

다중 제어기 및 다중 루우프로 구성된 포화 제어 시스템의 정적 리셋 와인드업 방지 방법

Static Anti-Reset Windup Method for Saturating Control Systems with Multiple Controllers and Multiloop Configuration

박종구, 최종호
(Jong-Koo Park and Chong-Ho Choi)

Abstract : This paper presents an anti-reset windup (ARW) compensation method for saturating control systems with multiple controllers and/or multiloop configuration. The proposed ARW method is motivated by the concept of equilibrium point. The design parameters of the ARW scheme is derived explicitly by minimizing a reasonable performance index. In the event of saturation, the resulting dynamics of the compensated controller reflects the dynamics of the linear closed-loop system. The proposed method guarantees the total stability of the resulting control systems under a certain condition. An illustrative example is given to show the effectiveness of the proposed method. The paper is an extension of the results in Park and Choi[10].

Keywords : saturation, static anti-reset windup, multiple controller, multiloop system

1. 서론

제어입력신호의 포화는 제어 시스템에서 흔히 마주칠 수 있는 비선형 현상이다. 예를 들어, 전기 증폭기의 경우 어떤 범위까지는 거의 선형 이득을 갖지만, 그 범위를 넘어서면 포화 현상을 일으키며, 모터 제어에 있어서도 전기자에 흘릴 수 있는 전류는 전원공급기의 제한 때문에 어떤 상하한 값을 갖는다. 이와 같은 현상은 밸브 시스템 제어에서도 발견될 수 있는 등 실제 시스템에서 흔히 접하는 문제이다. 포화요소가 시스템에 존재한다는 것은 플랜트에 대한 제어 활동에 그만큼 제약이 따른다는 것을 의미하므로, 이를 간과하여 제어기를 구성하는 경우 원하는 제어 목적을 달성할 수 없을 뿐만 아니라 경우에 따라 안정도에 문제를 일으키기도 한다. 그러나 제어기 설계의 단계에서부터 포화현상을 고려한다는 것은 상당히 어려운 작업에 속할 뿐만 아니라 그렇게 설계된 시스템 또한 성능 면에서 그리 만족스럽지 못한 경우가 많다.

포화현상이 시스템에 미치는 부적절한 현상을 리셋 와인드업(reset windup)이라 하고, 이를 방지하는 구조를 리셋 와인드업 방지(ARW) 구조라 하며, 표준적이며 실제적인 ARW 보상방법은 대상 플랜트에 대해 포화현상을 고려하지 않고 제어기를 설계한 다음, 포화현상으로 인한 부정적인 영향을 보상하기 위하여 적절한 보상구조를 채택하는 방법이다. 이러한 보상방법을 '2단계 설계기법'이라 하며 [2],[10], 근래에 많은 연구자들은 효과적인 ARW 보상방법을 마련하는 것에 관심을 기울여 왔다[2],[8],[10]-[13],[15].

Hanus 등[5]은 이른바 "컨디셔닝 기법(conditioning technique)"이라 불리는 구조를 고려하여 시스템의 성능 저하를 감소시키는 방법을 제안하였으며, 유사한 보상 방법은 Campo와 Morari[2]에 의해서도 제시되었는데, 그들은 또한 다변수 제어 입력 신호의 방향성을 다루기 위한 방안도 제시하였다. Astrom과 Wittenmark[1]는 리셋 와인드업 현상을 방지하기 위한 "관측자 기법(observer technique)"을 제

안하였는데, 이 방법은 목적하는 제어 신호와 포화 요소를 통과하여 변형된 신호의 차이를 되먹임 요소로서 사용하는 방법이다. Walgama와 Sternby[15]는 관측자 기법 구조가 기존의 ARW 보상 방법을 통합하는 표준적인 ARW 보상 방법이라는 것을 기술하였다.

최근의 연구결과 중에서 Park과 Choi[10]-[13]는 평형점 개념에 기초한 효율적인 ARW 보상방법을 제시한 바 있는데, 이 방법은 동적 보상방법[11]에 대응하는 정적 보상방법이며 보상기가 간단하여 구현하기가 쉽고 성능도 동적보상기와 비슷하다. 본 논문에서는 정적 보상방법을 보다 일반화시킨 방법을 제시하고자 하는 데 제시될 방법은 다중 제어기를 포함한 시스템 및 다중 루우프로 구조를 갖는 시스템 등 제어기의 위치 및 구조에 관계없이 적용할 수 있는 확장된 ARW 방법이다.

본 논문에서도 ARW 보상방법을 다루는 여타 논문과 마찬가지로 2단계 설계 절차에서의 첫 단계, 즉 포화요소가 존재하지 않는다고 가정한 상태에서의 다변수 선형 제어 시스템에 대한 만족할 만한 응답특성을 주는 선형 제어기는 이미 존재한다고 가정한다. 본 논문은 두 번째 단계에 초점을 맞추어 포화 상황에서 성능저하를 완화하기 위한 효과적인 보상기를 추가로 설계하고자 한다. 먼저 다중 제어기를 갖는 포화 시스템에 대하여 ARW 보상기를 유도한 후, 여기에서의 접근 방법을 다중 루우프로 구성된 제어 시스템에 적용하여, 제시된 보상방법을 보다 일반화한다.

2장에서는 다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템 구조를 살펴보고 ARW 보상구조를 설정한다. 3장에서는 추가적인 보상기를 문제를 단일화하여 구하고, 4장에서는 다중 루우프로 갖는 포화 시스템에 대한 보상기 설계에 대해 언급함으로써 제시된 보상방법을 더욱 일반화한다. 5장에서는 제시된 보상구조의 실제적인 의미에 대해서 살핀다. 6장에서는 전체 시스템에 대한 안정도 해석을 한다. 7장에서는 시뮬레이션을 통하여 제시된 보상 방법의 유용성을 검증한다. 끝으로 8장에 결론을 싣는다.

II. 다중 제어기로 구성된 포화 제어시스템 및 문제의 설정

다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템을 대표하여 두

접수일자 : 1996. 2. 9., 수정완료 : 1996. 8. 8.

박종구 : 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부

최종호 : 서울대학교 전기공학부, ERC-ACI, ASRI

※ 이 논문은 성균관대학교의 1995년도 성균학술연구비에 의하여 연구되었음

개의 제어기 $K_f(s)$, $K_b(s)$ 로 구성된 포화 제어 시스템을 고려하면 그림 1과 같이 도시할 수 있다. 임의의 다중 제어기를 포함한 제어 시스템은 이를 확장시키면 된다. 예를 들어 출력 측정 시스템이 동특성을 가지고 있는 경우에 이와 같은 형태로 정돈할 수 있으며 관측자의 동특성도 이와 같이 모델링할 수 있다. 여기서 플랜트와 제어기는 다음과 같은 최소의(minimal) 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

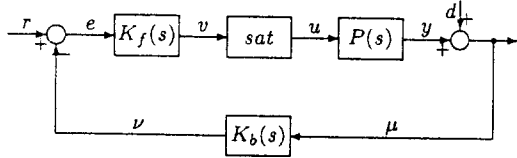


그림 1. 다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템.
Fig. 1. Saturating control systems with multiple controllers.

○플랜트 $P(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t), \tag{1}$$

$$y(t) = Cx_p(t) + Du(t), \tag{2}$$

$$u(t) = \text{sat}(v(t)). \tag{3}$$

○제어기 $K_f(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_{cf}(t) = Fx_{cf}(t) + Ge(t), \tag{4}$$

$$v(t) = Hx_{cf}(t) + Le(t), \tag{5}$$

$$e(t) = r(t) - y(t). \tag{6}$$

○제어기 $K_b(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_{cb}(t) = Fbx_{cb}(t) + G_b\mu(t), \tag{7}$$

$$v(t) = H_bx_{cb}(t) + L_b\mu(t), \tag{8}$$

$$\mu(t) = y(t) + d(t). \tag{9}$$

여기서 $r(t) \in R^n$ 는 기준입력, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력, $y(t) \in R^n$ 는 출력, $v(t) \in R^m$ 는 제어기의 출력, $d(t) \in R^n$ 는 외부 교란, $x_p(t) \in R^p$ 는 플랜트의 상태변수, 그리고 $x_{cf}(t) \in R^{q_1}$ 와 $x_{cb}(t) \in R^{q_2}$ 는 제어기들의 상태변수이다. 상태방정식을 구성하는 상수행렬들은 입출력 및 상태변수에 상응하는 차수를 갖으며 $\text{sat}(\cdot)$ 는 포화 비선형 함수를 의미한다.

광범위하게 사용되는 ARW 구조는 제어기 출력신호 $v(t)$ 와 포화된 제어신호 $u(t)$ 의 차이를 이용하여 제어기 주변에 국부적인 보상 구조를 삽입하는 형태로서[2],[8], [10]-[13],[15], 그 중에서도 관측자 형태를 응용한 제어구조가 표준적인 ARW 방법이다[15]. Park과 Choi[10]는 관측자 구조를 제어기 $K_f(s)$ 만 있는 제어구조에 적용하여 여기에서의 설계변수를 효율적으로 결정할 수 있는 데, 본 논문에서는 그림 1과 같은 다중 제어기가 있는 구조에서의 ARW 보상 방법을 [10]을 기초로 하여 제시하고자 한다.

관측자 형태의 기법을 응용한 보상된 제어기의 구조는 그림 2에 도시하였다. 그림 2에서 포화 비선형 함수는 플랜트의 일부이기 때문에 포화 비선형의 출력 $u(t)$ 는 센서를 통해 측정하거나 수학적 모델링 기법을 이용해 추정할 수 있으며 그림 2는 이와 같은 의미를 내포하고 있다. 블록 N 은 대상 시스템이 다변수 시스템일 경우 제어 입력신호의 방향

성 보상을 위해 도입한 것으로서, 제어 입력 신호 중에 어느 하나가 포화되었을 때 그 방향성을 유지하면서 신호의 크기를 조정하는 기능을 하는데[2],[10], 본 논문에서 제시하는 방법과 함께 사용하는 것이 바람직하다. 블록 N 을 도입하더라도, $v(t)$ 에서 $u(t)$ 까지는 또다른 포화함수이므로 본 논문에서 설계하려는 보상기에 영향을 주지 않는다. 여기서 보상된 제어기들의 동특성은 다음과 같다.

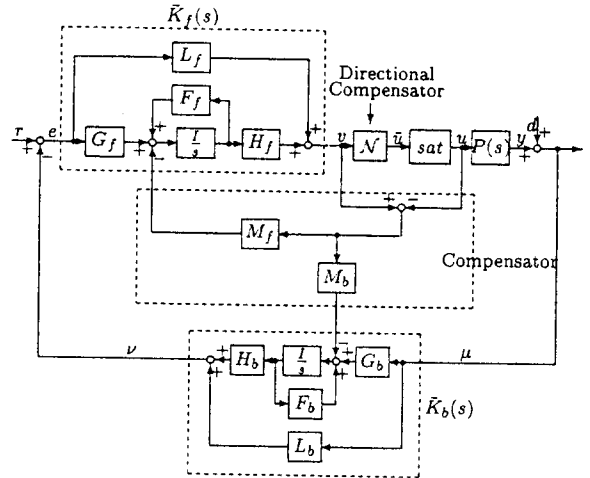


그림 2. ARW 구조를 채택한 포화 제어 시스템.
Fig. 2. Saturating control systems adopting the anti-reset windup structure.

○보상된 제어기 $\bar{K}_f(s)$ 의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cf}(t) &= Fx_{cf}(t) + Ge(t) - M_f(v(t) - u(t)) \\ &= (F_f - M_f H_f)x_{cf}(t) + (G_f - M_f L_f)e(t) \\ &\quad + M_f \mu(t), \end{aligned} \tag{10}$$

$$v(t) = Hx_{cf}(t) + Le(t), \tag{11}$$

$$e(t) = r(t) - y(t). \tag{12}$$

○보상된 제어기 $\bar{K}_b(s)$ 의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cb}(t) &= Fbx_{cb}(t) + G_b\mu(t) - M_b(v(t) - u(t)) \\ &= F_bx_{cb}(t) - M_b H_bx_{cb}(t) \\ &\quad + G_b\mu(t) - M_b L_b\mu(t) + M_b\mu(t), \end{aligned} \tag{13}$$

$$v(t) = H_bx_{cb}(t) + L_b\mu(t), \tag{14}$$

$$\mu(t) = y(t) + d(t). \tag{15}$$

여기서 M_f , M_b 는 각각 $q_1 \times m$, $q_2 \times m$ 차의 보상행렬로서 설계변수이다. 보상행렬 M_f , M_b 의 도입은 구동기가 선형 영역에서 동작할 때, 즉 $u(t) = v(t)$ 일 때에는 페루우프 시스템의 동작에 영향을 미치지 않지만, 구동기가 포화되었을 때에는, 즉 $u(t) \neq v(t)$ 일 때에는 영향을 미친다. 이때 상태변수 방정식의 최소성(minimality)에 의하여 (H_f, F_f) , (H_b, F_b) 가 각각 가관측(observable)이므로 M_f , M_b 를 조정함으로써 제어기의 동특성을 임의로 변경시킬 수 있다.

설계목적은 보상행렬 M_f , M_b 를 적절히 선정하여 구동기가 포화되었을 때의 응답특성을 포화요소가 존재하지 않았을 때의 시스템이 보이는 응답특성에 가능한 한 비슷하게 유지시키는 것이다. 보상행렬의 선택은 시스템의 성능에 직접적인 영향을 미치므로 적절한 M_f , M_b 를 선정하는 합당한 방법이 요구되며 다음절에서 이에 관해 다룬다.

III. 통합된 보상행렬의 유도

포화현상으로 인한 성능저하는 제어기의 상태변수들이 포화요소가 없는 선형 시스템에서의 그것과 다르다는 것에 기인한다[2],[5],[10]-[13],[15]. 왜곡된 제어기의 상태변수들은 부적절한 제어신호를 발생시키고, 결국 폐루우프 시스템의 성능을 저하시키게 되는 것이다.

Park과 Choi[10],[12]는 포화현상이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우의 평형점(equilibrium point)의 차이를 성능평가의 척도로 삼아 효율적인 ARW 보상방법을 제시한 바 있다. 포화 제어 시스템의 성능은 제어기 상태변수의 궤적과 관계되며 상태변수의 궤적은 평형점과 관계가 있으므로, 이와 같은 상태공간 상의 평형점의 위치 변화가 시스템의 성능저하를 유발시키는 요인 중의 하나라는 관찰로부터 ARW 보상기를 제시한 내용이다[10]. 여기서 평형점이라는 것은 미분 방정식에서 미분 항을 0으로 놓을 때 상태변수가 갖는 값이다.

본 논문에서는 이러한 보상개념에 기초하여 그림 2의 ARW 구조에서 보상행렬 M_f, M_b 를 설계하도록 한다. 설계 목적을 효율적으로 달성하기 위하여 먼저 제어기 $K_f(s)$ 와 제어기 $K_b(s)$ 를 통합하여 다룬다. 우선 (2), (4)-(9)로부터 다음과 같은 통합된 제어기 식을 얻을 수 있다.

○통합된 제어기의 동특성:

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + G_1(-\mu(t)) + G_2r(t), \quad (16)$$

$$v(t) = Hx_c(t) + L_1(-\mu(t)) + L_2r(t), \quad (17)$$

여기서

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_f & -G_f H_b \\ 0 & F_b \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} G_f L_b \\ -G_b \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} G_f \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H = [H_f - L_f H_b], \quad (19)$$

$$L_1 = L_f L_b, \quad L_2 = L_f$$

이다.

ARW 설계변수인 보상행렬 M_f, M_b 를 통합한 행렬을 M 이라 할 때 보상된 제어기 $\bar{K}_f(s)$ 와 $\bar{K}_b(s)$ 를 통합하여 기술하면 다음과 같다.

○보상된 통합 제어기의 동특성:

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + G_1(-\mu(t)) + G_2r(t) - M(v(t) - u(t)) \quad (20)$$

$$= (F - MH)x_c(t) + (G_1 - ML_1)(-\mu(t)) + (G_2 - ML_2)r(t) + M(u(t)),$$

$$v(t) = Hx_c(t) + L_1(-\mu(t)) + L_2r(t), \quad (21)$$

$$\mu(t) = y(t) + d(t), \quad (22)$$

여기서

$$M = \begin{bmatrix} M_f \\ M_b \end{bmatrix} \quad (23)$$

이다.

통합된 제어기와 플랜트로부터 보상행렬 M 을 설계하기 위해 사전 작업으로서 플랜트의 동특성 (1)과 통합된 보상 제어기의 (20)을 포화 비선형의 동작여부에 따라 통합하여 다시 기술하도록 한다.

○포화요소가 존재하지 않을 때의 폐루우프 시스템의 동특성: 앞의 (1) (3), (16), (17), 그리고 $u(t) = v(t)$ 로부터 다음

의 식이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_p(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} + G_r r(t) + G_d d(t), \quad (24)$$

여기서

$$A_i := \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$P := F - G_1 D(I + L_1 D)^{-1} H$$

$$Q := -G_1 [I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] C$$

$$R := B(I + L_1 D)^{-1} H \quad (26)$$

$$S := A - B(I + L_1 D)^{-1} L_1 C$$

$$G_r := \begin{bmatrix} G_2 - G_1 D(I + L_1 D)^{-1} L_2 \\ B(I + L_1 D)^{-1} L_2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$G_d := \begin{bmatrix} -G_1 [I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] \\ -B(I + L_1 D)^{-1} L_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

이다.

○포화요소가 존재할 때의 폐루우프 시스템의 동특성: m 개의 포화 요소 가운데 어느 한 요소라도 포화 영역에서 동작하는 경우, 앞서 기술된 (1)-(3), (20)-(22)로부터

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c(t) \\ \dot{\tilde{x}}_p(t) \end{bmatrix} = A_{sat} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_p(t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$+ \begin{bmatrix} (G_2 - ML_2)r(t) - (G_1 - ML_1)d(t) \\ + [M(I + L_1 D) - G_1 D]sat(v(t)) \\ Bsat(v(t)) \end{bmatrix},$$

여기서

$$A_{sat} = \begin{bmatrix} F - MH & -(G_1 - ML_1)C \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad (30)$$

이며, “ \sim ”는 시스템이 포화영역에서 동작할 때의 상태변수임을 의미한다.

그림 2에서 플랜트 $P(s)$ 가 불안정한 시스템이라면, 포화요소를 가진 제어 시스템을 결코 광역적(global)으로 안정화시킬 수 없다. 왜냐 하면 제어입력의 제한 때문에 목적하는 위치에 상태변수를 근접시킬 수 없는 그러한 상태값이 항상 존재하기 때문이며, 이는 포화되었을 때 되먹임 루우프가 실질적으로 끊어지는 상태가 된다는 것을 고려한다면 쉽게 이해할 수 있다[2]. 따라서 본 논문에서는 개루우프적으로 안정한 플랜트만을 다룬다. 이를 포함하여 보상행렬을 설계하는 데 필요한 가정을 다음과 같이 한다.

(A.1) 시스템 행렬 A 는 안정한 고유치를 갖는다.

(A.2) 포화요소가 없을 때의 선형 제어기 $K_f(s), K_b(s)$ 는 성능과 안정도 면에서 만족할 만한 특성을 준다.

(A.3) 선형 폐루우프 플랜트의 시스템 행렬(A.1) 플랜트 $P(s)$ 는 안정하다. 즉 (1)에서 $S = A - B(I + L_1 D)^{-1} L_1 C$ 는 특이행렬(singular matrix)이 아니다.

가정 (A.1)과 (A.2)는 ARW 문제에서 표준적인 것이다. 가정 (A.2)는 포화요소가 존재하지 않는다는 가정 아래 기존의 효과적인 설계기법 (예를 들어, PI, LQG/LTR, H_∞ 등) 중의 하나로써 선형 폐루우프 시스템의 성능과 안정도를 고려하여, 제어기의 구성요소 (즉 $F_f, F_b, G_f, G_b, H_f, H_b, L_f$, 그리고 L_b)들이 미리 설계되어 있다는 것을 의미한다. 가정 (A.3)는 기술적인 이유에서 필요한 것으로

서, 보상기를 설계하기 전에 이 조건을 확인할 수 있다. 가정 (A.3)에 관계된 제어기의 매개변수는 $L_1 = L_j L_b$ 뿐이다. 따라서 시스템이 이 조건을 만족시키지 않는다면 L_1 을 조정하거나, 제어기를 재 설계하면 되는데 대개의 시스템에서 가정 (A.3)은 그리 제한적인 조건은 아니다.

$(\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T$ 를 (24)의 평형점이라 하고, $(\hat{x}_c^T, \hat{x}_p^T)^T$ 를 (29)의 가상 평형점이라 할 때 이를 바탕으로 최적화문제를 구성할 때 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 1 : 그림 2와 같은 ARW 보상구조에서, 시스템이 가정 (A.1)-(A.3)을 만족시킨다 가정한다. 그러면 성능평가 척도

$$\min_M J = \{(\bar{x}_c - \hat{x}_c)^T (\bar{x}_c - \hat{x}_c)\}^{1/2} \quad (31)$$

를 최소화시키는 보상행렬 M^* 는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$\begin{aligned} M^* &= G_1(D - CA^{-1}B) \\ &\quad \times [(I + L_1D) - L_1CA^{-1}B]^{-1} \\ &= G_1D(I + L_1D)^{-1} \\ &\quad - G_1[I - D(I + L_1D)^{-1}L_1]C \\ &\quad \times [A - B(I + L_1D)^{-1}L_1C]^{-1} \\ &\quad \times B(I + L_1D)^{-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

즉

$$\begin{aligned} M_j^* &= G_j L_b (D - CA^{-1}B) [(I + L_j L_b D) \\ &\quad - L_j L_b CA^{-1}B]^{-1} \\ &= G_j L_b D (I + L_j L_b D)^{-1} - G_j L_b \\ &\quad [I - D(I + L_j L_b D)^{-1}L_j L_b]C \\ &\quad \times [A - B(I + L_j L_b D)^{-1}L_j L_b C]^{-1} \\ &\quad \times B(I + L_j L_b D)^{-1}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} M_b^* &= -G_b (D - CA^{-1}B) [(I + L_j L_b D) \\ &\quad - L_j L_b CA^{-1}B]^{-1} \\ &= -G_b D (I + L_j L_b D)^{-1} \\ &\quad + G_b [I - D(I + L_j L_b D)^{-1}L_j L_b]C \\ &\quad \times [A - B(I + L_j L_b D)^{-1}L_j L_b C]^{-1} \\ &\quad \times B(I + L_j L_b D)^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

이다.

증명 : 포화요소가 없을 때의 페루우프 시스템의 평형점 $(\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T$ 는 (24)로부터 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = -A_i^{-1} G_r r - A_i^{-1} G_d d \quad (35)$$

이고 A_b, G_r, G_d 등은 각각 (25), (26), (27)에 주어져 있다.

행렬 A_i 은 포화요소가 없는 페루우프 시스템의 시스템 행렬에 해당되고 가정 (A.2)에 의하여 안정행렬이어야 하므로, 그것의 역행렬은 존재한다. 또한 가정 (A.3)에 의하여 S 의 역행렬은 존재하므로, 분할된 행렬의 역행렬 보조정리 [6]를 적용하면

$$A_i^{-1} = \begin{bmatrix} X & -XQS^{-1} \\ -S^{-1}RX & W \end{bmatrix} \quad (36)$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} X &:= (P - QS^{-1}R)^{-1}, \\ W &:= S^{-1} + S^{-1}RXQS^{-1} \end{aligned}$$

이다. 위의 (36)을 (35)에 대입하면

$$\begin{aligned} \bar{x}_c &= \{-X[G_2 - G_1D(I + L_1D)^{-1}L_2] \\ &\quad + XQS^{-1}B(I + L_1D)^{-1}L_2\}r \\ &\quad + \{XG_1[I - D(I + L_1D)^{-1}L_1] \\ &\quad - XQS^{-1}B(I + L_1D)^{-1}L_1\}d \end{aligned} \quad (37)$$

를 얻는다.

마찬가지로 포화 요소가 동작하는 페루우프 시스템의 가상 평형점 $(\hat{x}_c^T, \hat{x}_p^T)^T$ 은 (29)로부터 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_p \end{bmatrix} = -A_{sat}^{-1} \times \begin{bmatrix} (G_2 - ML_2)r - (G_1 - ML_1)d \\ + [M(I + L_1D) - G_1D]sat(v) \\ Bsat(v) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

여기서 A_{sat} 는 (30)에 주어져 있다.

가정 (A.1)에 의하여 플랜트의 시스템 행렬 A 는 안정행렬이므로 특이행렬이 아니다. 또한 $(H_f, F_f), (H_b, F_b)$ 가 각각 가관측(observable)이므로 (H, F) 는 가관측이고 따라서 보상행렬 M 을 적절히 선정함으로써 $F - MH$ 를 특이행렬이 되지 않게 만들 수 있다. 잠정적으로 $F - MH$ 가 특이행렬이 아니라 가정한다. 이런 가정 아래에서는 행렬 A_{sat} 가 역행렬을 갖는다는 것이 보장된다. 먼저 성능평가척도 J 를 최소화시키는 M^* 를 구한 다음, 이 특별한 해에 대하여 $F - M^*H$ 가 특이행렬이 아님을 보이도록 한다.

Kailath[6]의 정리 A.22를 적용하면

$$A_{sat}^{-1} = \begin{bmatrix} (F - MH)^{-1} (F - MH)^{-1} (G_1 - ML_1) CA^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

이다. 위의 (39)를 (38)에 대입하면

$$\begin{aligned} \hat{x}_c &= -(F - MH)^{-1} (G_2 - ML_2)r \\ &\quad + (F - MH)^{-1} (G_1 - ML_1)d \\ &\quad - (F - MH)^{-1} [M(I + L_1D) - G_1D]sat(v) \\ &\quad - (F - MH)^{-1} (G_1 - ML_1)CA^{-1}Bsat(v), \end{aligned} \quad (40)$$

를 얻는다.

그러면 (37)과 (40)으로부터

$$\bar{x}_c - \hat{x}_c = \mathcal{E}_1 r + \mathcal{E}_2 d + \mathcal{E}_3 sat(v) \quad (41)$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= -X[G_2 - G_1D(I + L_1D)^{-1}L_2] \\ &\quad + XQS^{-1}B(I + L_1D)^{-1}L_2 \\ &\quad + (F - MH)^{-1} (G_2 - ML_2), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &:= XG_1[I - D(I + L_1D)^{-1}L_1] \\ &\quad - XQS^{-1}B(I + L_1D)^{-1}L_1 \\ &\quad - (F - MH)^{-1} (G_1 - ML_1), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\mathcal{E}_3 := (F - MH)^{-1} \{(G_1 - ML_1)CA^{-1}B + M(I + L_1D) - G_1D\} \quad (44)$$

와 같이 정의된다.

$\mathcal{E}_3 = 0$ 이 되는 M_i 를 구하여 보자. 그러면

$$(G_1 - ML_1)CA^{-1}B + M_i(I + L_1D) - G_1D = 0 \quad (45)$$

이 성립해야 하며, 이를 만족시키는 M_i 는

$$M_i = G_1(D - CA^{-1}B) \times [(I + L_1D) - L_1CA^{-1}B]^{-1} \quad (46)$$

이다. 이 식에 역행렬 보조정리[6]와 다음의 항등식

$$\begin{aligned} & [I - CA^{-1}B(I+L_1D)^{-1}L_1]^{-1}CA^{-1} \\ &= CA^{-1}[I - B(I+L_1D)^{-1}L_1CA^{-1}]^{-1} \\ &= C[A - B(I+L_1D)^{-1}L_1C]^{-1} \end{aligned} \quad (47)$$

을 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} M_i &= G_1D(I+L_1D)^{-1} \\ &\quad - G_1[I - D(I+L_1D)^{-1}L_1]C \\ &\quad \times [A - B(I+L_1D)^{-1}L_1C]^{-1}B(I+L_1D)^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

가 유도된다. 위의 (48)로부터

$$\begin{aligned} F - M_iH &= F - G_1D(I+L_1D)^{-1}H \\ &\quad + G_1[I - D(I+L_1D)^{-1}L_1]C \\ &\quad \times [A - B(I+L_1D)^{-1}L_1C]^{-1} \\ &\quad \times B(I+L_1D)^{-1}H \\ &= P - QS^{-1}R = X^{-1}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} G_2 - M_iL_2 &= [G_2 - G_1D(I+L_1D)^{-1}L_2] \\ &\quad + G_1[I - D(I+L_1D)^{-1}L_1]C \\ &\quad \times [A - B(I+L_1D)^{-1}L_1C]^{-1} \\ &\quad \times B(I+L_1D)^{-1}L_2 \\ &= [G_2 - G_1D(I+L_1D)^{-1}L_2] \\ &\quad - QS^{-1}B(I+L_1D)^{-1}L_2, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} G_1 - M_iL_1 &= G_1[I - D(I+L_1D)^{-1}L_1] \\ &\quad + G_1[I - D(I+L_1D)^{-1}L_1]C \\ &\quad \times [A - B(I+L_1D)^{-1}L_1C]^{-1} \\ &\quad \times B(I+L_1D)^{-1}L_1 \\ &= G_1[I - D(I+L_1D)^{-1}L_1] \\ &\quad - QS^{-1}B(I+L_1D)^{-1}L_1, \end{aligned} \quad (51)$$

이다. 이때 (49), (50), 그리고 (51)을 (42)와 (43)에 대입하면 $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ 을 얻는다. 따라서(46) 또는 (48)은 성능 평가척도 J 를 $J=0$ 으로 최소화시킨다. 즉 M_i 는 J 를 최소화시키는 해 M^* 이다.

이제 (48)로 보상행렬이 설계되었을 때, 실제로 $F - M^*H$ 가 특이행렬이 아님을 증명하자. 가정 (A.2)로부터, 포화요소가 없을 때의 폐루우프 방정식 (24)의 시스템 행렬 A_i 은 안정행렬이므로 특이행렬이 아니다. 그리고 $S=(A - B(I+L_1D)^{-1}L_1C)$ 는 포화요소가 없는 선형 시스템의 폐루우프 플랜트의 시스템 행렬에 해당하고, 가정 (A.3)에 의하여 특이행렬이 아니므로, 행렬식(determinant) 정리[6]와 (49)로부터

$$\begin{aligned} \det(A_i) &= \det\left(\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}\right) \\ &= \det(S)\det(P - QS^{-1}R) \\ &= \det(S)\det(F - M^*H) \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (52)$$

이 성립한다. 위의 (52)로부터 $\det(F - M^*H) \neq 0$ 이므로 $F - M^*H$ 는 특이행렬이 아니다. 또한 (33), (34)는 (46), (48)에 (18), (19)를 대입함으로써 얻을 수 있다. ■

그림 2의 ARW 보상 구조에서 $K_b(s) = I$ 라면 $F_b=0$, $G_b=0$, $H_b=0$, 그리고 $L_b=I$ 이므로 정리 1은 Park과 Choi[10]의 정리 1과 동일한 형태가 된다. 즉 [10]은 본 논문의 특별한 경우에 해당한다. 임의의 다중 제어기를 포함한 제어 시스템은 정리 1의 결과를 확장하면 된다.

보상행렬 M_j^* , M_b^* 의 설계과정을 살펴보면, 기준입력이나 외부교란이 상수가 아니라 시간의 함수일지라도 동일한 결

과를 얻을 수 있다. 이때 상태변수 방정식에서 변수 미분항을 0으로 놓는 것이 평형점을 의미하는 것은 아니지만, 그와 유사한 의미로 이해하기로 한다.

제안된 (32)의 보상행렬 M^* 의 형태를 보면, 포화된 시스템과 포화되지 않은 시스템 사이의 평형점 사이의 거리는 기준입력 r , 외부교란 d , 그리고 포화치에 관계없이 표현되어 있다. 이는 M_j^* , M_b^* 가 이와 같은 요인들에 상관없이 항상 평형점 사이의 가장 가까운 거리를 보장해 준다는 것을 의미한다. 실제로 제안된 방법은 이런 요인들에 관계없이 $\widehat{x}_c = x_c$ 를 보장한다. 결국 2단계 설계기법에 있어서 플랜트와 제어기가 이미 설계되어 있다면, 이들을 (1)-(9)와 같이 표현할 수 있고, 제안된 보상행렬 M_j^* , M_b^* 는 이들의 조합으로 구성되어 있으므로, M_j^* , M_b^* 는 직접적으로 계산된다.

IV. 다중 루우프 포화 제어 시스템의 리셋 와인드업 방지

다중 루우프 포화 제어 시스템을 대표하여 그림 3과 같은 내외 루우프로 구성된 시스템을 고려할 수 있으며 임의의 다중 루우프 시스템은 이 시스템을 확장하면 된다.

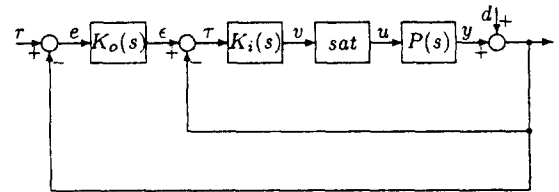


그림 3. 다중 루우프 포화 제어 시스템.
Fig. 3. Multiloop control systems with saturating actuators.

플랜트의 상태 방정식은 (1)-(3)과 동일하며 제어기들의 상태방정식은 다음과 같다.

○내측 제어기 $K_i(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_{ci}(t) = F x_{ci}(t) + G_i r(t), \quad (53)$$

$$v(t) = H x_{ci}(t) + L_i r(t), \quad (54)$$

$$\tau(t) = \varepsilon(t) - \mu(t), \quad (55)$$

$$\mu(t) = y(t) + d(t). \quad (56)$$

○외측 제어기 $K_o(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_{co}(t) = F x_{co}(t) + G_o e(t), \quad (57)$$

$$\varepsilon(t) = H x_{co}(t) + L_o e(t), \quad (58)$$

$$e(t) = r(t) - \mu(t). \quad (59)$$

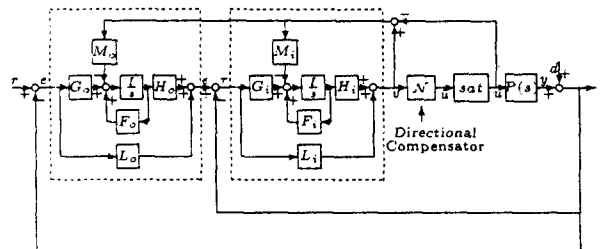


그림 4. ARW 구조를 채택한 다중 루우프 포화 제어 시스템.
Fig. 4. Multiloop control systems with saturating actuators adopting an anti-reset windup structure.

다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템에서와 마찬가지로 관측자 형태의 기법을 응용한 보상된 제어기의 구조는 그림 4에 도시하였다. 여기서 보상된 통합 제어기의 동특성은 다음과 같다.

○보상된 통합 제어기의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= Fx_c(t) + G_1(-\mu(t)) \\ &\quad + G_2r(t) - M(v(t) - u(t)) \\ &= (F - MH)x_c(t) + (G_1 - ML_1)(-\mu(t)) \\ &\quad + (G_2 - ML_2)r(t) + M(t), \end{aligned} \quad (60)$$

$$v(t) = Hx_c(t) + L_1(-\mu(t)) + L_2r(t), \quad (61)$$

여기서

$$\begin{aligned} x_c(t) &:= \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & G_1H_o \\ 0 & F_o \end{bmatrix}, \\ G_1 &:= \begin{bmatrix} G_1(I+L_o) & 0 \\ G_o \end{bmatrix}, \quad G_2 := \begin{bmatrix} G_2L_o \\ G_o \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} H &:= [H_1 \quad L_1H_o], \quad L_1 := L_1(I+L_o), \\ L_2 &:= L_2L_o, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

이다.

앞의 2절 및 3절의 보상기 설계절차를 참고하면, 다중 루우프 포화 시스템에 대한 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다. 여기서 $(\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T)^T$ 를 선형 시스템의 평형점이라 하고, $(\tilde{x}_c^T, \tilde{x}_p^T)^T$ 를 보상기를 채택한 포화 시스템의 가상 평형점이라 가정한다.

정리 2 : 그림 4와 같은 ARW 보상구조에서, 시스템이 가정 (A.1)-(A.3)을 만족시킨다 가정한다. 그러면 성능평가 척도

$$\min_M J = \{ (\bar{x}_c - \tilde{x}_c)^T (\bar{x}_c - \tilde{x}_c)^T \}^{1/2} \quad (64)$$

를 최소화시키는 보상행렬 M_i^* 와 M_o^* 는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$\begin{aligned} M_i^* &= G_i(I+L_o)(D - CA^{-1}B) \\ &\quad \times [(I+L_i)(I+L_o)D] - L_i(I+L_o)CA^{-1}B]^{-1} \\ &= G_i(I+L_o)D(I+L_o)D^{-1} \\ &\quad - G_i(I+L_o)[I - D(I+L_i)(I+L_o)D]^{-1} \\ &\quad \times L_i(I+L_o) [CA - B(I+L_i)(I+L_o)D]^{-1} \\ &\quad \times L_i(I+L_o)C]^{-1} B(I+L_i)(I+L_o)D^{-1}, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} M_o^* &= G_o(D - CA^{-1}B)[(I+L_i)(I+L_o)D] \\ &\quad - L_i(I+L_o)CA^{-1}B]^{-1} \\ &= G_oD(I+L_i)(I+L_o)D^{-1} \\ &\quad - G_o[I - D(I+L_i)(I+L_o)D]^{-1} L_i(I+L_o)C \\ &\quad \times [CA - B(I+L_i)(I+L_o)D]^{-1} L_i(I+L_o)C]^{-1} \\ &\quad \times B(I+L_i)(I+L_o)D^{-1}. \end{aligned} \quad (66)$$

증명 : 정리 1과 유사한 과정을 거쳐 유도되므로 생략한다. ■

정리 1 및 정리 2의 결과를 결합하면, 임의의 다중 제어기 및 다중 루우프 포화 제어 시스템에 대한 리셋 와인드업 보상기를 유도할 수 있다.

V. 제안된 보상 방법의 실제적인 의미

제안된 보상방법은 시스템의 축소차수모델을 얻는 잘 알려진 방법 중의 하나인 섭동모델 축소이론(singular perturbation model reduction theory)[4],[7],[14]과 밀접한 관계가 있다. 섭동모델이론은 하나의 전체 근사기법(approximate aggregation technique)[14]이라 할 수 있는데, 그 기법이란

축소된 모델이 시스템에서의 주요 동작모드(dominant mode)를 유지하도록 하는 방법이다. 먼저 섭동이론의 주요 내용을 간략히 살핀다.

다음과 같은 선형 시불변 섭동 시스템을 보자.

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1u, \quad (67)$$

$$\mu \dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u. \quad (68)$$

여기서 x, z , 그리고 u 는 각각 n, m , 그리고 r 차의 열 벡터(column vector)이고, μ 는 작은 양의 매개변수이다. A_{ij} 와 B_i 의 모든 원소들은 비슷한 크기의 수치를 가지고 있다. 시스템의 $n+m$ 개의 고유치는, 충분히 작은 μ 에 대하여, n 개의 느린 고유치와 m 개의 빠른 고유치로 군집되는 두개의 시간 척도(two-time scale)의 특성을 갖는다는 것은 잘 알려진 사실이다. 즉 작은 μ 라는 것은 x 가 z 에 비하여 비교적 느린 동특성을 갖는다는 것을 의미한다. 이때 A_{22} 가 특이 행렬이 아닐 경우 $\mu=0$ 으로 하면, (68)로부터

$$\bar{z} = -A^{-1}_{22}A_{21}\bar{x} - A^{-1}_{22}B_2u \quad (69)$$

를 얻고, 이를 (67)에 대입하면 다음과 같은 축소차수모델을 얻는다.

$$\dot{\bar{x}} = A_0\bar{x} + B_0u, \quad (70)$$

여기서 “ $\bar{}$ ”는 $\mu=0$ 일 때의 해당변수임을 의미하며,

$$\begin{aligned} A_0 &:= A_{11} - A_{12}A^{-1}_{22}A_{21}, \\ B_0 &:= B_1 - A_{12}A^{-1}_{22}B_2 \end{aligned} \quad (71)$$

이다.

축소된 모델의 시스템 행렬 A_0 는 행렬 A 를

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (72)$$

이라 할 때, A 에서 A_{22} 의 Schur 보충(Schur complement of A_{22} in A)이라 하고 (A/A_{22}) 와 같이 표현한다[3]. Schur 보충은 모델축소 뿐만 아니라 여러 다른 분야에서도 흔히 나타난다.

섭동모델 축소이론이라는 것은 (68)에서 $\mu=0$ 으로 놓고 얻는데, 이의 의미는 시스템에서 빠른 동특성을 무시함으로써 축소된 모델을 얻는다는 것이다. 이 방법은 다음과 같은 보통의 상대방정식

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u, \quad (73)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad (74)$$

에서 x_2 의 동특성이 x_1 의 동특성보다 충분히 빠르다는 조건을 만족시킨다면 $\dot{x}_2=0$ 이라 놓음으로써 축소된 모델을 얻는다는 의미이다[9]. 축소된 모델은

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= (A_{11} - A_{12}A^{-1}_{22}A_{21})\bar{x}_1 \\ &\quad + (B_1 - A_{12}A^{-1}_{22}B_2)u \end{aligned} \quad (75)$$

와같이 구해진다.

섭동모델 축소이론은 모델의 차수를 축소시킬 뿐만 아니라, 축소 전 시스템의 상태변수와 축소된 모델의 상태변수 사이에 대한 다음과 같은 관계식을 만족시킨다[14]: 만약 $Re(\lambda(A_{22})) < 0$ 이면, 축소 전 시스템 (67), (68)의 상태변수

x, z 는 μ 가 충분히 작을 경우 다음과 같이 근사화 된다.

$$x(t) \cong \bar{x}(t), \tag{76}$$

$$z(t) \cong -A^{-1}z_2 A_{21} \bar{x}(t) + z_1 \left(\frac{t-t_0}{\mu} \right), \tag{77}$$

여기서 $z_j = z - \bar{z}$ 이다.

이제 포화 요소를 가진 제어 시스템에서 제안된 ARW 방법의 섭동모델 축소이론과의 연관성에 대해 살펴보도록 한다. 앞서 기술했듯이, 리셋 와인드업 현상은 제어기에 적분기나 비교적 느린 동특성이 포함되어 있을 때에 발생하는 데, 이때 시스템의 성능저하는 제어기의 상태변수 궤적이 포화요소가 없었을 때의 제어기의 상태변수 궤적과 다르게 전개되는 것에 기인한다.

포화된 시스템의 페루우프 동특성 (29)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_c = & (F-MH)\hat{x}_c - (G_1-ML_1)C\hat{x}_p \\ & + (G_2-ML_2)r - (G_1-ML_1)d \\ & + [M(I+L_1D) - G_1D]sat(v), \end{aligned} \tag{78}$$

$$\dot{\hat{x}}_p = A\hat{x}_p + Bsat(v). \tag{79}$$

정리 1 및 정리 2와 같이 보상행렬 M^* 가 설계된 경우, 직접적인 대입으로 다음의 식들이 성립한다.

$$F-M^*H = P-QS^{-1}R, \tag{80}$$

$$G_2-M^*L_2 = T_2-QS^{-1}U_2, \tag{81}$$

$$-(G_1-M^*L_1) = T_1-QS^{-1}U_1, \tag{82}$$

$$-(G_1-M^*L_1)C = QS^{-1}A, \tag{83}$$

$$M^*(I+L_1D) - G_1D = QS^{-1}B. \tag{84}$$

여기서

$$T_1 := -G_1[I-D(I+L_1D)^{-1}L_1], \tag{85}$$

$$T_2 := G_2 - G_1D(I+L_1D)^{-1}L_2, \tag{86}$$

$$U_1 := -B(I+L_1D)^{-1}L_1, \tag{87}$$

$$U_2 := B(I+L_1D)^{-1}L_2 \tag{88}$$

이고, P, Q, R , 그리고 S 는 (25)에 정의되어 있다. 위의 (80)-(84)를 (78)에 대입하면

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_c = & (P-QS^{-1}R)\hat{x}_c + (T_2-QS^{-1}U_2)r \\ & + (T_1-QS^{-1}U_1)d \\ & + QS^{-1}(A\hat{x}_p + Bsat(v)) \\ = & (P-QS^{-1}R)\hat{x}_c + (T_2-QS^{-1}U_2)r \\ & + (T_1-QS^{-1}U_1)d + QS^{-1}\dot{\hat{x}}_p \end{aligned} \tag{89}$$

이다.

섭동모델 축소이론에서는 시스템의 빠른 동특성을 무시함으로써 축소된 모델을 얻는데, 지금 다루고 있는 포화 시스템에서는 플랜트의 상태변수가 빠른 동특성에 해당된다. 따라서 (89)에서 $\dot{\hat{x}}_p = 0$ 이라 놓으면

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_c \cong & (P-QS^{-1}R)\hat{x}_c \\ & + (T_2-QS^{-1}U_2)r + (T_1-QS^{-1}U_1)d \end{aligned} \tag{90}$$

를 얻는다. 위의 (90)은 포화요소가 없는 선형 시스템 (24)에 섭동모델 축소이론을 적용하여 얻은 축소모델과 동일한 형태이다.

다시 말해 (32)와 같이 보상행렬 M^* 가 설계된다면, 보상된 제어기의 동특성은 포화요소가 없을 때의 페루우프 시스템을 섭동모델 축소이론으로 축소시킨 형태를 가지며, 따라서 보상된 제어기의 상태변수 궤적 $\hat{x}_c(t)$ 는 포화요소가 없을 때의 제어기가 발전해 나갈 상태변수 궤적 $x_c(t)$ 를 근사적으로 추종하게 된다. 즉 $\hat{x}_c(t) \cong x_c(t)$ 이 성립한다.

VI. ARW 포화 제어 시스템의 안정도

포화요소를 가진 제어 시스템에서의 안정도 문제란, 포화 되었을 때 되먹임 루우프가 끊어지는 상태가 되기 때문에, 제어기가 개루우프적으로 불안정한 경우 (예를 들어 PI 제어기) 그것의 상태변수들이 임의로 크게 발산해 버릴 수 있다는 것에 초점이 맞추어져 있다. 따라서 포화요소를 포함한 제어 시스템의 안정도를 다룰 때에는 플랜트 출력의 안정도 보다 다소 강한 조건인 시스템 내부의 상태변수의 안정도 문제를 다루는 것이 상례이다[2],[10]-[13]. 본 논문에서도 전체적 안정도(total stability)[6]에 관해 언급한다. 전체적으로 안정된 시스템은, 제한된 에너지를 갖는 입력이 인가될 경우, 출력뿐만 아니라 모든 상태변수들이 제한된 에너지를 갖는다는 개념으로, 다른 말로 하면 BIBS(bounded-input bounded-state) 안정도에 해당된다.

본 논문에서 다루고 있는 시스템을 고려하자. 앞의 (24)와 (29)에 각각 포화되지 않은 그리고 포화된 시스템에 대한 상태변수 방정식은 전혀 다른 시스템을 기술한 것이 아니라, 그림 2의 ARW 구조에서 포화요소의 동작양식에 따라 같은 대상 시스템을 다르게 표현한 것에 불과하다. 실제로 (29)는 포화요소가 선형영역에서 동작하는 경우 (24)와 같은 식이 되므로, 대상 시스템의 안정도 문제는 (29)로 표현된 상태변수 방정식이 안정할 것인가 하는 문제에 귀결된다. 여기서 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 3 : 가정 (A.1)-(A.3)을 만족시키는 그림 2 및 그림 4와 같은 제어 시스템을 고려하자. 이때

$$Re(\lambda_i(F-M^*H)) < 0, \quad \forall i \tag{91}$$

이면, 이 제어 시스템은 전체적으로 안정(totally stable)하다.

증명 : 그림 2 및 그림 4에 있는 시스템의 상태 방정식은 (29)로 주어지는데 $sat(\cdot)$ 는 유계함수이므로, $Re(\lambda_i(A_{sat})) < 0, \forall i$ 이면 시스템은 전체적으로 안정하다. 그런데 (30)에서 A_{sat} 의 고유치는 A 와 $F-MH$ 의 고유치로 구성되어 있고, 가정 (A.1)에 의하여 $Re(\lambda_i(A)) < 0, \forall i$ 이므로, (91)을 만족하면 시스템 (29)는 전체적으로 안정하다. ■

그림 2 및 그림 4와 같은 ARW 보상구조에서, (32)와 같이 보상행렬 M^* 가 선정된다면, 전 절에서 보상된 제어기는 포화요소가 없을 때의 선형 페루우프 시스템을 섭동모델 축소이론으로 축소된 모델의 형태를 갖는다는 것을 기술하였다. 이때 (80)에 의하여 $F-M^*H$ 는 축소된 모델의 시스템 행렬에 해당되므로, 포화 요소가 없었을 때의 선형 시스템 (24)에 섭동모델 축소이론을 적용하여 얻어진 축소 모델이 안정하다면, 포화요소가 있었을 때 (32)의 제안된 보상행렬 M^* 의 값을 선정한 경우 대상 시스템은 전체적 안정도를 보장한다.

섭동모델 축소이론에서 다음과 같은 근사적인 조건이 알려져 있다[9]: 앞의 (73), (74)와 같은 LTI 시스템에서 x_2 가 빠르고 안정한 상태 변수라면, $\dot{x}_2 = 0$ 으로 함으로써 (75)와 같은 의미 있는 축소된 형태를 얻는다. 더욱 자세히 기술하

면, 만약

$$\min_i |\lambda_i\{A_{22}\}| > \max_j |\lambda_j\{A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\}| \quad (92)$$

와

$$Re(\lambda_i\{A_{22}\}) < 0, \quad \forall i \quad (93)$$

를 만족시킨다면, (73), (74)는 (75)와 같이 근사화 시킬 수 있고, 이와 같이 축소된 모델은 안정하고 만족할 만한 근사인 것으로 일반적으로 인식된다[9].

또한 축소된 모델은, A_{22} 가 안정 행렬이면, 즉 (93)을 만족시킨다면, (73), (74)의 n 개의 고유치 ($x_1(t)$ 의 차수)는 $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 의 고유치로 근사화 되고, 나머지 m 개의 고유치 ($x_2(t)$ 의 차수)는 A_{22}/μ 로 근사화 된다는 것이 알려져 있다[7],[14].

앞서 언급했듯이, 본 논문에서 다루는 대상 시스템의 상태변수 방정식 (24)는 섭동모델 이론을 적용할 수 있는 양상에 잘 부합된다. 다시 말해서, 제어기의 동특성 $x_c(t)$ 는 플랜트의 동특성 $x_p(t)$ 에 비하여, 적분기 등을 가지고 있기 때문에 비교적 느린 동특성을 갖는다. 제어기의 동특성이 플랜트의 그것에 비하여 빠르거나 유사한 경우 리셋 와인드업 현상 자체가 심각하게 일어나지 않는다.

제안된 방법대로 보상행렬 M^* 가 선정되는 경우 $F - M^*H$ 의 고유치는, 페루우프 플랜트의 시스템 행렬 $S = A - B(I + L_1D)^{-1}L_1C$ 는 안정 행렬이라면, (25)의 처음 q 개의 고유치를 근사화 시킨다. 그런데 S 가 안정행렬이라는 조건은 잘 설계된 대부분의 제어 시스템이라면 만족시키므로, 제안된 보상 방법으로 선정된 시스템은 대부분 안정도를 보장받는다. 안정도 보장여부는 조건 (91)로 확인할 수 있다.

주 1 : 포화요소를 가진 제어 시스템을 다루는 본 논문의 근간은 2단계 설계기법이다. 그리고 포화현상으로 인한 성능저하를 완화하기 위한 두 번째 단계에 주안점을 두어 새로운 보상방법을 제안하였다. 그러나 결과된 보상방법은 첫 단계에서 제어기가 주어지기만 하면 직접적으로 얻어지기 때문에, 실질적으로 한 단계 설계기법이라 간주할 수 있다. 따라서 첫단계에서 제어기를 구성시, 전체 시스템의 안정도를 보장하기 위하여 (A_i/S), 즉 A_i 에서 S 의 Schur 보충 [3]이 안정하게 설계하면 된다.

VII. 시뮬레이션 예제

본 절에서는 시뮬레이션을 통하여 제시된 ARW 방법의 유용성을 살펴도록 한다. 다음의 전달 함수로 표현된 플랜트를 고려하자.

$$P(s) = \frac{2s+10}{s^2+5s+10}$$

여기서 제어 입력은 ± 1.5 로 제한되어 있다고 하자. 이러한 플랜트에 대하여 선형 시스템의 성능을 고려하여 다음과 같은 제어기 $K_A(s)$, $K_B(s)$ 가 설계되어 있다고 가정한다.

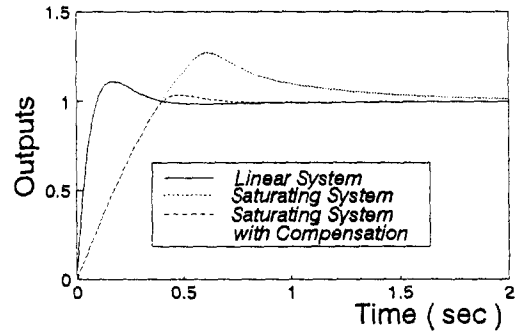
$$K_A(s) = \frac{10s+20}{s}, \quad K_B(s) = \frac{0.8s+10}{s+10}$$

플랜트는 다음과 같은 상태 공간 방정식으로 표현할 수 있다.

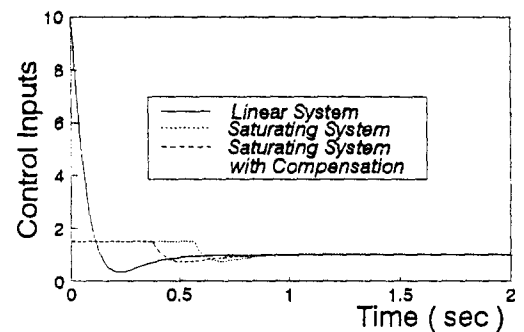
$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 10 \end{bmatrix} x_p(t). \end{aligned}$$

마찬가지로 제어기들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c1}(t) &= e(t), \\ v(t) &= 20x_{c1}(t) + 10e(t), \\ \dot{x}_{c2}(t) &= -10x_{c2}(t) + \mu(t), \\ v(t) &= 2x_{c2}(t) + 0.8\mu(t). \end{aligned}$$



(a)



(b)

그림 5. 시스템의 응답 특성.

(a) 시스템 출력 $y(t)$, (b) 제어 입력 $u(t)$.

Fig. 5. Responses of the system.

(a) outputs $y(t)$, (b) control inputs $u(t)$.

기준 입력은 $r(t) = 1, t \geq 0$ 라 하였다. 그림 5에 각각 포화 비선형이 없는 선형 시스템의 출력 $y(t)$ 와 플랜트에 인가되는 제어 입력 $u(t)$ 를 실선으로 도시하였는데 그림에서 알 수 있듯이 응답 특성은 기준 입력을 잘 추종한다. 그런데 포화 비선형이 존재한다면 제어 입력이 초기에 포화 상한값 1.5를 넘으므로 포화 현상이 발생되어 시스템의 성능을 저하시키게 되며, 이를 그림 5의 점선으로 도시하였다.

이제 이러한 시스템에 제시된 방법을 적용해 보자. 보상행렬 M_A^* 및 M_B^* 는 (33)과 (34)에 의하여

$$\begin{aligned} M_A^* &= -G_A L_B C(A - B L_A L_B C)^{-1} B = 0.0889 \\ M_B^* &= G_B C(A - B L_A L_B C)^{-1} B = -0.1111 \end{aligned}$$

와 같이 얻어진다. $F - M^*H$ 의 고유치는 $-1.8253, -12.1747$ 이므로 정리 3에 의하여 보상된 시스템은 전체적으로 안정하며, 보상된 시스템의 응답 특성은 그림 5에서 확인할 수 있는 바와 같이 선형 시스템의 응답 특성을 보다 근접하게 추종한다.

VIII. 결론

본 논문은 다중 제어기 및 다중 루우프로 구성된 포화 제어 시스템에서의 ARW 보상방법을 연구하였다. 포화요소가 존재하지 않는다고 가정한 상태에서의 다변수 선형 제어 시스템에 대한 만족할 만한 응답특성을 주는 선형 제어기는 이미 구성되어 있는 경우, 포화 상황에서 성능저하를 완

화하기 위하여 추가적인 보상기를 효과적으로 설계하는 방법을 기술하였다.

제안된 ARW 보상구조는 표준적인 ARW 구조인 Astrom과 Wittenmark[1]의 관측자 기법구조를 응용한 것으로, 포화되지 않은 시스템과 포화된 시스템의 평형점사이의 거리를 최소화시키는 최적화문제를 구성함으로써 통합된 제어를 포함하는 구조에서의 ARW 설계변수인 보상행렬을 명확히 구하였다. 본 논문의 ARW 보상 방법은 Park과 Choi[10]의 방법을 확장한 방법이며 임의의 제어 구조에 적용할 수 있다.

제시된 보상행렬은 기준입력이나 외부교란 그리고 포화치 등에 무관하게 결정되며, 제어기와 플랜트의 매개변수들로서 직접적으로 구해지기 때문에, 2단계 설계기법에서 미리 선형 제어가 설계되어 있기만 하면 직접적으로 구해진다. 보상된 제어기의 동특성은 포화요소가 없는 페루우프 시스템에 섭동모델 축소이론을 적용하여 얻어진 축소모델의 형태를 갖게 되는데, 이를 이용하여 제시된 방법의 이론적 타당성을 살펴보았다. 또한 제어기 설계의 첫단계에서 선형 제어 시스템에 섭동모델 이론을 적용한 축소모델이 안정하다면, 제시된 방법은 시스템의 전체적 안정도를 보장한다는 것을 기술하였다. 시뮬레이션을 통하여 제시된 ARW 보상 방법의 유용성을 살펴보았다.

참고문헌

[1] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1984.

[2] P. J. Campo and M. Morari, "Robust control of processes subject to saturation nonlinearities," *Computers Chem. Eng.*, vol. 14, no. 4/5, pp. 343-358, 1990.

[3] R. W. Cottle, "Manifestations of the schur complement," *Lin. Alg. and Appl.*, vol. 8, no. 3, pp. 189-211, 1974.

[4] K. V. Fernando and H. Nicholson, "Singular perturbation model reduction of balanced systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 27, no. 2, pp. 466-468, 1982.

[5] R. Hanus, M. Kinnaert, and J. L. Henrotte, "Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method," *Automatica*, vol. 23, no.

6, pp. 729-739, 1987.

[6] T. Kailath, *Linear systems*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1980.

[7] P. V. Kokotovic, R. E. O'Malley, Jr., and P. Sannuti, "Singular perturbations and order reduction in control theory - an overview," *Automatica*, vol. 12, no. 3, pp. 123-132, 1976.

[8] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, and C. N. Nett, "A unified framework for the study of anti-windup designs," *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1869-1883, 1994.

[9] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems," *Int. J. Control*, vol. 50, no. 4, pp. 1379-1405, 1989.

[10] J.-K. Park and C.-H. Choi, "A compensation method for improving the performance of multivariable control systems with saturating actuators," *Control-Theory and Advanced Technology*, vol. 9, no. 1, pp. 305-323, 1993.

[11] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 40, no. 9, pp. 1635-1640, Sep., 1995.

[12] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Discrete-time saturating systems with epm method," *Proc. of IEEE Int'l Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 3, pp. 2674-2679, Oct., 1994.

[13] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamical anti-reset windup method for discrete-time saturating systems," *Proc. of IEEE Int'l Conf. on Decision and Control*, vol. 3, pp. 2926-2931, Dec., 1994.

[14] V. R. Saksena, J. O'Reilly, and P. V. Kokotovic, "Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976-1983," *Automatica*, vol. 20, no. 5, pp. 273-293, 1984.

[15] K. S. Walgama and J. Sternby, "Inherent observer property in a class of anti-windup compensators," *Int. J. Control*, vol. 52, no. 3, pp. 705-724, 1990.



박종구

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 1989년 동 대학원(석사), 1993년 동 대학원(박사). 1995년 ~ 현재 성균관대학교 제어계측공학과 교수. 관심분야는 제어이론 및 응용, 컴퓨터 응용 제어 시스템, 실시간 제어 시스템, 시스템 통합

환경.



최정호

1970년 서울대 공대 기계공학과 졸업. 1976년 미국 Univ. of Florida 산업 및 시스템 공학과(석사), 1978년 동 대학원 전기공학과(박사). 현재 서울대 공대 전기공학부 교수. 관심분야는 뉴럴 네트워크, 시스템 식별, 적응제어, 모션 제어 등.