

〈연구논문〉

## Beaming Effect를 고려한 Tube 연결부의 Conductance 계산

이진원 · 이영규

포항공대 기계공학과  
(1991년 11월 20일 접수)

### Effect of Gas Beaming in the Calculation of Tube Conductance

Jin W. Lee and Y. K. Lee

*Department of Mechanical Engineering, Pohang Institute of Science & Technology,  
Pohang P. O. 125, KOREA 790-600  
(Received November 20, 1991)*

**요 약**—진공시스템의 설계에서 필수적인 conductance 계산에 있어서, 극히 간단한 geometry를 제외하고는 수학적인 conductance 계산은 거의 불가능하여 여러개의 component로 구성된 시스템의 경우는 주로 Oatley의 근사식에 의해 구해져 왔다. 그러나 이 근사식은 널리 알려진 바와 같이 beaming effect를 무시한 것이므로 구조에 따라 큰 오차를 줄 수 있다. 본 연구에서는 정확한 결과를 주면서 Monte Carlo보다 훨씬 빠른 계산속도를 갖는 새로운 conductance 계산기법을 개발하고, 간단한 두가지의 형상에 대하여, 이 방법을 이용한 계산결과와 Oatley 식을 비교함으로써, 기하학적 형상에 따른 beaming effect를 정량적으로 연구하였다.

**Abstract**—Conductance calculation is essential in designing a vacuum system. Since mathematical solution is nearly impossible except for a few simple cases, it has been so usual to calculate the conductance for a series connection of components using an approximate formula by Oatley. However, Oatley's formula has a fundamental flaw of totally neglecting the effect of gas beaming. In this study, a new technique is suggested for calculating the conductance with the same accuracy as the Monte Carlo method but with much less computing time, and applied to a system of tube connections in series. The effects of gas beaming in the calculation of conductance is analyzed quantitatively by comparing the conductance calculated by this method with those from Oatley's formula.

### 1. 서 론

진공시스템의 유효 pumping speed를 계산하기 위해서는, 진공시스템 내의 여러 component들에 대한 conductance를 알아야 한다. Conductance란 어떤 component의 입구와 출구에서 기체가 random distribution을 가지고 입사한다고 할 때 기체 통과량을 양단 압력차로 나눈 값으로서, 기체 유동에 대한 저항의 역이다. 아주 얇은 orifice에 대한 conductance Co는 kinetic theory에 의해서 잘 알려져 있으며, 기타

component에 대한 conductance는 대개 상류측 입구 면적에 대응하는 orifice conductance와 통과확률 (transmission probability)의 곱,  $C = C_o \times Pr$ 으로 나타난다. 가장 간단한 원형 tube에 대해서는 Clausing [1]에 의해서 적분방정식이 유도되어 근사값이 table로 주어진 이후, Kennard[2], Henning[4], Sauter[5]에 의해서 이용하기 쉬운 간단한 근사식으로 표현되어 왔으나, 극히 간단한 geometry를 가지는 component를 제외하고는 정확한 수학적인 conductance 계산은 어렵다. 더우기 component가 하나가 아닌

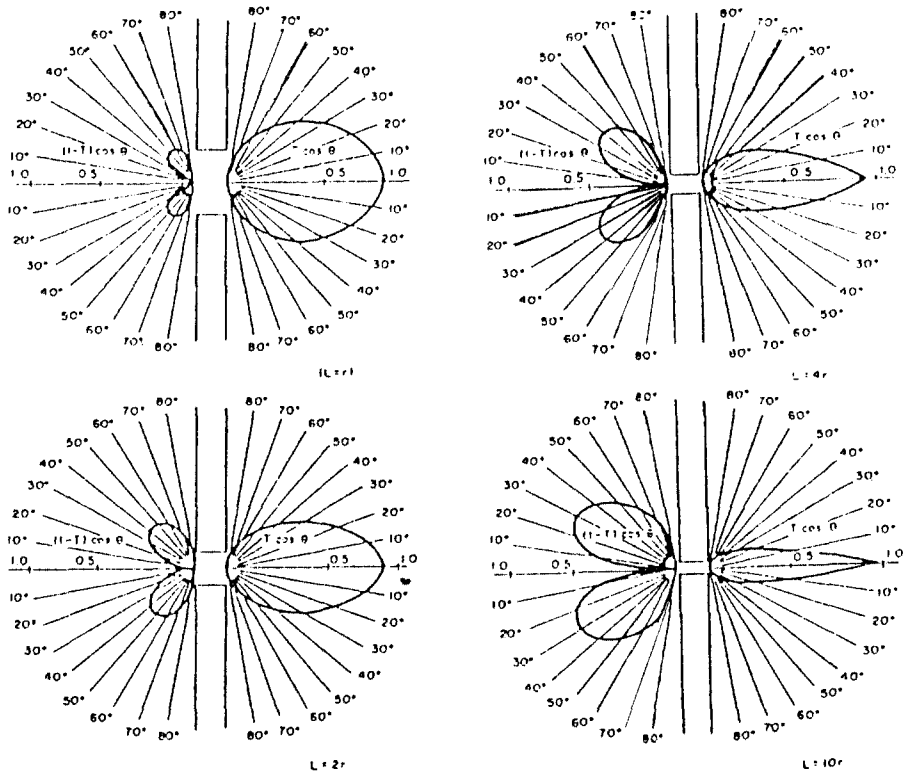


그림 1. 실린더 형상에 따른 기체유속분포의 변화[7].

여러개가 연결된 경우에는 더욱 어려워지므로 결국 근사식을 쓸 수 밖에 없다. 2개 이상의 component가 직렬 또는 병렬로 연결된 경우의 유효 conductance 계산은 전통적으로 전기회로와의 유사성을 이용하여 병렬인 경우  $\alpha_T = \alpha_1 + \alpha_2$ , 직렬인 경우  $1/\alpha_T = 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2$ 의 식을 사용하여 왔다. 윗식은 병렬인 경우에 대해서는 옳은 결과를 주지만, 직렬의 경우에 있어서는 각 component 사이에 등온의 거대한 chamber가 있지 않으면 틀린 결과를 주게 된다. Oatley[6]는 동일한 단면적을 가지고 transmission probability가 각각  $\alpha_1$  과  $\alpha_2$ 인 component가 직접 연결된 경우의 total transmission probability  $\alpha_T$ 는 Oatley의 식으로 널리 알려진 아래의 식이 정확한 값을 준다는 것을 보였다.

$$\frac{1}{\alpha_T} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1 \quad (1)$$

그는 또한 작은 직경(d) 실린더와 큰 직경(D) 실린더가 직렬 연결인 경우, 작은 직경 실린더의 양쪽

에 플랜지가 연결된 것으로 간주하여 작은 실린더의 transmission probability를 큰 실린더를 기준으로 한 등가의 transmission probability,  $\alpha_{1D} = \frac{d^2}{D^2} \alpha_1$ 로 바꾸어 (1)식을 사용하여 다음과 같은 식을 유도하였다.

$$\frac{1}{\alpha_T} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d^2}{D^2} \cdot \frac{1}{\alpha_2} - \frac{d^2}{D^2} \quad (2)$$

위와 같은 방법으로 n개의 직경이 다른 component를 연결할 경우 가장 큰 직경 D를 기준으로 한 유효 transmission probability는 다음과 같다.

$$\frac{1}{\alpha^{TD}} = \sum_{i=1}^n \frac{D^2}{d_i^2} \cdot \frac{1}{\alpha_i} - (n-1) \quad (3)$$

그런데 첫번째 실린더의 직경이 D가 아닌 경우

$$\alpha_T = \frac{D^2}{d_1^2} \alpha_{TD}$$

의 관계에 의해서

$$\frac{1}{\alpha_r} = \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{d_i^2} \cdot \frac{1}{\alpha_i} - \frac{d_i^2}{D^2} (n-1) \quad (4)$$

가 된다. 윗 식의 유도과정에서 가정은, 각 component의 입구 또는 출구에서 개스 분자는 전 단면적에서 균일하게 cosine 분포(즉 Maxwell 분포)를 가지고 있어야 한다는 것이다. 엄밀하게 말하면 큰 chamber에 뚫린 작은 orifice를 통해 나오는 gas flow는 cosine 분포를 갖고, 이 경우에는 이상의 Oatley식에 의해 conductance를 계산할 수 있다. 그러나 tube 등의 경우는 유동단면적에 수직된 방향에 기체 flux가 집중되는 분포를 보이며, 이를 beaming effect라 한다(그림 1). 따라서 orifice가 아닌 다른 component들의 조합 conductance의 계산에 있어서는 각각 component의 conductance로부터의 Oatley등의 조합공식을 이용하여 구할 수 없고, 전구조에 대한 conductance를 직접 구해야 한다.

본 논문에서는 beaming effect를 무시한 Oatley식의 적용한계를 정의하기 위하여, Monte Carlo simulation이 아닌 view factor를 이용한 새로운 transmission probability 계산방법을 개발하고, 이 방법을 이용한 계산 결과와 Oatley식을 비교함으로써 component의 기하학적 형상에 따른 beaming effect의 변화를 정량적으로 연구하였다.

## 2. View Factor를 이용한 Transmission Probability 추정법

### 2.1. Formulation

길이에 따라 단면적이 변화하는 임의의 tube를 각 면적요소에서 표면조건과 기체 분자 유속이 일정하다는 조건을 만족할 수 있도록 tube 내부를 N개의 면적요소로 나누면, 임의의 k번째 면적요소에서 그 면적요소로 들어오는 기체분자유속  $n_{i,k}$ 와 나가는 분자유속  $n_{o,k}$ 가 항상 같아야 하므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$N_k = n_k A_k = (n_{o,k} - n_{i,k}) A_k = 0 \rightarrow n_{o,k} - n_{i,k} = 0 \quad (5)$$

여기에서  $n_k$ 는 단위면적당 순분자유속(net molecular flux), 그리고  $A_k$ 는 k번째 면적요소의 면적이다. k번째 면적요소에 들어오는 기체분자유속  $n_{i,k}$ 는 다른 면적요소로부터 출발하는 분자유속중 k번째 면적요

소에 직접 부딪치는 양들의 합이고, 각 면적요소에서 출발하는 기체분자의 분포는 방사(diffuse)하다고 가정할 수 있으므로, j 면적요소를 출발한 기체분자중 k 면적요소에 직접 부딪치는 비율은 view factor  $F_{jk}$ 만큼임을 알 수 있다. 따라서  $n_{i,k}$ 는  $n_{o,j}$ 와  $F_{jk}$ 를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_k n_{i,k} = \sum_{j=1}^N A_j n_{o,j} F_{jk} + A_e n_{o,e} F_{ke} \quad (6)$$

여기에서 첨자 e는 입구를 나타내고  $n_{o,e}$ 는 입구면에서 들어가는 단위면적당 단위시간당 개스분자수(known number)이다. 식(6)은 view factor reciprocity relation에 의해서 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_k n_{i,k} &= \sum_{j=1}^N n_{o,j} F_{kj} A_k + n_{o,e} F_{ke} A_k \\ \rightarrow n_{i,k} &= \sum_{j=1}^N N_{o,j} F_{kj} + n_{o,e} F_{ke} \end{aligned} \quad (7)$$

식(5)와 식(7)을 연립하면 k번째 면적요소에 대한 최종식을 준다.

$$n_{o,k} - \sum_{j=1}^N n_{o,j} F_{kj} = n_{o,e} F_{ke} \rightarrow \sum_{j=1}^N (\delta_{jk} - F_{kj}) n_{o,j} = n_{o,e} F_{ke} \quad (8)$$

(8) 식을 tube 내부의 N개의 면적요소에 대해서 쓰면 N개의 연립방정식이 되어 면적요소들 사이의 view factor를 알 경우  $N \times N$  matrix를 풀어  $n_{o,j}$ 를 계산할 수 있게 된다. 주어진 임의의 tube 또는 진공시스템의 transmission probability는 정의에 의해서 다음과 같이 구해진다.

$$\text{Pr} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^N n_{o,j} A_e F_{ej}}{A_e n_{o,e}} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^N n_{o,j} F_{ej}}{n_{o,e}} \quad (9)$$

만약  $n_{o,e}$ 를 1로 가정하면 다음과 같다.

$$\text{Pr} = 1 - \sum_{j=1}^N n_{o,j} F_{ej} \quad (10)$$

따라서 주어진 시스템 내의 면적요소 사이의 view factor를 알 수 있을 경우 transmission probability는 (10)식에 의해서 쉽게 구할 수 있다. 이 방법은 지금까지 정확한 계산을 위해 사용되어 온 Monte Carlo

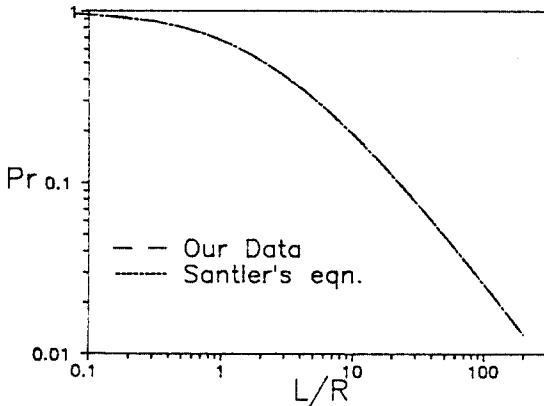


그림 2. 원형실린더의 길이에 따른 transmission probability.

방법과 비교해서 큰 장점을 가지고 있다. 먼저 간단한 geometry에 대해서는 이미 view factor가 많은 연구가 되어 수학적인 해가 존재하거나 또는 table화 되어 있고[8], 특히 길이가 긴 tube에 대해서는 계산시간이 매우 적게 걸린다. 위에 서술한 방법은 진공시스템 내부의 general한 기체분자 유동계산법[9]을 tube에 적용시킨 경우이다. 윗 방법의 검증을 위해서 view factor가 수학적인 해로 나와 있는 것중의 하나인 원형실린더를 길이에 따라 10~200개로 나누어 해석한 결과 Santler[5]의 근사식에서 변수  $k=1/7$ ,  $e=1$ 인 경우와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다(그림 2).

2.2. View Factor 계산

비록 단순한 형상에 대하여 수학적 방법으로 계산된 많은 view factor가 있지만 형상이 복잡해지거나 면적 요소들이 많아질 때 view factor 계산은 불가능해진다. 따라서 본 연구에서는 이러한 이유로 단순한 형상을 제외하고는 Monte Carlo 방법을 이용하여 계산하였다.

View factor 계산을 위한 Monte Carlo 방법은 하나의 면적요소에서 방사조건을 만족하도록 많은 가상의 입자를 발생시켜 어느 면에 얼마만큼의 입자가 직접 부딪혔는지를 계산한다. 입자는 면적요소내의 임의(random) 위치에서 방위각  $\phi$ 와 편각  $\theta$ 를 가지고 하나하나 발생되어 입자의 경로를 계산하여 어느 면에 부딪힐 것인가를 결정한다. 입자의 발생은 방사조건을 만족해야 되므로 cosine법칙을 만족하도록, 즉 단위 편각당 발생입자 밀도는  $\cos \theta$ 에 비례하도록 발생각을 선택하는 것이 중요하다. 이 조건은 면적요소에 수

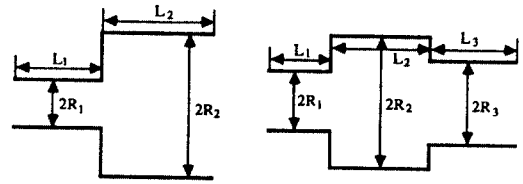


그림 3. 해석 모델 (a) 두개의 실린더가 연결된 경우, (b) 세개의 실린더가 연결된 경우.

직한 방향에 대한 편각  $\theta$ 와  $\theta+d\theta$  사이의 총 입자 발생수를  $\cos\theta\sin\theta d\theta$ 에 비례하도록 발생시키면 만족할 수 있다. 이 방사조건은 방위각  $\phi$ 와 면에 수직인 방향에 대한 편각  $\theta$ 를 다음과 같이 선택하면 만족한다[10].

$$\begin{aligned} \phi &= 2\pi R_1 \\ \theta &= \arccosine(\sqrt{R_2}) \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서  $R_1$ 과  $R_2$ 는 랜덤(random)수이다. 이러한 과정을 충분히 많이 되풀이하면 view factor  $F_{ij}$ 는 발생한 입자중  $j$ 면적요소에 부딪히는 입자의 분율, 즉  $F_{ij} = N_j/N_i$ 가 된다. 여기서  $N_j$ 는  $j$ 면과 부딪히는 수이고  $N_i$ 는  $i$ 면에서 발생하는 수이다.

3. 해석 모델

2개의 component가 연결된 경우와, 3개의 component가 연결된 경우 중 가장 많이 쓰이는 실린더 component 연결을 해석모델로 취하였다(그림 3). 두개의 실린더가 연결된 형태는 두번째 실린더가 첫번째 실린더보다 반경이 같거나 큰 경우에 대해서만 계산하였고, 세가지 실린더가 연결된 형태는 두번째 실린더가 첫번째와 세번째 실린더보다 반경이 같거나 큰 경우에 대해서만 계산하였다. 만일 기체의 흐름이 반대인 경우의 transmission probability는 면적비를 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 그림 3의 (a), (b)에 대한 Oatley식은 식 (2), 식 (3)으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

(a) 두개의 실린더의 연결 경우

$$\frac{1}{\alpha_T} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right) \quad (12)$$

(b) 세개의 실린더의 연결 경우

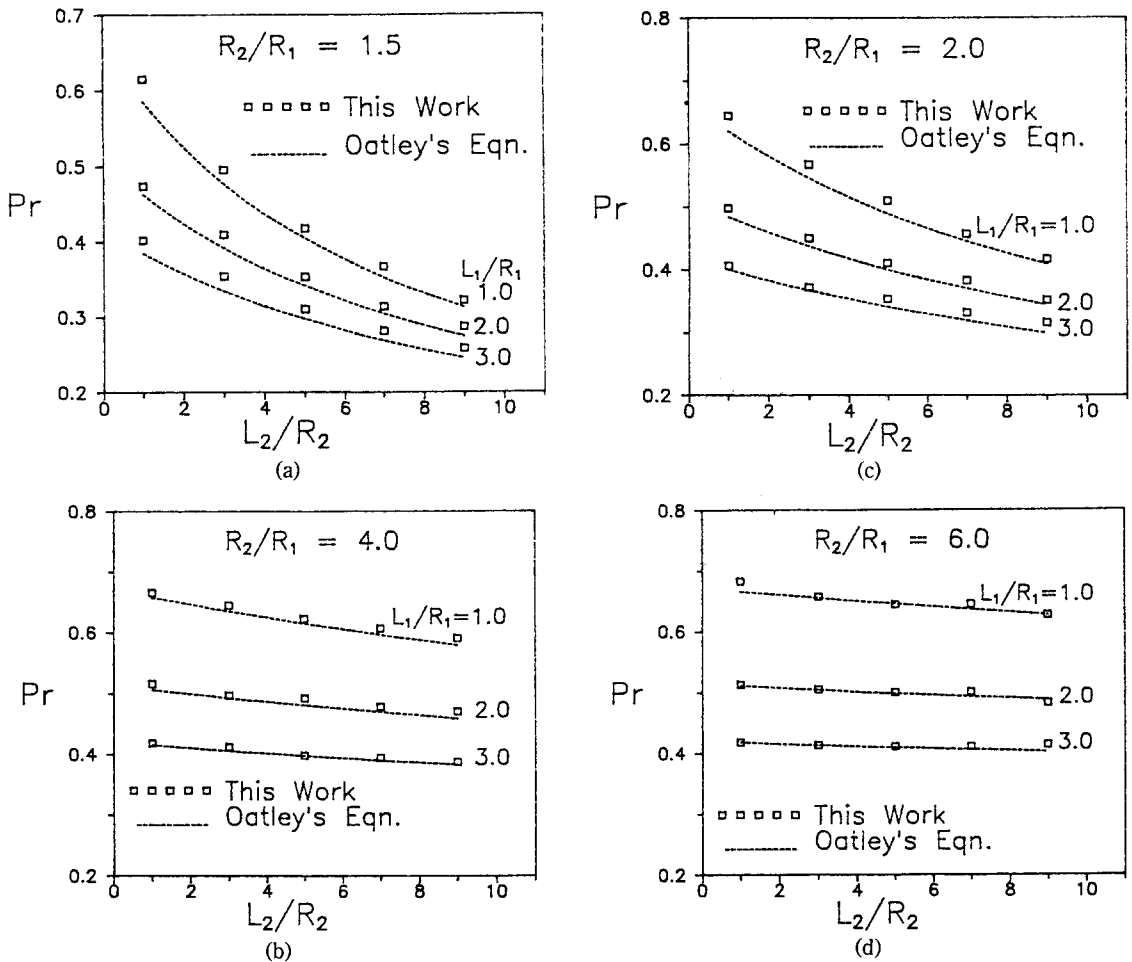


그림 4. 두개 실린더 연결의 transmission probability (a)  $R_2/R_1=1.5$ , (b)  $R_2/R_1=2.0$ , (c)  $R_2/R_1= 4.0$ , (d)  $R_2/R_1=6.0$ .

$$\frac{1}{\alpha_T} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{1}{\alpha_2} + \frac{A_1}{A_3} \cdot \frac{1}{\alpha_3} - \frac{2A_1}{A_2} \quad (13)$$

여기에서  $\alpha_1, \alpha_2, A_1, A_2$ 는 각 실린더의 transmission probability와 단면적을 나타낸다. Oatley 식을 이용하는데 필요한 각 실린더의 transmission probability 값은, 각 실린더를 길이 방향으로 100개 정도의 면적요소로 나누어, 각 면적요소 사이의 view factor는 이미 구해진 수학적인 해를 이용하여 계산하였다.

View factor를 이용한 본 논문의 계산에서는 시스템 내부의 면적요소를 100~150개 정도 나누었고 각 면적요소의 view factor 계산을 위한 기체 분자 발생갯수는 4000~6000개 정도 취하였다.

## 4. 결과 및 고찰

### 4.1. 두개 tube 직렬연결 경우

두개의 tube가 직렬연결된 경우에 대한 실질 통과 확률 계산결과와 Oatley 식에 의한 통과 확률을 비교하여 보면 두 tube의 반경비와 길이의 변화에 무관하게 항상 실질 통과 확률이 크다(그림 4). 이는 첫번째 tube 속을 통과해 오면서 두번째 tube 입구에서의 입자유속이 cosine 분포로부터 축방향으로 약간 치우쳐진 beaming 효과 때문이다.

실질 통과확률을 Oatley 통과확률로 나누어 Oatley 식의 상대오차를 구해 보면(그림 5), 먼저 beaming

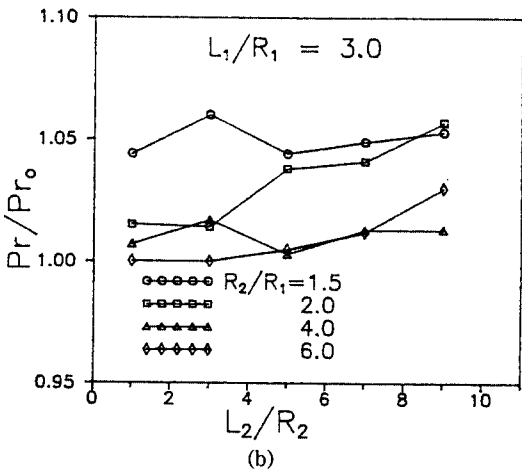
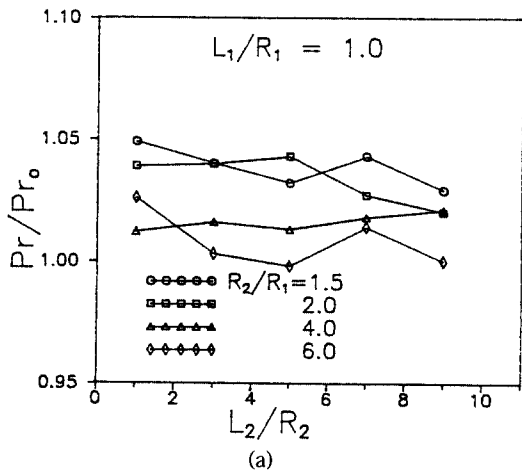


그림 5. 두개 연결 tube의 beaming effect (a)  $L_1/R_1=1$ , (b)  $L_1/R_1=3$ .

effect에 의한 오차는 고려된 변수 범위내에서 최대 6% 정도로서 큰 값이 아님을 알 수 있다. 결과의 scatter는 view factor 계산시의 유한 갯수를 사용한 Monte Carlo 방법의 오차와 matrix inverse 시에 matrix element간의 상대치가 크게 다를 경우에 생기는 오차 등으로 인한 것으로서, 보다 많은 갯수의 입자를 이용한 Monte Carlo 계산과 보다 효과적인 matrix inversion algorithm을 이용하면 개선될 수 있다. 이상의 내용을 고려할 때 대략 다음과 같은 일반적인 경향을 발견할 수 있다. 먼저 두개 tube의 반경비가 감소함에 따라 Oatley 식의 상대오차는 증가하며, tube 길이의 영향은 반경의 영향에 비하여 적다.

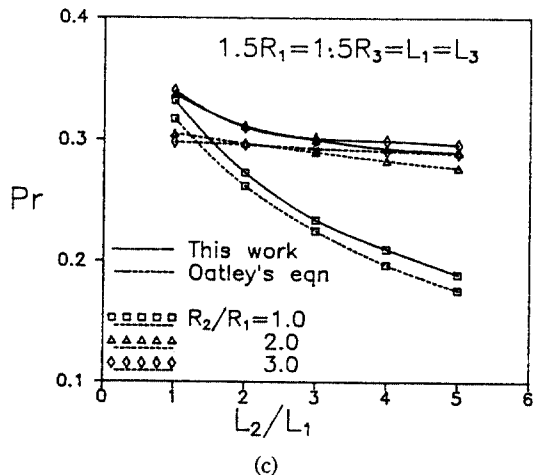
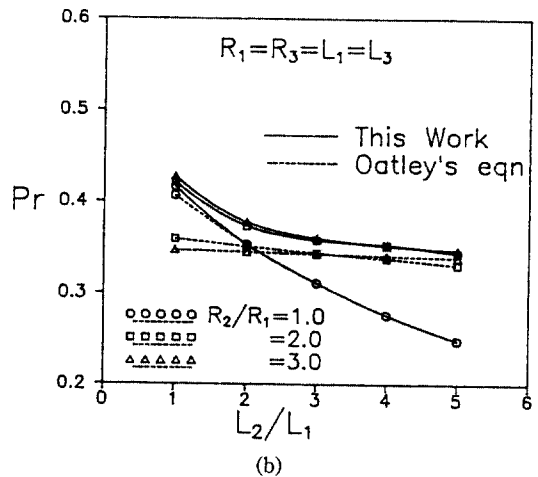
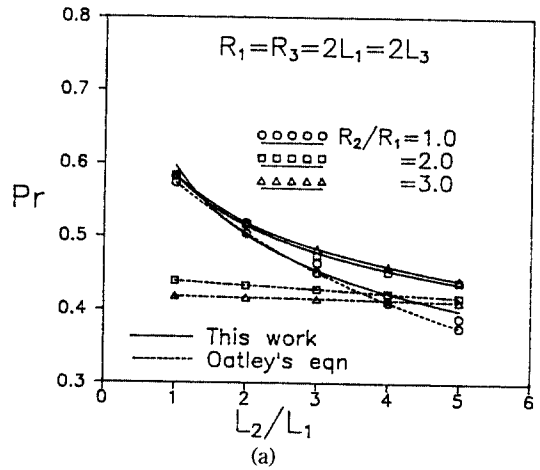


그림 6. 세개 실린더 연결의 transmission probability (a)  $L_1/R_1=0.5$ , (b)  $L_1/R_1=1.0$ , (c)  $L_1/R_1=1.5$ .

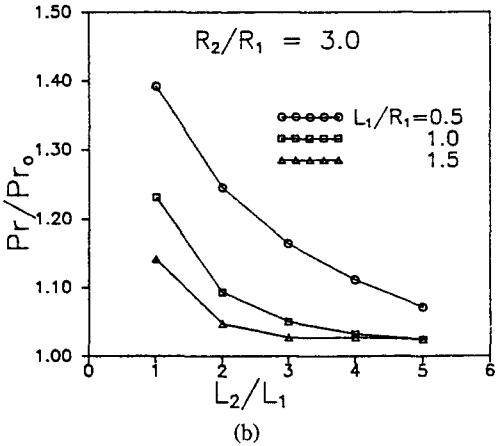
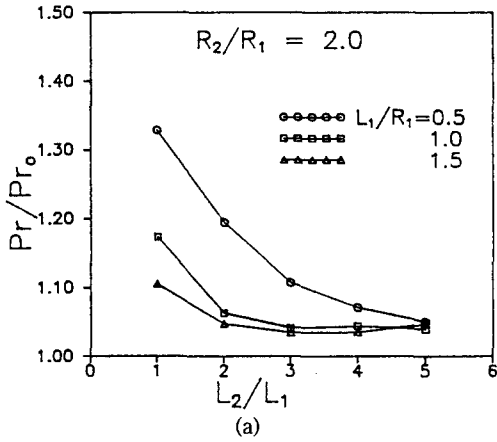


그림 7. 세개 실린더 연결의 beaming effect (a)  $R_2/R_1 = 2.0$ , (b)  $R_2/R_1 = 3.0$ .

4.2. 3개 tube 직렬연결의 경우

3개 tube 직렬연결(가운데 tube의 반경이 큰 경우)의 경우는 2개 tube 연결과는 전혀 다른 특성을 보인다. 먼저  $R_2/R_1 = 1$ 인 경우(같은 직경 tube를 연결한 경우)와  $R_2/R_1 \neq 1$ 인 경우의  $L_2$ 에 따른 통과확률 곡선이 다른 경향을 보이는 것이 관찰된다(그림 6). 이것은  $R_1 = R_2 = R_3$ 인 경우에는, 같은 직경의 tube를 연결한 것이므로, 전체 통과 확률은 Oatley 식에 비하여 단일 tube의 beaming effect 정도로 변하며, 따라서 그 양은 적고 tube의 길이에 따라 계속적으로 변할 것이 예상된다. 반면에  $R_2/R_1$ 이 커지면서 그리고  $L_2/L_1$ 이 커지면서 가운데 tube는 randomizing chamber의 역할을 하게 되어 실질통과 확률이 Oatley의 것과 같아지게 되는 것이다. 다만  $L_2/L_1$ 이 작은 경우

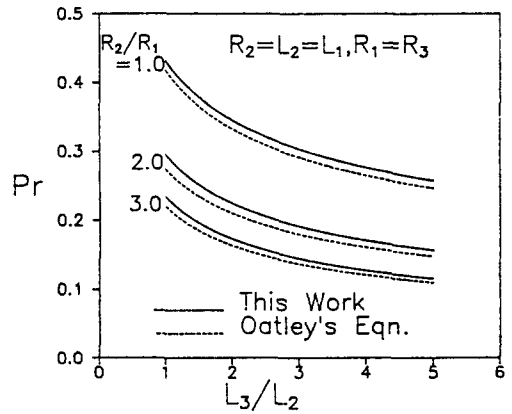


그림 8. 세번째 실린더 길이에 따른 통과확률 변화( $L_2 = R_2$ ).

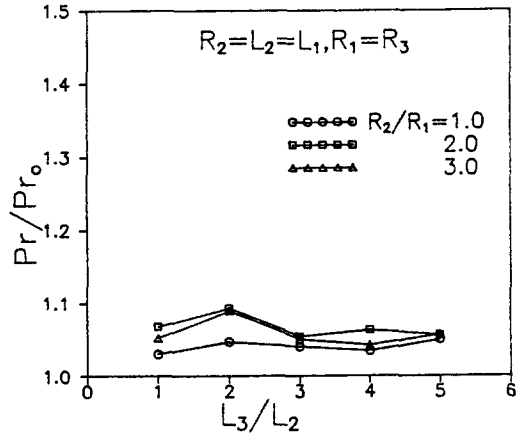


그림 9. 세번째 실린더 길이의 변화에 따른 beaming effect 변화( $L_2 = R_2$ ).

에는, 첫번째 tube 출구와 세번째 tube 입구 사이의 beaming effect, 그리고 첫번째 tube출구와 세번째 tube 입구 사이의 beaming effect, 그리고 첫번째 tube 출구와 두번째 tube 끝판 disk 사이의 beaming effect로 인하여 random 분포를 가정한 Oatley의 식에 비하여 큰 차이를 나타낸다. 따라서 3개의 실린더와 연결된 경우 beaming effect는 주로 가운데 실린더에 의해서 발생되며 이 경우 최대 오차는 약 40%에 이른다. 첫번째와 세번째가 같은 실린더인 경우 이 실린더의 길이/반경 비가 클수록 양쪽 실린더 내에서 중간 실린더를 통과하여 나오는 beaming이 감쇄되어 중간 실린더에 관계없이 beaming effect가 작아지고(그림 6), 만약 이 비가 0.5인 경우 세 실린더가 같은

반경인 경우를 제외하고 beaming effect가 극단적으로 증가해서 Oatley의 결과와 경향이 다른 것을 볼 수 있다(그림 6(a)). 앞의 조건처럼 첫번째와 세번째가 같은 실린더인 경우 두번째 실린더의 길이/반경 비가 작고 첫번째 실린더와의 반경비가 커지면 마치 원관에 구멍이 있는 경우와 같은 경우이므로, 이 경우 (13) 식은 전기회로에서의 직렬 식과 같은 형태가 되어 대단히 큰 오차가 발생하게 되고 그 양은 양쪽 실린더의 transmission probability가 작을수록 커지게 된다(그림 7). 두번째 실린더의 길이가 길 때 상대오차는 줄어들고 이 오차는 첫번째 실린더와 두번째 실린더의 반경비가 커지면 증가한다. 만약 첫번째 실린더와 세번째 실린더의 반경이 같고 세번째 실린더의 길이만 증가할 경우(그림 8, 9) 반경비가 클수록 비록 그 양은 적지만 beaming effect는 증가하는 경향이 있고, 첫번째 실린더의 길이가 짧기 때문에 세번째 실린더 길이가 길 경우에도 그리 크게 오차가 줄지 않는다.

## 5. 결 론

View factor를 사용하여 정확한 transmission probability 값을 계산할 수 있는 새로운 계산기법을 개발하고, 이를 이용하여 간단한 두 가지 형태의 구조에 대한 beaming effect를 해석하였다.

두개의 실린더를 연결한 형태의 구조의 경우 Oatley식에 의한 결과는 view factor를 이용한 본 연구의 계산결과와 같은 경향을 나타내고, 본 연구의 계산

범위 내에서 beaming effect에 의한 영향은 약 6% 정도의 상대 오차를 나타낸다. 이 상대오차는 큰 실린더와 작은 실린더의 반경비가 작을수록 커진다.

세개의 실린더가 연결된 구조는 두번째 실린더와 세번째 실린더의 반경비가 클수록, 두번째 실린더의 길이/반경 비가 작을수록 beaming effect에 의한 상대오차가 증가하고, 최대 상대오차는 본 연구의 계산범위 내에서 약 40%에 달한다. 따라서 이 경우에 Oatley의 식을 쓰는 것은 실질 conductance를 크게 과소평가하는 것이 되므로 pump의 크기(speed) 선택시에 과대한 pump 용량을 초래할 수 있다.

## 참고문헌

1. P. Clausing, *Ann. Phys.* **12**, 961 (1931).
2. H. Kennard, *Kinetic Theory of Gases*(McGraw-Hill, New York, 1938), pp.306-308.
3. A. S. Berman, *J. Appl. Phys.* **36**, 3356 (1965).
4. H. Henning, *Vacuum* **28**, 151 (1978).
5. D. J. Santler, *J. Vac. Sci. Technol.* **A4**, 338 (1986).
6. C. W. Oatley, *Br. J. Appl. Phys.* **8**, 15 (1957).
7. B. B. Dayton, *Gas Flow Patterns at Entrance and Exit of Cylindrical Tubes*, in *Vac. Symp. Tran.*, p. 5, Pergamon, Oxford (1956).
8. J. R. Howell, *Radiation Configuration Factor*, (McGraw Hill, 1982).
9. J. W. Lee and Y. K. Lee, *Vacuum*, **42**, 555 (1991).
10. M. M. Weiner, J. W. Tindall and L. M. Candell, Paper No. 65-WA/HT-51, ASME, Nov. (1960).