□特 輯□

Circulant 그래프

한국과학기술원 정보전자연구소 박 정 흠*

●목 차●

I. 서 론

Circulant 그래프는 1962년에 Harary가 [16]에서 최초로 제시한 것으로 알려져 있다. 그는 그 당시 신뢰성이 높은 통신망을 설계하는 최적화 문제인 "n개의 정점과 e개의 에지를 가지면서 연결도가 최대인 그래프를 구성하라"하는 문제를 circulant 그래프에 속하는 그래프를 제시함으로써 해결하였는데, 그가 제시한 그래프를 Harary 그래프라고 부른다. Circulant 그래프는 Harary 그래프를 일반화한 것이다.

Circulant 그래프는 상당히 대칭적인 구조를 가지고 있어서 여러 분야에서 많이 응용되고 있는데, star polygon이나 D(n, t, X) 시스템 등 다른 이름을 가지고 있었으나 최근에는 circulant 그래프라고 통일되어 불리고 있다. Farley가 [15]에서 통신망의 임의의 노드에서 방송을 시작하더라도 최소의 단위 시간에 방송을 끝낼 수 있는 최소 시간 방송 그래프를 제안했는데, 그가 설계한 최초의 최소 시간 방송 그래프는 circulant 그래프이다. 또 다른 예로 Chwa와 Hakimi는 [12]에서 시스템 레벨 고장 진단 분야에서 t개 이내의 노드에 고장이 발생할 때 고장난 노드를 모두 포함하는 t개의 노드를 찾을 수 있는 t/t-고장 진단 시스템의 필요 충분 조건을 제시하면서 에지의 갯수가 작은 t/t-고장 진단 시스템을 제안했는데. 그 시스템은 에지에 방향이 있는 circulant 그래프 즉 유향 circulant 그래프이다.

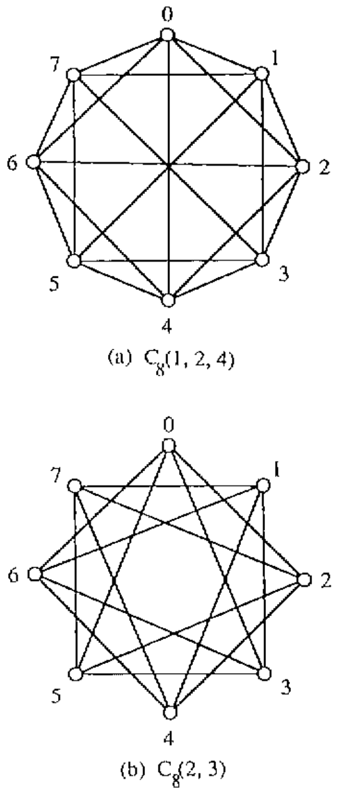
$C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$로 표기하는 circulant 그래프는 n개의 정점 {0, 1, …, n−1}을 가지고 있으며, 임의의 두 정점 v, w에 대해서 $v+a_i \equiv w \pmod{n}$을 만족하는 a_i가 존재할 때 v, w를 잇는 에지가 있다. 이 때 각각의 a_i를 점프라고 부른다. 8개의 정점을 가진 circulant 그래프의 예가 아래 그림 1에 있다.

Circulant 그래프는 모든 정점의 분지수가 같은 정규 그래프이다. Circulant 그래프가 대각 점프라고 부르는 크기가 n/2인 점프를 가지고 있으면 그것의 분지수가 홀수가 되고 그렇지 않을 때는 짝수가 된다. 왜냐하면 대각 점프는 분지수에 1을 보태지만 대각 점프가 아닌 점프는 분지수에 2를 보태기 때문이다. 따라서 k개의 점프를 가진 circulant 그래프의 분지수는 그것이 대각 점프를 가지고 있으면 2k−1이고 그렇지 않을 때는 2k이다.

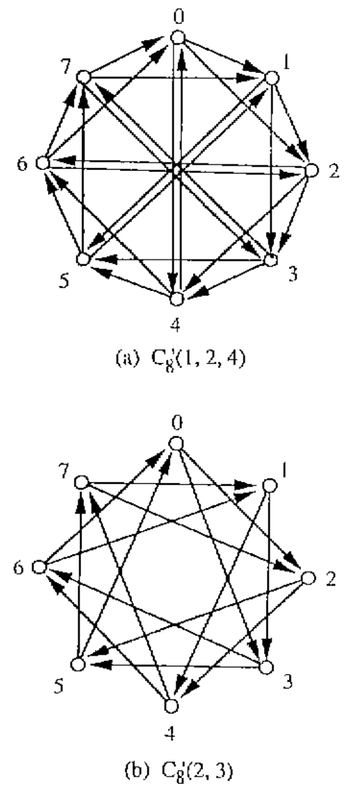
유향 circulant 그래프도 circulant 그래프와 유사하게 정의할 수 있다. $C_n'(a_1, a_2, \cdots, a_k)$는 n개의 정점 {0, 1, …, n−1}을 가진 유향 circulant 그래프인데, $v+a_i \equiv w \pmod{n}$을 만족하는 a_i가 존재할 때 v에서 w로 유향 에지가 있다. 8개의 정점을 가진 유향 circulant 그래프의 예가 아래 그림 2에 있다. 유향 circulant 그래프의 내향 분지수나 외향 분지수는 그것이 가지고 있는 점프의 갯수와 같다.

Circulant 그래프를 군(group)의 용어로 정의할 수도

* 종신회원



(그림 1) Circulant 그래프의 예



(그림 2) 유향 circulant 그래프의 예

있다. 군 그래프라고도 불리는 Cayley 그래프는 군 G와 G의 부분 집합 S에 대해서 정의된다. G와 S에 대한 유향 Cayley 그래프 Cay′(S : G)의 정점은 G의 모든 원소이고, $g \in G$, $s \in S$에 대해서 g에서 $g*s$로 유향 에지를 둔다. 이 때 $*$는 G의 이진 연산자를 나타낸다. G와 S에 대한 Cayley 그래프 Cay(S :G)는 Cay′(S : G)의 모든 유향 에지의 방향을 제거하여 얻어진다.

Cyclic군 G에 대한 Cayley 그래프를 생각해 보자. G의 원소는 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$이고 이진 연산자는 모듈로 n 덧셈이다. S를 G의 부분집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$라고 하자. 유향 Cayley 그래프 Cay′(S : G)는 유향 circulant 그래프 $C_n'(a_1, a_2, \cdots, a_k)$가 되고, Cayley 그래프 Cay(S : G)는 circulant 그래프 $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$가 된다. 즉 circulant 그래프와 유향 circulant 그래프는 각각 cyclic 군에 대한 Cayley 그래프와 유향 Cayley 그래프이다.

[정리 1.1] 모든 circulant 그래프는 Cayley 그래프이고, 모든 유향 circulant 그래프는 유향 Cayley 그래프이다.

정점 대칭 그래프는 모든 정점쌍 v, w에 대해서 v를 w로 대응시키는 automorphism이 존재하는 그래프를 말한다. 유향 Cayley 그래프 Cay′(S : G)에서 $\phi(g) = w * v^{-1} * g$는 v를 w에 대응시키는 automorphism이 되므로 모든 유향 Cayely 그래프는 유향 정점 대칭 그래프가 된다. 마찬가지로 Cayley 그래프도 정점 대칭 그래프이다. 정리 1.1와 정리 1.2는 모든 circulant 그래프는 정점 대칭 그래프이고, 유향 circulant 그래프는 유향 정점 대칭 그래프임을 말한다.

[정리 1.2] 모든 Cayley 그래프는 정점 대칭 그래프이고, 모든 유향 Cayley 그래프는 유향 정점 대칭 그래프이다.

Circulant 그래프가 아니면서 Cayley 그래프인 그래프로는 정점을 8개 가진 3차원 하이퍼큐브 Q_3가 있다. 8개의 정점을 가지고 분지수가 3인 모든 circulant 그래프는 연결되어 있지 않거나 이분 그래프가 아니기 때문에 Q_3와 동형이지 않다. 3차원 이상 모든 하이퍼큐브도 circulant 그래프가 아님을 보일 수 있다. 정점 대칭 그래프이면서 Cayley 그래프가 아닌 그래프로는 Petersen 그래프가 있다. 그러나 정점의 갯수가 솟수일 경우에는

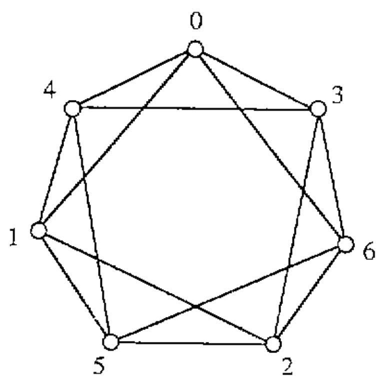
circulant 그래프, Cayley 그래프, 정점 대칭 그래프가 모두 같은 그래프 부류임이 증명되어 있고[24], 유향 circulant 그래프에 대해서도 마찬가지 결과가 발표되었다 [10].

[정리 1.3] 정점의 갯수가 솟수일 때, 모든 정점 대칭 그래프는 circulant 그래프이고, 유향 정점 대칭 그래프는 유향 circulant 그래프이다.

본 고에서는 circulant 그래프와 유향 circulant 그래프의 동형 사상, 연결도, 지름, 해밀톤 특성을 고찰하고 circulant 그래프의 특별한 형태인 제귀 원형군의 성질을 살펴보기로 한다.

II. Circulant 그래프의 동형 사상

서로 다른 점프를 가진 두 circulant 그래프가 동형일 수 있다. 예컨데, circulant 그래프 $C_7(1, 3)$은 크기가 1인 점프가 이루는 해밀톤 사이클을 원주상에 그릴 수 있지만, 크기가 3인 점프도 해밀톤 사이클을 이루므로 이것을 원주상에 그림 3과 같이 그릴 수도 있다. 그림 3을 보면, 이 그래프가 $C_7(1, 2)$와 동형임을 쉽게 알 수 있다. 본 장에서는 두 circulant 그래프가 동형일 조건을 찾는 문제를 고려한다.



(그림 3) $C_7(1, 3)$

이 문제에 대한 충분 조건은 최초로 Adam이 [1]에서 제시했다. 유향 circulant 그래프의 동형 사상에 대한 충분 조건도 이와 같다.

[정리 2.1] n보다 작고 n과 서로소인 양의 정수 r이 존재하고 $a'_i \equiv r a_{\phi(i)} \pmod{n}$을 만족하는 $\{1, 2, \cdots, k\}$의 순열 ϕ가 존재하면, 두 circulant 그래프 $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$와 $C_n(a'_1, a'_2, \cdots, a'_k)$은 서로 동형이다.

두 circulant 그래프가 Adam이 제시한 조건을 만족하면 Adam 동형이라고 한다. Adam은 모든 동형인 circulant 그래프는 Adam 동형일 것이라는 가설 즉 자신이 제시한 조건이 필요 충분 조건일 것이라는 가설을 제시했다. 그러나 Elspas와 Turner는 [14]에서 $C_{16}(1, 2, 7)$과 $C_{16}(2, 3, 5)$은 동형이지만 Adam 동형이 아님을 밝힘으로써 Adam의 가설은 부정되었다. 그 후에도 Alspach와 Parsons이 [3]에서 정점의 갯수가 3 이상인 솟수의 제곱으로 나누어지는 circulant 그래프를 설계함으로써 무한히 많은 반례를 제시했다.

두 circulant 그래프가 동형일 필요 충분 조건은 아직까지 밝혀지지 않고 있다. 다만 두 circulant 그래프가 Adam 동형일 조건에 대한 연구는 Babai[5], Todai[23], Turner[23] 등에 의해서 진행되었다. 그들의 연구 결과를 정리하면 다음과 같다.

[정리 2.2] 동형인 두 circulant 그래프 $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$와 $C_n(b_1, b_2, \cdots, b_k)$는 아래의 조건 중 하나를 만족하면 Adam 동형이다.

(a) n이 솟수이다.
(b) n은 서로 다른 두 솟수의 곱이다.
(c) n은 서로 다른 솟수 $p_1<p_2<\cdots<p_m$의 곱이고 $\Pi_{1\le i\le r} p_i < p_{i+1}$이며 오일러 함수 $\phi(n)$은 n과 서로소이다. ($\phi(n)$은 n보다 작고 n과 서로소인 양의 정수의 갯수이다.)

III. Circulant 그래프의 연결도

임의의 k−1개의 정점이 제거되더라도 그래프가 연결되고 있고 적절한 k개의 정점을 제거하였을 때 분리되면, 그 그래프의 연결도를 k라고 한다. 정점을 제거하더라도 그래프가 분리되지 않는 완전 그래프의 연결도는 정점의 갯수 n−1이라 정의한다. 이와 유사하게 k−1개의 에지가 제거되더라도 연결되어 있고 절절한 k개의 에지가 제거되었을 때 분리되는 그래프의 에지 연결도를 k라고 한다. 그래프 G의 연결도와 에지 연결도를 각각 $\kappa(G)$와 $\lambda(G)$로 표기하기로 한다. G의 분지수는 G에 속한 모든 정점의 분지수의 최소값을 말하고 $\delta G)$라고 표기한다. 임의의 그래프 G에 대해서 $\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$가 성립함이 알려져 있다.

Circulant 그래프가 연결되어 있는지를 (연결도가 1 이상인지) 쉽게 알 수 있을까? 크기가 1인 점프가 있는 circulant 그래프는 해밀톤 사이클을 가지고 있어서 연

결되어 있음을 쉽게 알 수 있다. 크기가 1인 점프를 가지고 있지 않는 circulant 그래프 중에선 $C_8(2, 4)$처럼 연결되어 있지 않은 것도 있지만 $C_9(2, 4)$처럼 연결되어 있는 것도 있다. 이 문제는 아래 정리에 보는 바와 같이 정점의 갯수와 점프의 최대 공약수를 구함으로써 해결할 수 있다. (정리 3.1의 조건은 cyclic 군의 부분 집합 S가 generator가 될 조건과 같다.) 유향 circulant 그래프 $C'_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$가 강연결되어 있을 필요 충분 조건도 정리 3.1의 조건과 같다.

[정리 3.1] Circulant 그래프 $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$가 연결되어 있을 필요 충분 조건은 $\gcd(n, a_1, a_2, \cdots, a_k) = 1$이다.

위 정리를 확장하여 주어진 circulant 그래프의 연결된 요소의 갯수를 알 수 있다. 아래 정리 3.2는 유향 circulant 그래프 $C'_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$에도 마찬가지로 적용된다.

[정리 3.2] Circulant 그래프 $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$는 $d = \gcd(n, a_1, a_2, \cdots, a_k)$개의 연결된 요소를 가지고 있다. 이때 각 연결된 요소는 $C_{n/d}(a_1/d, a_2/d, \cdots, a_k/d)$와 동형이다.

Circulant 그래프는 상당히 대칭적인 구조를 가지고 있기 때문에, 연결되어 있는 모든 circulant 그래프의 연결도가 (혹은 에지 연결도가) 최대일 것으로, 즉 그것의 연결도와 (혹은 에지 연결도와) 분지수가 같을 것이라고 기대된다. 연결되어 있는 모든 circulant 그래프는 그것의 연결도와 에지 연결도가 모두 2 이상임을 보일 수 있어서, 연결도가 큰 그래프 부류임을 짐작할 수 있다.

Circulant 그래프의 연결도에 관한 이러한 기대가 성립하지 않음을 Boesch와 Thomas가 [6]에서 보였다. 그들은 연결되어 있으면서 연결도가 최대이지 않은 circulant 그래프 $C_{15}(1, 4, 5, 6)$를 제시했는데, 그것의 분지수는 8이지만 크기가 6인 정점 컷 $\{1, 4, 6, 9, 11, 14\}$을 가진다. 그 후 정점의 갯수가 최소인 반례로 $C_{12}(1, 3, 4, 5)$가 [8]에 제시되었다.

이러한 반례가 발견됨에 따라 circulant 그래프의 연결도가 최대일 필요 충분 조건을 찾는 연구가 진행되었다. Harary는 [16]에서 다음 정리와 같이 $C_n(1, 2, \cdots, k)$의 연결도가 최대임을 보였다.

[정리 3.3] $C_n(1, 2, \cdots, k)$는 최대의 연결도를 가진다.

그 후 Boesch와 Felzer가 [7]에서 Harary가 제시한 조건을 일반화하여 새로운 충분 조건을 제시하였는데, 크기가 가장 작은 점프는 1이고 인접한 점프의 차가 감소하지 않는 수열을 이루면, 즉 $a_1=1$이고 $a_{i+1}-a_i \le a_{i+2}-a_{i+1}$이면 $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$의 연결도는 최대이라는 결과를 발표하였다. 그러나 이 조건이 필요 조건이 되지 못한다. $C_{16}(1, 5, 7)$은 Boesch와 Felzer의 조건을 만족하지 않지만 $C_{16}(1, 3, 7)$과 동형이어서 연결도가 최대가 되기 때문이다.

[정리 3.4] $a_1=1$이고 $a_{i+1}-a_i \le a_{i+2}-a_{i+1}$이면, $1 \le i \le k-2$, $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$는 최대의 연결도를 가진다.

Boesch와 Felzer의 조건이 필요 조건이 되지 않음을 보여주는 예는 $C_{16}(1, 5, 7)$과 같이 $a_1=1$인 circulant 그래프뿐만 아니라 $a_1 \neq 1$인 circulant 그래프 중에서도 찾을 수 있다. $C_{11}(2, 5)$는 Boesch와 Felzer의 조건을 만족하지 않으면서 연결도가 최대인 그래프이다. (정점의 갯수가 11 이하인 모든 연결된 circulant 그래프는 최대의 연결도를 갖는다.) 이와 같이 $a_1=1$이라는 조건을 사용하는 어떠한 충분 조건도 필요 조건이 될 수 없다는 사실을 관찰하고 Wang이 Boesch와 Felzer의 충분 조건을 일반화하여 새로운 충분 조건을 [25]에 제시하였다.

[정리 3.5] $a_{i+1}-a_i \le a_{i+2}-a_{i+1}$이면, $0 \le i \le k-2$, $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$는 최대의 연결도를 가진다. 여기서 a_0는 0이다.

Wang의 조건은 $C_{11}(2, 5)$의 연결도가 최대임을 말하지만, $C_{11}(2, 3)$의 연결도가 최대임을 말하지는 못해서 필요 조건이 되지는 못한다. Boesch와 Felzer, Wang의 시도로부터 우리는 그들이 사용한 개념인 인접한 점프의 차가 감소하지 않는 수열을 이룬다는 것은 간결한 충분 조건이 되지만 필요 충분 조건과는 상당한 거리가 있음을 알 수 있다.

그 후 circulant 그래프의 연결도가 최대일 필요 충분 조건이 Boesch와 Tindell에 의해서 [8]에 제시되었다. 그들은 atomic part라는 개념으로 이 문제를 해결하는데 성공했는데, 그래프 G의 atomic part는 G의 연결도 만큼의 정점을 G에서 제거했을 때 생기는 정점의 갯수가 가장 작은 연결된 요소를 말한다. 자세한 것은 [8]을 참조하기 바란다. Boesch와 Tindell의 필요 충분 조건은 다음과 같다.

[정리 3.6] n의 모든 약수 m (<n)에 대해서 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k, n-a_1, n-a_2, \cdots, n-a_k\}$에 모듈로 m 연산을 가했을 때 남는 서로 다른 나머지의 갯수가 $m-1$과 $m\delta(C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k))/n$ 이상이면, $C_n(a_1, a_2, \cdots, a_k)$는 최대의 연결도를 가진다. 그리고 그 역도 성립한다.

Circulant 그래프가 상당히 대칭적인 구조를 가지고 있지만, 연결되어 있는 것이 연결도가 최대임을 의미하

지는 않음을 알았다. 그러나 circulant 그래프의 에지 연결도에 대해서는 우리가 가지고 있는 기대가 만족됨이 밝혀져 있다. Circulant 그래프를 포함하는 모든 정점 대칭 그래프에 대해서 그것이 연결되어 있으면 에지 연결도가 최대가 됨이 Mader에 의해서 증명되었다[8].

[정리 3.7] 모든 연결된 circulant 그래프는 최대의 에지 연결도를 가진다.

유향 circulant 그래프의 연결도에 관한 필요 충분 조건은 아래 정리 3.8과 같이 van Doorn이 [13]에서 발표하였다. 그는 Boesch와 Tindell이 circulant 그래프의 연결도를 고려할 때 사용했던 atomic part라는 개념을 그대로 이용하고 있다. 그는 유향 circulant 그래프가 최대의 연결도를 가지는지 아닌지 뿐만아니라 그 그래프의 연결도를 말할 수 있는 정리를 제시했다. 이 정리를 circulant 그래프에 적용하면 circulant 그래프의 연결도를 알 수 있는데, circulant 그래프의 연결도는 그 그래프의 모든 에지 (v, w)를 v에서 w까지의 유향 에지와 w에서 v까지의 유향 에지 두 개로 교체하여 얻어지는 유향 circulant 그래프의 연결도와 같기 때문이다.

[정리 3.8] 유향 circulant 그래프 $C_n^d(a_1, a_2, \cdots, a_k)$의 연결도는 $\min\{nf(m)/m \mid m$은 n의 약수, $f(m)<m-1\}$이다. 여기서 $f(m)$은 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$에 모듈로 m 연산을 가했을 때 남는 서로 다른 나머지의 갯수이다.

IV. Circulant 그래프의 지름

그래프의 두 정점을 잇는 최단 경로의 길이를 두 정점간의 거리라고 하고 모든 두 정점간의 거리의 최대값을 지름이라고 한다. 정점의 갯수가 n, 분지수가 d로 주어져 있을 때 지름이 최소인 circulant 그래프를 찾는 문제를 고려한다. Circulant 그래프 G의 지름을 dia(G)라고 표기하고, G가 연결되어 있지 않을 때 dia(G)는 무한값을 갖는다고 정의한다. n개의 정점을 가지고 분지수가 d이면서 최소 지름을 갖는 circulant 그래프의 지름을 dia(n, d)라고 하고, 그러한 조건을 만족하는 circulant 그래프가 존재하지 않으면 dia(n, d)는 무한값으로 정의한다.

일반적인 n, d에 대해서 최소의 지름을 갖는 circulant 그래프를 찾는 것은 어려운 문제로 알려져 있고 심지어 dia(n, d)의 값을 구하는 것조차 매우 어려운 문제이다. 우선 d가 4 이하일 때, 함수 dia(n, d)를 고찰해 보기로 하자. 그리고 모든 그래프의 정점의 갯수는 분지수보다 큰 값을 가지므로 $n>d$임을 가정한다.

$d=1$일 때는 $C_2(1)$만이 연결되어 있어 $n=2$일 때는 $\text{dia}(n, 1)=1$이고 나머지 경우는 dia(n, 1)이 무한값을 가는다. $d=2$일 때 연결된 circulant 그래프는 길이가 n인 사이클 그래프와 동형이다. 왜냐하면 분지수가 2인 circulant 그래프는 하나의 점프를 가지고 있고 그래프가 연결되어 있으므로 정리 3.1에 의해서 점프와 n이 서로소가 되는데, n과 서로소인 점프는 해밀톤 사이클을 형성하기 때문이다. n개의 정점을 가진 사이클 그래프의 지름은 $\lfloor n/2 \rfloor$이므로 다음 정리를 얻을 수 있다.

[정리 4.1] 분지수가 2이면서 최소 지름을 가지는 circulant 그래프는 $C_n(1)$이고, 그것의 지름은 $\text{dia}(n, 2)=\lfloor n/2 \rfloor$이다.

이제 분지수 d가 3인 경우를 고려해 보자. 분지수가 홀수인 모든 그래프는 짝수개의 정점을 가지므로 n이 짝수인 경우에는 dia(n, d)가 유한값을 그렇지 않은 경우에는 dia(n, d)가 무한값을 갖는다. n을 짝수라고 가정한다. 분지수가 3인 연결된 circulant 그래프는 $C_n(1, n/2)$나 혹은 $C_n(2, n/2)$과 동형임이 [21]에 밝혀졌으므로, dia(n, 3)를 구하는 것은 $C_n(1, n/2)$과 $C_n(2, n/2)$의 지름을 구하는 문제로 귀착된다.

[정리 4.2] 분지수가 3인 연결된 circulant 그래프는 $C_n(1, n/2)$이나 혹은 $C_n(2, n/2)$과 동형이다.

$C_n(1, n/2)$의 지름은 $C_{n/2+1}(1)$의 지름과 같고, $C_n(2, n/2)$는 연결되어 있을 때 $C_2(1)$과 $C_{n/2}(1)$의 그래프 곱과 동형이므로 이 사실을 이용하여 $C_n(2, n/2)$의 지름도 구할 수 있다. 따라서 다음의 정리를 얻을 수 있다.

[정리 4.3] 분지수가 3이면서 최소 지름을 가지는 circulant 그래프는 $C_n(1, n/2)$이고, 그것의 지름은 $\text{dia}(n, 3)=\lceil n/4 \rceil$이다.

분지수 d가 4인 경우는 Boesch와 Wang이 [9]에서 최소 지름을 갖는 circulant 그래프를 제시하였다.

[정리 4.4] 분지수가 4이면서 최소 지름을 가지는 circulant 그래프는 $C_n(m, m+1)$이고, 그것의 지름은 $\text{dia}(n, 4)=m$이다. 여기서 $m=\lceil(-1+\sqrt{2n-1})/2\rceil$이다.

현재까지 $d\le 4$인 경우에 대해서만 dia(n, d)가 밝혀져 있다. $d\ge 5$인 경우 dia(n, d)의 값을 구하는 것은 매우 어려운 문제일 것이라는 점을 다음과 같이 dia(n, d)를 관찰함으로써 짐작할 수 있다. $d\le 4$인 경우 dia(n,d)는 n이 증가함에 따라 감소하지 않는 함수이다. 즉 $n\le n'$이면 $\text{dia}(n, d)\le \text{dia}(n', d)$을 만족한다. 그러나 일반적으로

$d \geq 5$인 경우는 성립하지 않는 성질이다. dia(34, 5)=4>dia(36, 5)=3이고, dia(51, 6)=4>dia(52, 6)=3이다.

일반적인 d에 대해서 dia(n, d)의 상한값을 구하려는 노력이 [21]에 있었다. 두 circulant 그래프의 그래프 곱과 동형인 circulant 그래프를 분할 가능하다고 한다. G가 G_1과 G_2로 분할 가능한 circulant 그래프라면, G의 지름은 G_1과 G_2의 지름의 합이고 G의 분지수도 G_1과 G_2의 분지수의 합이며 G의 정점의 갯수는 G_1과 G_2의 정점의 갯수의 곱으로 표현된다.

결국 G의 지름을 구하는 문제는 G보다 정점의 갯수가 작은 circulant 그래프 G_1과 G_2의 지름을 구하는 문제로 귀착이 되고, G_1과 G_2의 지름에 각각 G_1, G_2와 정점의 갯수가 같은 분할 가능한 circulant 그래프의 지름을 대입함으로써 분할 가능한 circulant 그래프의 지름의 상한값을 구할 수 있다. 이러한 접근 방법으로 구한 상한값이 dia(n, d)과 같아서 최적인 경우도 많지만, 정점의 갯수 n, 분지수 d를 갖는 분할 가능한 circulant 그래프가 존재하지 않는 경우가 있다는 문제점을 갖고 있다

이제 d을 증가시키면서 dia(n, d)의 성질을 생각해 보자. 분지수 d가 2일 때의 dia(n, d)는 약 n/2이고, 분지수를 3으로 증가시키면 dia(n, d)가 약 n/4이 되어 지름이 약 절반으로 (n에 무관하게 상수배) 줄어든다. d를 3에서 4로 증가시키면 지름이 O(n)에서 $O(\sqrt{n})$으로 급격히 줄어드는 현상이 나타난다. 그러면 d를 5로 증가시키면 지름이 상수배 정도로 줄어들 것인가 아니면 급격히 줄어들 것인가? d가 6일 때는?

지름이 $O(\sqrt{n})$이 되는 circulant 그래프를 얻기 위해서 필요한 최소 분지수는 4이다. 그러면 지름이 O(log n)이 되는 circulant 그래프를 얻기 위해서 필요한 최소 분지수는 얼마인가? 이러한 유형의 질문에 현재 아무도 대답하지 못하고 있다. 다만 d=log n일때, dia(n, d)=O(log n)임은 [30]으로부터 알 수 있다.

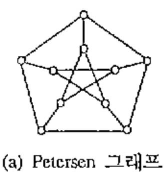
최소의 지름을 갖는 유향 circulant 그래프를 설계하는 것은 circulant 그래프에서 하는 것보다 더욱 어려운 문제로 알려져 있다. 점프의 갯수가 2개로 제한된 유향 circulant 그래프의 최소 지름이 얼마인지 조차 밝혀져 있지 않다.

크기 1인 점프를 포함하여 두 개의 점프를 가진 유향 circulant 그래프 $C_n^d(1, s)$를 이중 루프 네트워크이라고 부른다. Liu가 [19]에서 제안한 이중 루프 네트워크는 $C_n^d(1, n-1)$이고, Grnarov 등이 제안한 데이지 체인은 $C_n^d(1, n-2)$이다[22]. Raghavendra 등이 [22]에서 $C_n^d(n, \sqrt{n})$이 최소의 지름을 갖는 이중 루프 네트워크라고 주장했으나, Hwang이 [17]에 반례를 제시함으로써 부정되었다. 그 후 Hwang과 Xu가 [18]에 몇 가지 조건을 만족하는 n에 대해서는 지름이 최소인 이중 루프 네트워크를 설계하였다. $C_n^d(1, s)$의 지름에 대한 하한값은 $\lceil\sqrt{3n}\rceil-2$이라고 Wong과 Coppersmith에 의해서 [28]에서 밝혀졌다.

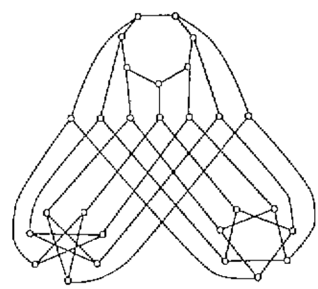
V. Circulant 그래프의 해밀톤 특성

그래프의 모든 정점을 지나는 사이클을 해밀톤 사이클, 모든 정점을 지나는 경로를 해밀톤 경로라고 한다. 일반적으로 주어진 그래프가 해밀톤 사이클을 (혹은 해밀톤 경로를) 가지고 있는지를 판별하는 문제는 현재까지 그래프 이론 분야에서 해결하지 못한 중요한 문제이다. 다만 이 문제에 대해서 충분 조건이나 필요 조건은 헤아릴 수 없을 정도로 많이 알려져 있다. Circulant 그래프와 circulant 그래프 부류를 포함하는 정점 대칭 그래프나 Cayley 그래프의 해밀톤 특성에 관한 연구 결과를 소개하기로 한다.

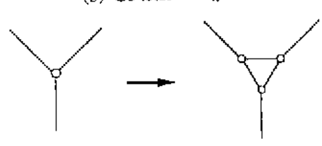
현재까지 연결된 정점 대칭 그래프 중에 해밀톤 사이클을 가지고 있지 않은 그래프는 단 4개 만이 알려져 있다[2]. 4개의 그래프 중 하나는 그림 4(a)에 있어 Petersen 그래프이고, 또 다른 하나는 그림 4(b)에 있는 Coxeter 그래프이며, 나머지 두 개의 그래프는 그림 4(c)와



(a) Petersen 그래프



(b) Coxeter 그래프



(c) 해밀톤 사이클을 가지고 있는 않은 그래프의 설계

(그림 4) 해밀톤 사이클을 가지고 있지 않은 정점 대칭 그래프

같이 Petersen 그래프와 Coxeter 그래프의 각 정점을 길이가 3인 사이클로 바꾸고 해당되는 정점을 이어서 만들어진다.

그런데 이 4개의 그래프가 모두 해밀톤 경로를 가지고 있어서 Lovasz는 다음과 같은 가설을 제시하였다[2, 20].

[가설 5.1] 연결된 모든 정점 대칭 그래프는 해밀톤 경로를 가진다.

이 가설을 해결하기 위한 연구가 진행 중이지만[20, 27] 아직까지 증명되거나 반례가 발견되지 않고 있다. Lovasz의 가설을 해결하기 위한 연구 결과를 정리하면 다음과 같다.

[정리 5.1] p를 솟수, G를 n개의 정점을 가진 연결된 정점 대칭 그래프라 하자.

(a) n이 p, $2p$, $3p$, $4p$, $5p$, p^2, $2p^2$, p^3이면 G는 해밀톤 경로를 가진다.

(b) n이 p, $2p$, $3p$, p^2, $2p^2$, p^3이면 G는 Petersen 그래프만을 제외하고 해밀톤 사이클을 가진다.

그런데 해밀톤 사이클을 가지고 있지 않은 4개의 정점 대칭 그래프의 어느 것도 Cayley 그래프가 아니다. 따라서 Chen이 다음과 같은 가설을 제시하였다[4].

[가설 5.2] 정점을 3개 이상 가진 모든 연결된 Cayley 그래프는 해밀톤 사이클을 가지고 있다.

그리고 이 가설은 abelian 군에 대한 Cayley 그래프에서는 성립한다고 밝혀졌다[11]. Cyclic 군은 abelian 군이므로, cyclic 군에 대한 Cayley 그래프에 대해서도 위의 가설은 성립한다. 따라서 위의 결과로부터 다음과 같은 circulant 그래프의 해밀톤 특성을 얻을 수 있다.

[정리 5.2] 정점을 3개 이상 가진 모든 연결된 circulant 그래프는 해밀톤 사이클을 가진다.

유향 Cayley 그래프에서 유향 해밀톤 사이클을 찾는 문제는 Cayley 그래프에서 해밀톤 사이클을 찾는 문제보다 더욱 어려운 문제로 알려져 있다. Holsztynski와 Strube는 [26]에서 abelian 군에 대한 유향 Cayley 그래프가 강연결되어 있으면 유향 해밀톤 경로를 가지고 있다고 증명하였다. 이 결과로 다음과 같이 유향 circulant 그래프의 해밀톤 특성을 얻을 수 있다.

[정리 5.3] 강연결된 모든 유향 circulant 그래프는 유향 해밀톤 경로를 가진다.

강연결된 모든 유향 circulant 그래프는 유향 해밀톤 경로를 가지는데, 유향 해밀톤 사이클도 가지겠는가? 대답은 그렇지는 않다는 것이다. 정점의 갯수가 최소인 반례로 $C'_6(2, 3)$을 들 수 있다. 두 솟수 p, q에 대해서 $C'_{pq}(p, q)$는 강연결되어 있으면서 해밀톤 사이클은 가지고 있지 않아서. 유향 해밀톤 사이클을 가지고 있지 않은 유향 circulant 그래프는 무한히 많음을 알 수 있다.

현재까지 유향 circulant 그래프가 유향 해밀톤 사이클을 가질 필요 충분 조건은 밝혀져 있지 않고, 다만 점프의 갯수가 2개인 유향 circulant 그래프가 유향 해밀톤 사이클을 가질 필요 충분 조건은 아래와 같이 [29]에서 제시했다. 이 필요 충분 조건을 이용하면 유향 해밀톤 사이클의 갯수도 계산할 수 있다.

[정리 5.4] 강연결된 유향 circulant 그래프 $C'_n(a, b)$가 유향 해밀톤 사이클을 가질 필요 충분 조건은 $\gcd(ka+(d-k)b,\ n)=d$를 만족하는 정수 k, $0 \le k \le d$,가 존재한다는 것이다. 이때 $d=\gcd(n,\ b-a)$이다.

어떤 부류에 속하는 모든 것이 어떤 성질을 만족한다고 밝힐 수 없을 때 일반적으로 다음과 같은 두 가지 접근 방법을 취하게 된다. 첫째는 그 부류를 제한하여 제한된 부류에 속하는 모든 것이 그 성질을 만족한다고 증명하는 것이고, 둘째는 그 성질을 제한하여 그 부류에 속하는 모든 것이 제한된 성질을 만족함을 보이는 것이다. 이러한 접근 방법을 유향 circulant 그래프가 유향 해밀톤 사이클을 가지는가 하는 문제에 적용하여 다음과 같은 가설을 얻을 수 있다.

[가설 5.3] c개 이상의 점프를 가진 모든 강연결된 유향 circulant 그래프가 유향 해밀톤 사이클을 가지게 되는 상수 c가 존재한다.

[가설 5.4] 강연결된 모든 유향 circulant 그래프가 길이가 $n-c'$ 이상인 사이클을 가지게 되는 상수 c'이 존재한다.

위의 가설 5.3, 5.4의 진위는 현재까지 밝혀지지 않고 있다. 다만 $C'_{12}(2, 3, 8)$이 해밀톤 사이클을 가지고 있지 않으므로 가설 5.3이 참이라면 c가 4 이상이라는 것과, $C'_{21}(3, 7)$이 해밀톤 사이클은 물론 길이 20인 사이클을 가지지 않으므로 가설 5.4가 참이라면 c'이 2 이상이라는 것이 밝혀져 있을 뿐이다.

VI. 재귀 원형군

재귀 원형군(Recursive Circulant)이라 부르는 다중 컴퓨터의 위상이 [21]에서 제안되었는데, 그것이 circulant 그래프 부류에 속하므로 여기서 간단히 소개하기로 한다. 재귀 원형군 G(n, d)는 n개의 정점을 가지고 n보다 작은 모든 d의 거듭제곱이 점프인 circulant 그래프를 말한다. 즉 G(n, d)는 $C_n(d^0, d^1, \cdots, d^{\lceil \log_d n \rceil - 1})$이다.

여기서는 정점의 갯수 $n = cd^m$인 경우만을 고려하기로 한다. 이 때 $d \geq 2$이고 $1 \leq c < d$이다. $G(cd^m, d)$의 분지수는 $c=1$이고 $d=2$인 경우는 $2m-1$, $c=1$이고 $d \neq 2$인 경우는 $2m$, $c=2$인 경우는 $2m+1$, $c>2$인 경우는 $2m+2$이다. (앞 장까지는 그래프의 분지수를 d라고 표기했으나, 여기서 d는 분지수가 아니다.)

$G(cd^m, d)$는 최대의 연결도와 에지 연결도를 갖고 있으며, 지름은 d가 짝수일 때 약 $dm/2+c/2$, 홀수일 때 약 $(d-1)m/2+c/2$이라고 분석되었다. $G(cd^m, d)$는 circulant 그래프이므로 정점 대칭 그래프이고 $n \geq 3$인 경우 해밀톤 사이클을 가지고 있다.

$G(cd^m, d)$는 재귀적 구조를 가지는데, 정점의 갯수가 $G(cd^m, d)$의 1/d인 d개의 $G(cd^{m-1}, d)$로 $G(cd^m, d)$를 구성할 수 있다. 역으로 말하면 $G(cd^m, d)$에 크기가 1인 점프를 제거함으로써 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형인 d개의 연결된 요소로 분리시킬 수 있다.

$n=2^m$이고 $d=4$인 경우 재귀 원형군 $G(2^m, 4)$는 m차원 하이퍼큐브 Q_m과 같은 갯수의 정점과 에지를 갖는다. 연결도 및 에지 연결도, 지름, 노드 방문비 및 에지 방문비 등 다중 컴퓨터의 위상을 평가할 때 사용하는 척도로 $G(2^m, 4)$과 Q_m를 [30]에서 비교하였다. [30]를 따르면 여러 척도에서 $G(2^m, 4)$가 Q_m보다 같거나 우수한 성능을 나타낸다고 밝혀졌다.

그래프 G(V, E)의 G′(V′, E′)에 대한 embedding은 V에서 V′으로 일대일 함수 ϕ라고 정의하는데, ϕ의 dilation은 G의 모든 에지 (v, w)에 대해서 $\phi(v)$와 $\phi(w)$간 거리의 최대값을 말한다. $G(2^m, 4)$는 Q_m에 dilation 2로 embedding되고 역으로 Q_m도 $G(2^m, 4)$에 dilation 2로 embedding된다고 밝혀졌다. 그리고 노드 갯수가 2^m인 이항 트리와 노드 갯수가 2^m-1인 완전 이진 트리가 $G(2^m, 4)$의 부트리임이 증명되었다.

VII. 결 론

Circulant 그래프는 정점 대칭 그래프라는 것 이상으로 상당히 대칭적인 구조를 가지고 있는 그래프이다. 그리고 circulant 그래프는 Cayley 그래프라든지, 혹은 항상 해밀톤 사이클을 가진다든지 등등의 여러가지 유용한 그래프 이론적인 특성을 가지고 있다. 따라서 다음과 같은 문제 해결을 위한 접근 방법에 circulant 그래프가 매우 유용할 것으로 기대된다.

주어진 성질을 만족하는 그래프를 찾고자 할 때 먼저 circulant 그래프에서 그 성질을 만족하는 그래프를 찾으려고 시도한다. 에지의 갯수가 가능한 작은 최소 시간 방송 그래프를 circulant 그래프에서 찾으려는 Farley의 노력이나 에지의 갯수가 작은 t/t-고장 진단 시스템을 유향 circulant 그래프에서 찾으려는 Chwa와 Hakimi의 시도는 모두 성공하였다. 또한 주어진 성질을 모든 그래프가 가진다는 가설을 해결하고자 할 때 먼저 circulant 그래프가 그 성질을 가지고 있는지를 고찰한다. circulant 그래프의 대칭적인 구조나 밝혀진 특성은 가설을 증명하거나 부정하는데 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. A. Adam, "Research problem 2-10," J. Combinatorial Theory, Vol 3, 1967, p. 393.
2. B. Alspach, "The search for long paths and cycles in vertex-transitive graphs and digraphs," in: K. L. McAveney, ed., Combinatorial Mathermatics VIII, Lecture Notes #884, Springer, Berlin, 1981, pp. 14−22.
3. B. Alspach and T. D. Parsons, "Isomorphism of circulant graphs and digraphs," Discrete Mathematics, Vol. 25, 1979, pp. 97−108.
4. B. Alspach and T. D. Parsons, "On hamiltonian cycles in metacirculant graphs," Annals of Discerte Mathematics, Vol. 15, 1982, pp. 1−7.
5. L. Babai, "Spectra of Cayley graphs," J. Combinatorial Theory Ser. B, Vol. 27, 1979, pp. 180−189.
6. F. Boesch and R. E. Thomas, "On graphs of invulnerable communication nets," IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. 17, 1971, pp. 183−192.
7. F. T. Boesch and A. P. Felzer, "A general class of invulnerable graphs," Networks. Vol. 2, 1972. pp. 261−283.
8. F. Boesch and R. Tindell, "Circulants and their connectivities," J. Graph Theory, Vol. 8, 1984, pp. 487−499.
9. F. T. Boesch and J. -F. Wang, "Reliable circulant networks with minimum transmission delay," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. 32, 1985, pp. 1286−1291.
10. C. Y. Chao and J. G. Wells, "A class of vertex-transitive digraphs," J. Combin. Theory, Vol. 14, 1973, pp. 246−255.
11. C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamil-

tonian abelian group graphs," Lecture Notes in Mathematics #884, Springer, Berlin, Australian Conference on Combinatorial Mathematics, 1980, pp. 23−24.
12. K. Y. Chwa and S. L. Hakimi, "On fault identification in diagnosable systems," IEEE trans. Computers, Vol. C-30, 1981, pp. 414−422.
13. E. A. van Doorn, "Connectivity of circulant digraphs," J. Graph Theory, Vol. 10, 1986, pp. 9−14.
14. B. Elspas and J. Turner, "Graphs with circulant adjacency matrices," J. Combinatorial Theory Ser. B, Vol. 9, 1970, pp. 297−307.
15. A. M. Farley, "Minimal broadcast networks," Networks, Vol. 9, 1979, pp. 313−332.
16. F. Harary, "The maximum connectivity of a graph," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 48, 1962, pp. 1142−1146.
17. F. K. Hwang, "Comments on reliable loop topologies for large local computer networks," IEEE Trans. Computers, Vol. C-36, 1987, pp. 383−384.
18. F. K. Hwang and Y. H. Xu, "Double loop networks with minimum delay," Discrete Math., Vol. 66, 1987, pp. 109−118.
19. M. T. Liu, "Distributed loop computer networks," Adv. in Computers, Vol. 17, 1978, pp. 163−221.
20. D. Marusic, "Hamiltonian cycles in vertex symmetric graphs of order $2p^2$," Discrete Mathematics, Vol. 66, 1987, pp. 169−174.
21. Jung-Heum Park, Circulant graphs and theiry application to communication networks, Ph.D. Thesis, Dept. Computer Science, KAIST, 1992.
22. D. S. Raghavendra, M. Gerla, and A. Avizienis, "Reliable loop topologies for large local computer networks," IEEE trans. Computers, Vol. C-34, 1985, pp. 46−55.
23. S. Toida, "A note on Adam's conjecture," J. Combinatorial Theory Ser. B, Vol. 23, 1977, pp. 239−246.
24. J. Turner, "Point-symmetric graphs with a prime number of points," J. Combinatorial Theory, Vol. 3, 1967, pp. 136−145.
25. J. F. Wang, An investigation of the network reliability properties of circulant graphs, Ph.D. Dissertation, Stevens Institute of Thchnology, 1983.
26. D. S. Witte, "On hamiltonian circuits in Cayley diagrams," Discrete Mathematics, Vol. 38, 1982, pp. 99−108.
27. D. Witte and A. Gallian, "A survey: hamiltonian cycles in Cayley graphs," Discrete Mathematics, Vol. 51, 1984, pp. 293−304.
28. C. K. Wong and D. Coppersmith, "A combinatorial problem related to multimodule memory organizations," J. Assoc. for Comput. Mach., Vol. 21, 1974, pp. 392−402.
29. 박정흠, 좌경룡, "두 개의 점프를 가진 유향 circulant 그래프의 유향 해밀톤 사이클," 한국정보과학회 봄 학술발표회 논문집, 17권 1호, 1990, pp. 489−492.
30. 박정흠, 좌경룡, "Recursive Circulant: 새로운 다중 컴퓨터의 위상," 한국정보과학회 봄 학술발표회 논문집, 19권 1호, 1992, pp. 587−590.

박 정 흠

1985 서울대학교 계산통계학과 (학사)
1987 한국과학기술원 전산학과 (석사)
1992 한국과학기술원 전산학과 (박사)
1992 ~현재 한국과학기술원 정보전자연구소 연수연구원
관심 분야 : 컴퓨터 이론(알고리즘, 그래프 이론, 계산 이론, 계산 기하학), 병렬 처리