{aligned}a_m&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}y_i\sin\frac{m_i\pi}{n}\quad(m=1,2,\cdots,n-1)\\b_m&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}y_i\cos\frac{m_i\pi}{n}\quad(m=1,2,\cdots,n-1)\\b_o&=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}y_i\\b_n&=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i y_i\end{aligned}\right\}②$$

로 주어진다. (註2)

또한 $n=12$ 일때 12縱線法에 依하여 各項의 係數는 다음과 같이 된다. (註3)

Table 1 최근 4年間의 國內月別 시멘트 消費實績

月別 \ 區分 \ 年	'66 消費量	'66 構成率	'67 消費量	'67 構成率	'68 消費量	'68 構成率	'69 消費量	'69 構成率	平均 構成率
1	45,210	2.38	89,922	3.25	99,451	2.95	132,366	2.96	2.95
2	80,518	4.23	161,242	5.84	113,541	3.37	130,229	2.94	3.15
3	154,923	8.14	297,269	10.75	209,459	6.23	312,877	7.05	6.64
4	198,276	10.40	258,268	9.35	329,717	9.78	383,792	8.65	9.22
5	208,089	10.94	307,548	11.10	346,050	10.28	470,056	10.61	10.45
6	186,393	9.80	237,685	8.58	374,310	11.13	475,438	10.71	10.92
7	187,396	9.84	274,471	9.94	294,739	8.75	385,061	8.68	8.72
8	216,869	11.40	208,847	7.55	304,619	9.05	400,220	9.05	9.05
9	221,729	11.65	260,810	9.41	360,446	10.70	450,777	10.15	10.43
10	207,183	10.90	320,288	11.55	412,306	12.24	566,009	12.75	12.50
11	125,481	6.59	214,508	7.77	267,597	7.94	427,408	9.65	8.79
12	70,579	3.72	135,609	4.91	255,718	7.58	301,260	6.80	7.18
Σ	1,902,646	100	2,766,467	100	3,367,953	100	4,435,393	100	100

$$
\left.\begin{array}{l}
\begin{cases} 12\,b_0=(\alpha_0+\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_3) \\ 12\,b_6=(\alpha_0+\alpha_2)-(\alpha_1+\alpha_3) \end{cases} \\
\begin{cases} 6\,b_1=\left(\beta_0+\frac{1}{2}\beta_2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 \\ 6\,b_5=\left(\beta_0+\frac{1}{2}\beta_2\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 \end{cases} \\
\begin{cases} 6\,b_2=\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\alpha_2\right)+\left(\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_3\right) \\ 6\,b_4=\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\alpha_2\right)-\left(\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_3\right) \end{cases} \\
\begin{cases} 6\,b_3=\beta_0-\beta_2 \\ 6\,a_3=\gamma_1-\gamma_3 \end{cases} \\
\begin{cases} 6a_1=\left(\frac{1}{2}\gamma_1+\gamma_3\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2 \\ 6a_5=\left(\frac{1}{2}\gamma_1+\gamma_3\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2 \end{cases} \\
\begin{cases} 6a_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(\delta_1+\delta_2) \\ 6a_4=\frac{\sqrt{3}}{2}(\delta_1-\delta_2) \end{cases}
\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots ③
$$

但 α_0, α_1, x_2, α_3, β_0, β_1, β_2, γ_1, γ_2, γ_3, δ_1, δ_2는 다음과 같이 計算된다.

y_i		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
和(s_i)	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
差(d_i)		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

s_i	s_0	s_1	s_2	s_3
	s_6	s_5	s_4	
和(α_i)	α_0	α_1	α_2	α_3
差(β_i)	β_0	β_1	β_2	

d_i	d_1	d_2	d_3
	d_5	d_4	
和(γ_i)	γ_1	γ_2	γ_3
差(δ_i)	δ_1	δ_2	

Table 1과 ③式에 依하여 各項의 係數를 計算하면 다음과 같다.

y_i		2.95	3.15	6.64	9.22	10.45	10.92
	7.18	8.79	12.50	10.43	9.05	8.72	
s_i	7.18	11.74	15.65	17.07	18.27	19.17	10.92
d_i		−5.84	−9.35	−3.79	0.17	1.73	

s_i	7.18	11.74	15.65	17.07	
	10.92	19.17	18.27		
α_i	18.10	30.91	33.92	17.07	$(i=0,1,2,3)$
β_i	−3.74	−7.43	−2.62		$(i=0,1,2)$

d_i	−5.84	−9.35	−3.79	
	1.73	0.17		
r_i	−4.11	−9.18	−3.79	$(i=1,2,3)$
δ_i	−7.57	−9.52		$(i=1,2)$

$12b_0=(\alpha_0+\alpha_2)+(\alpha_1+\alpha_3)$

$=(18.10+33.92)+(30.91+17.07)$

$=52,02+47.98=100$ $\therefore\ \underline{b_0=8.333}$

$12b_6=52.02-47.98=4.04$ $\therefore\ \underline{b_6=0.336}$

$$6b_1=\left(\beta_0+\frac{1}{2}\beta_2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1$$

$$=\left(-3.74-\frac{2.62}{2}\right)-0.866\times 7.43$$

$$= -5.05-6.434=-11.484 \quad \therefore\ b_1=-\underline{1.914}$$

$$6b_5=-5.05+6.434=1.384 \quad \therefore\ b_5=\underline{0.230}$$

$$6b_2=\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\alpha_2\right)+\left(\frac{1}{2}\alpha_1-\alpha_3\right)$$

$$=\left(18.10-\frac{33.92}{2}\right)+\left(\frac{30.91}{2}-17.07\right)$$

$$=1.14-1.62=-0.48 \quad \therefore\ b_2=-\underline{0.080}$$

$$6b_4=1.14+1.62=2.760 \quad \therefore\ b_4=\underline{0.460}$$

따라서 各項의 係數를 代入, 整理하면

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)=&-2.298\sin x-2.466\sin 2x-0.053\sin 3x \\ &+0.281\sin 4x+0.352\sin 5x+8.333 \\ &-1.914\cos x-0.08\cos 2x-0.186\cos 3x \\ &+0.46\cos 4x+0.23\cos 5x+0.336\cos 6x \end{aligned}} \quad \cdots④$$

④式에서 x는 週期가 2π인 變數이므로 月數를 變數 t로 나타낸다면 $x=\frac{\pi t}{6}$로 變數變換할 수 있다. 即

$$\boxed{\begin{aligned} f(t)=&-2.298\sin\frac{\pi}{6}t-2.466\sin\frac{\pi}{3}t \\ &-0.053\sin\frac{\pi}{2}t+0.281\sin\frac{2\pi}{3}t \\ &+0.352\sin\frac{5\pi}{6}t+8.333-1.914\cos\frac{\pi}{6}t \\ &-0.08\cos\frac{\pi}{3}t-0.186\cos\frac{\pi}{2}t \\ &+0.46\cos\frac{2\pi}{3}t+0.23\cos\frac{5\pi}{6}t+0.336\cos\pi t \end{aligned}} \quad \cdots⑤$$

한편 過去 5個年間('65～'69年)의 시멘트 國內消費實績을 基礎로 하고 '69年을 基點으로 한 '70年 以後의 시멘트 長期需要展望을 推算하면 다음과 같다.

우선 過去 5個年間의 國內消費實績을 圖表化하면 Fig 1과 같다.

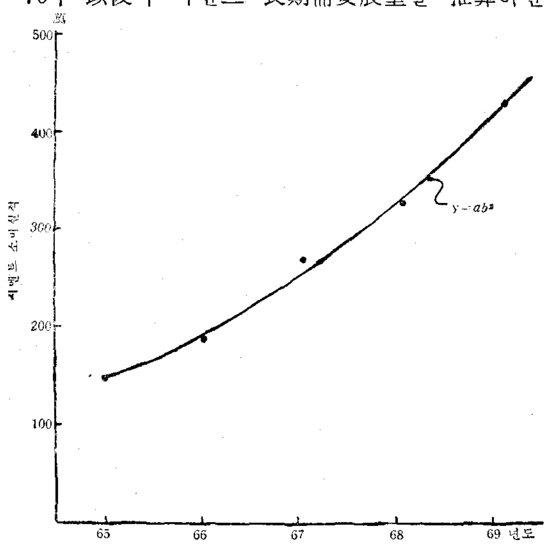

Fig. 1 年度別 시멘트 消費實績

Fig. 1에 依하여 '70年 以後의 시멘트 需要推定曲線의 Pattern을 定하면

$$y=ab^x \quad \cdots\cdots⑥$$

兩邊의 對數를 取하여

$$\log y=\log a+x\cdot\log b$$

$\log y=Y$, $\log a=A$, $\log b=B$라 놓으면

$$Y=A+Bx \quad \cdots\cdots⑦$$

正規方程式은

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y&=nA+B\Sigma x \\ \Sigma Yx&=A\Sigma x+B\Sigma x^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots⑧$$

Table 2 計 算 表

年度	x	y	$\log y$ (Y)	xY	x^2
'65	−4	1,479,367	6.1700	−24.6800	16
'66	−3	1,902,646	6.2793	−18.8379	9
'67	−2	2,766,467	6.4418	−12.8836	4
'68	−1	3,367,953	6.5273	−6.5273	1
'69	0	4,435,393	6.6469	0	0
Σ	−10	—	32.0653	−62,9288	30

$$\left.\begin{aligned} &32.0653=5A-10B \\ &-62.9288=-10A+30B,\ 62.9288 \\ &=10A-30B \end{aligned}\right\} \cdots\cdots⑨$$

$$A=\frac{\begin{vmatrix} 32.0653 & -10 \\ 62.9288 & -30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & -30 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-332.671}{-50}=\underline{6.65342}$$

$$B=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 32.0653 \\ 10 & 62.9288 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & -30 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-6.009}{-50}=\underline{0.12018}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} a&=4.502\times10^6 \\ b&=1.32 \end{aligned}\right\}$$

따라서 $\boxed{y=4.502\times10^6\cdot1.32^x}$ $\cdots\cdots⑩$

⑤, ⑩式을 綜合, 整理하면

2-2. '70 '71 '72年度의 月別시멘트 需要量推定

Table 4. $f(t)$의 値 計 算

$f(t)$ \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$-2.298\ \mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}t$	−1.149	−1,990	−2.298	−1.990	−1.149	0	+1.149	+1.990	+2.298	+1.990	+1.149	0
$-2.466\ \mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}t$	−2.136	−2.136	0	+2.136	+2.136	0	−2.136	−2.136	0	+2.136	+2.136	0
$-0.053\ \mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}t$	−0.053	0	+0.053	0	−0.053	0	+0.053	0	−0.053	0	+0.053	0
$0.281\ \mathrm{Sin}\frac{2}{3}\pi t$	0.243	−0.243	0	0.243	−0.243	0	0.243	−0.243	0	0.243	−0.243	0
$0.352\ \mathrm{Sin}\frac{5}{6}\pi t$	0.176	−0.305	0.352	−0.305	0.176	0	0.176	0.305	−0.352	0.306	−0.176	0
$-1.914\mathrm{Cos}\frac{\pi}{6}t$	−1.657	−0.957	0	0.957	1.657	1.914	1.658	0.957	0	−0.956	−1.667	−1.914
$-0.08\ \mathrm{Cos}\frac{\pi}{3}t$	−0.04	0.04	0.08	0.04	0.04	−0.08	−0.04	0.04	0.08	0.04	−0.04	−0.08
$-0.186\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}t$	0	0.186	0	−0.186	0	0.186	0	−0.186	0	0.186	0	−0.186
$0.46\ \mathrm{Cos}\frac{2}{3}\pi t$	−0.23	−0.23	0.46	−0.23	−0.23	0.46	−0.23	−0.23	0.46	−0.23	−0.23	0.46
$0.23\ \mathrm{Cos}\frac{5\pi}{6}t$	−0.199	0.115	0	−0.115	0.199	0.23	0.199	−0.115	0	0.115	−0.199	0.23
$0.336\mathrm{Cos}\pi t$	−0.336	0.336	−0.336	0.336	−0.336	0.336	−30.36	0.336	−0.336	0.336	−0.336	0.336
$+8.333$	8.333	8.333	8.333	8.333	8.333	8.333	8.333	8.333	8.333	8.333	8.333	8.333
$\sum = f(t)$	2.952	3.149	6.644	9.219	10.45	10.919	8.718	9.051	10.43	12.499	8.79	7.179

이것을 圖表化하면 Fig 2와 같다.

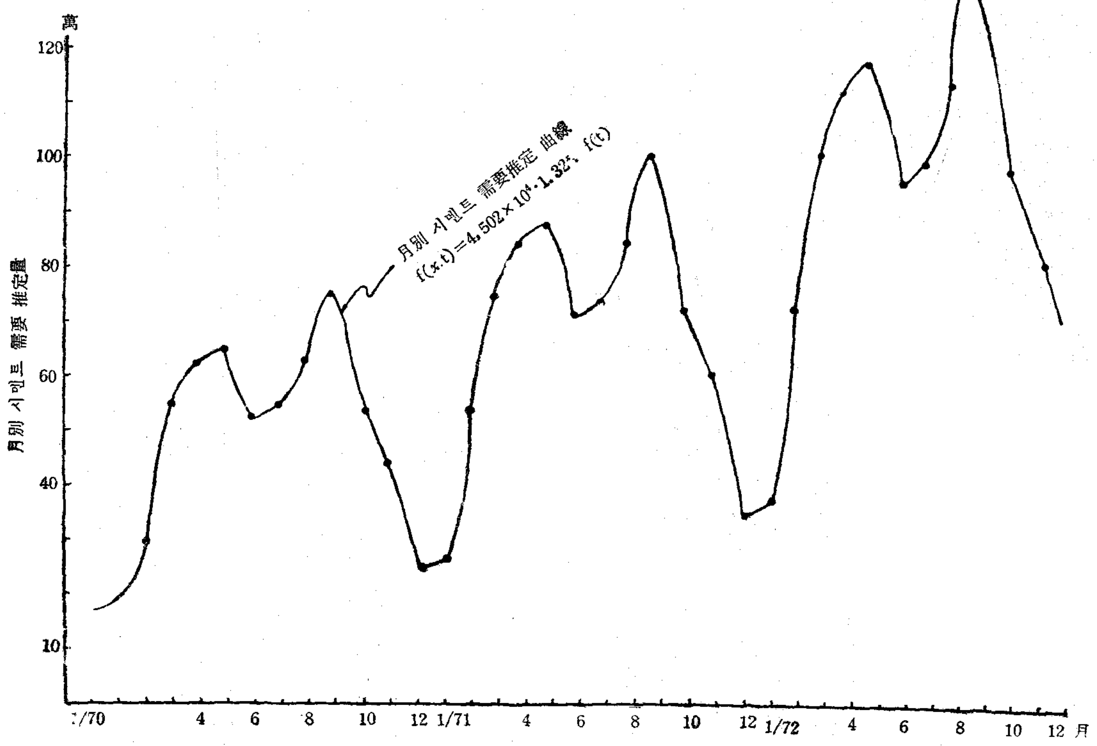

Fig 2. '70, '71, '72,年度月別 시멘트需要推定

$$
\boxed{\begin{aligned} f(x,t) &= 4.502\times10^{6}\cdot1.32^{x}\cdot10^{-2}\cdot f(t) \\ &= 4.502\times10^{4}\cdot1.32^{x}\cdot f(t) \end{aligned}} \quad \cdots\cdots ⑪
$$

但. $f(x,t)$; '70年度 以後의 月別시멘트 需要量(Ton)

x ; '69年을 基點으로한 年次數(例 '70年度 $x=1$)

t ; 月數

⑪式을 適用하여 推定하면 다음과 같다. 于先 年度別 시멘트需要量을 推定하면

Table 3. 年度別 시멘트需要量推定

年度	x	1.32^x	$4,502\times10^{6}\cdot1.32^{x}$	備考
'70	1	1.32	5,943,000	過去 5個年시멘트消費實績을 基礎로 한 '71年度以後의 年間 시멘트需要量推定値임.
'70	2	1.74	7,834,000	
'72	3	2.30	10,354,000	

Table 5. '70, '71, '72年度 月別 시멘트 需要量推定($y=f(x.t)$에 依함)

單位 : 1,000 Ton

年度 / 月別	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Z
$f(t)$	2.952	3.149	6.644	9.219	10,450	10,919	8,718	9.051	10,430	12,499	8,790	7,179	—
'70	175	187	395	548	621	649	518	538	620	743	522	427	5,943
'71	231	247	520	722	819	855	683	709	817	979	689	563	7,834
'72	306	326	688	955	1,082	1,131	903	937	1,078	1,294	910	744	10,354

2-3. '68 '69年度別 消費實績과 $y=f(x,t)$ 推定値와의 比較

$y=f(x,t)$式의 妥當性을 立證하기 위해서 지난 '68, '69年消費 實績과 $y=f(x,t)$式에 의하여 推定된 數値를 比較하기로 한다. Table 6은 $y=f(x,t)$式에 의하여 推定된 것이다.

Table 6. $y=f(x,t)$ 推定値('68, '69年度)

單位 : 1,000 Ton

年度 / 月別	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
'68	100	107	226	315	356	372	297	308	356	426	299	246
'69	133	142	299	415	470	492	392	407	470	563	396	323

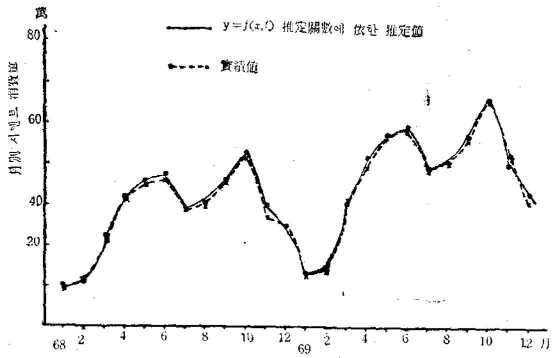

Fig 3. $y=f(x,t)$ 推定値와 實績値對比

Fig 3에 나타난 바와 같이 시멘트 月別消費量은 雙峰型分布를 하고 있다. '69年度의 實績値와 $y=f(x,t)$ 推定値의 季節變動指數(Index of Seasonal Variation)를 比較하면 다음 表와 같다.

Table 7. 實績値와 推定値의 季節變動指數比較('69年度)

月別	시멘트消費實績		$y=f(x,t)$에 의한 推定	
	實績値	季節變動指數	推定値	季節變動指數
'69/1	132,366	35.8	133,000	35.5
2	130,229	35.2	142,000	37.8
3	312,877	84.6	299,000	79.6
4	383,792	103.8	415,000	110.6
5	470,056	127.2	470,000	125.2
6	475,438	128.6	492,000	131.1
7	385,061	104.3	392,000	104.4
8	400,220	108.3	407,000	108.4
9	450,777	121.9	470,000	125.2
10	566,009	153.1	563,000	150.1
11	427,408	115.6	396,000	105.5
12	301,260	81.6	323,000	86.6
平均	369,606	—	375,166	—
偏差	—	34.2	—	33.7

註1) 洋灰工業協會資料

註2) $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots\cdots+a_{n-1}\sin(n-1)x+b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_{n-1}\cos(n-1)x+b^n\cos nx$

에서 最小自乘法의 原理에 따라 $S=\sum_{i=1}^{2n}\{f(x_i)-y_i\}^2$ 가 最小가 되도록 上記式의 未知係數를 求하면

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial s}{\partial a_n}=\sum_{i=1}^{2n}\{f(x_i)-y_i\}\sin mx_i=0$$ 으로 부터

$$\sum_{i=1}^{2n} f(x_i)\sin\frac{m_i\pi}{n}=\sum_{i=1}^{2n} y_i\sin\frac{m_i\pi}{n}$$

$(m=1,2\cdots n-1)\cdots\cdots\cdots(1)$

(1)의 左邊은

$$\sum_{i=1}^{2n} f(x_i)\sin\frac{m_i\pi}{n}=\sum_{i=1}^{2n}\Big\{a_1\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}$$
$$+a_2\sin\frac{2i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}+\cdots\cdots\cdots$$
$$+a^m\sin\frac{m_i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a^n{}_{-1}\sin\frac{(n-1)i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}\Big\}$$
$$+\sum_{i=1}^{2n}\Big\{b_0\sin\frac{m_i\pi}{n}+b_1\cos\frac{i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}$$
$$+b_2\cos\frac{2_i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}+\cdots+b^m\cos\frac{m_i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}$$
$$+\cdots+b_{n-1}\cos\frac{(n-1)_i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}$$
$$+b_n\cos\frac{n_i\pi}{n}\sin\frac{m_i\pi}{n}\Big\}\cdots(2)$$ 가 된다.

그런데 三角法의 公式에서

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

$2\sin A\cos B=\sin(A-B)+\sin(A+B)$ 이므로

$$\sum_{i=1}^{2n}\sin\frac{m_i\pi}{n}\sin\frac{m'_i\pi}{n}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\Big\{\cos\frac{(m-m')_i\pi}{n}$$
$$-\cos\frac{(m+m')_i\pi}{n}\Big\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但 $\begin{pmatrix}m=1,2,\cdots\cdots n-1\\ m'=1,2,\cdots\cdots n-1\end{pmatrix}$

$$\sum_{i=1}^{2n}\sin\frac{m_i\pi}{n}\cos\frac{m'_i\pi}{u}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\Big\{\sin\frac{(m-m')_i\pi}{n}$$
$$+\sin\frac{(m+m')_i\pi}{n}\Big\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

但 $\begin{pmatrix}m=1,2,\cdots\cdots n-1\\ m'=1,2,\cdots\cdots n-1\end{pmatrix}$

한편 r을 任意의 正, 負의 整數(○을 包含)라 하면

$$\sum_{i=1}^{2n}\sin\frac{r_i\pi}{n}=0$$

$$\sum_{i=1}^{2n}\cos\frac{r_i\pi}{n}=\begin{cases}0 & (r\text{이 } n\text{의 偶數倍가 아닐때})\\ 2n & (r\text{이 } n\text{의 偶數倍이거나 0일때})\end{cases}$$

의 式이 成立한다. 이 關係式을 使用하여, (3)式의 右邊의 $m-m'$, $m+m'$는 m와 m'가 다 最大 $n-1$의 正의 整數이므로 $m=m'$가 아닌 以上, n의 偶數倍나 0이 안된다. 따라서

$$\sum_{i=1}^{2n}\sin\frac{m_i\pi}{n}\sin\frac{m'_i\pi}{n}=0\quad(m\neq m')$$

萬若 $m=m'$가 된면 $m-m'=0$ 이 되므로 ($m+m'$는 n의 偶數倍가 안됨)

$$\sum_{i=1}^{2n}\sin\frac{m_i\pi}{n}\sin\frac{m'_i\pi}{n}=n\quad(m=m')$$

한편 (4)式의 右邊은 恒常 0이 되어

$$\sum_{i=1}^{2n}\sin\frac{m_i\pi}{n}\cos\frac{m'_i\pi}{n}=0$$

따라서 (2)式의 右邊은 nam가 되며 이것을 (1)式에 代入하면 $n-1$個의 sin項의 各係數는

$$a^m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} y_i\sin\frac{m_i\pi}{n}\quad(m=1,2,\cdots\cdots n-1)$$

가 된다. 다른 係數도 이와 같은 方法으로 誘導된다.

註3) $b_0=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} y_i$에서 $n=6$이므로

$$12b_0=\sum_{i=1}^{12} y_i=y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{12}$$
$$=S_0=S_1+\cdots\cdots S_6=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

이와 같이 b_6는

$$12b_6=\sum_{i=1}^{12}(-1)^i y_i=-y_1+y_2-y_3+\cdots\cdots+y_{12}$$
$$=\{y_{12}+(y_2+y_{10})+(y_4+y_8)+y_6\}$$
$$-\{(y_1+y_{11})+(y_3+y_9)+(y_5+y_7)\}$$
$$=(S_0+S_2+S_4+S_6)-(S_1+S_3+S_5)$$
$$=(\alpha_0+\alpha_2)-(\alpha_1+\alpha_3)$$

b_1는 다음과 같이 計算된다.

$$6b_1=\sum_{i=1}^{12} y_i\cos\frac{i\pi}{6}=y_1\cos30^0+y_2\cos60^0+y_3\cos90^0$$
$$+\cdots\cdots\cdots+y_{12}\cos360^0$$
$$=(y_{12}-y_6)\cos0^0+\{y_1+y_{11})$$
$$-(y_5+y_7)\}\cos30^0+\{(y_2+y_{10})$$
$$-(y_4+y_8)\}\cos60^0=(S_0-S_6)$$
$$+(S_1-S_5)\frac{\sqrt{3}}{2}+(S_2-S_4)\frac{1}{2}$$
$$=\beta_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2$$
$$=(\beta_0+\frac{1}{2}\beta_2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1$$

以上과 같은 方法으로 다른 係數도 誘導된다.