

〈論 文〉

# 모델링 오차를 갖는 유연 링크 로봇 최적 제어

## Optimal Control of a Flexible Link Robot with Modelling Errors

한 기 봉\* · 이 시 복\*\*

Ki-Bong Han and Shi-Bok Lee

(1996년 7월 13일 접수 ; 1996년 11월 13일 심사완료)

**Key Words :** Flexible Link Manipulator (유연 링크 매니플레이터), Uncertain Parameter (불확실한 매개 변수), Random Variable (확률 변수), Full Model (3차 진동 모드까지 고려한 유연 링크 매니플레이터의 모형)

### ABSTRACT

Linear LQG controller has been investigated to control flexible link manipulators. The performance and complexity of these depend largely on the model upon which the controller is designed. In this study, the flexible modes of the link manipulator are considered to have uncertain parameters, which can be represented by random variable and these parameters are reflected on the weighting of performance. In this method, the exact modelling for the flexible modes is not necessary. The order of the resulting controller is much lower than the one based on a full model. Through numerical study, it is shown that the performance and the stability-robustness of the proposed controller reaches reasonably the one based on the full model.

### 1. 서 론

최근 유연 링크 매니플레이터의 제어에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다. 링크를 강체와 같이 제작하면 큰 강성을 얻기 위해서 무게가 커지게 되고, 작동시키는데 많은 동력이 소요되며, 또한 동작이 느려지게 된다. 이런 단점들을 보완하기 위해서 링크를 경량화할 필요가 있다. 그러나 경량화된 링크 매니플레이터는 고속으로 동작하는 동안 굽힘 변형으로 인한 링크의 진동 때문에 기존의 강체 매니플레이터 보다 복잡한 동적 특성을 갖는다. 또한 유연 링크 매니플레이터는 분포 파라미터계로서 구동점에 적당한 토크를 가하여 끝단의 운동을 제어하는

데는 많은 어려움이 있다. 이 문제점들을 해결하기 위해서 유연 링크 모델링에 관한 연구<sup>(1, 2)</sup>, 구동기와 측정 위치가 동일하지않은 유연 링크 매니플레이터의 궤적 제어를 위한 시간역에서의 역 동역학 기법,<sup>(3)</sup> 최적 제어 기법을 이용한 방법등의 제어기 설계에 관한 연구가 활발하게 이루어지고 있다<sup>(4, 5)</sup>. 이 가운데 LQG제어기는 설계시 모델링 오차에 대한 강인성을 고려할 수 있는 장점이 있어서 유연 링크 매니플레이터 제어기로 연구되어 왔다. 그러나 기존 LQG 제어기는 기본적으로 모델 기준 보상기이기 때문에 기초가 되는 모델이 제어기의 구조 및 성능에 중요한 영향을 미친다. 유연 링크 매니플레이터의 진동을 무시하고 강체계로 모델링한 모델을 기본으로 한 LQG제어기는 제어 성능이 문제가 되고, 진동 모드를 고려한 모델을 이용하여 설계된 제어기는 성능은 양호하지만 모델링이 어렵게 되고, 보상기의 전달 함수 차수가 증가 되어 제어기가 복잡해진다.

본 연구에서는 모델링하기 어려운 플랜트의 모델

\*부산대학교 대학원 기계설계공학과

\*\*정회원, 부산대학교 공과대학 기계설계공학과

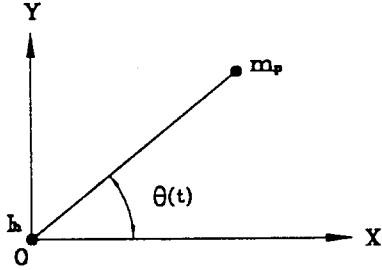


Fig. 1 Schematic diagram of the one-link rigid manipulator

링 오차를 확률 변수 모델로 나타내어 LQG제어기 설계시 성능 지수에 반영하는 방법을 유연 링크 매니플레이터에 적용했다<sup>(6)</sup>. 유연 링크 매니플레이터의 강제 모델을 공칭 플랜트 모델로 하고, 링크 모델링시에 무시된 탄성 모드를 확률 변수로 모델링하여 제어기 설계시 성능 지수에 반영함으로써 유연 링크 매니플레이터의 비 최소위상 플랜트를 제어하는데 강인성을 부여하였다. 강제 모델을 구속 조건으로 놓고 성능 지수에 확률 변수를 반영시켜 설계된 제어기, 성능 지수에 확률변수를 반영하지 않고 설계된 제어기, 3차 진동 모드까지 모델링한 유연 링크 매니플레이터의 모델 구속 조건으로 놓고 설계된 제어기에 대하여 차수를 조사하고, 유연 링크의 강성과 첨단 질량의 변화에 따른 성능과 안정도-강인성을 비교하였다. 그 결과 강제 모델을 구속조건으로 놓고 성능 지수에 확률 변수를 반영시켜 설계된 제어기가 제어기의 차수도 낮고, 성능과 안정도-강인성도 우수함을 알 수 있다.

2. 강체의 링크 및 유연 링크 매니플레이터 모델

Fig. 1은 1관절 강체 링크 매니플레이터를 나타낸다. Lagrange식을 이용하여 운동 방정식을 구하면

$$(I_k + J + m_p l^2) \ddot{\theta} + D\dot{\theta} = \dot{T}(t) \tag{1}$$

이 되고, 여기서  $I_k$ ,  $J$ ,  $m_p$ ,  $l$ ,  $D$ 는 각각 허브의 관성, 링크 관성, 첨단 질량, 링크의 길이, 모터의 감쇠이고,  $\theta(t)$ 는 관절각이며  $T(t)$ 는 서브 모터에 의해 발생하는 토크를 나타낸다.

식 (1)을 Laplace 변환하여 강체 링크 매니플레이터에 대한 전달 함수를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{W}(s) = \frac{1}{(I_k + J + m_p l^2) S^2 + DS} \tag{2}$$

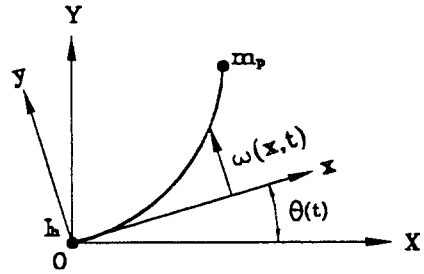


Fig. 2 Schematic diagram of the one-link flexible manipulator

Fig. 2는 평면에서 작동하는 1관절 유연 링크 매니플레이터를 나타낸다. 팔관절 O에 서보 모터에 의해 발생하는 토크  $T(t)$ 가 입력되고, 관절각  $\theta$ 와 매니플레이터의 끝점 처짐  $w(l, t)$ 가 출력된다. 한쪽 단은 고정되고 다른 한쪽은 자유단으로 첨단 질량이 부착된 외팔보로 유연 링크를 가정하여 운동 방정식을 구하였다<sup>(7)</sup>. 링크의 탄성 변형  $w(x, t)$ 는 다음과 같이 고유함수  $\phi_i(x)$ 와 일반화된 좌표  $q_i(t)$ 의 선형 결합으로 가정하였다.

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \phi_k(x) \tag{3}$$

식 (3)에서  $\phi_i(x)$ 는 다음과 같은 보의 방정식으로부터 구한다.

$$EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

식 (4)는 한쪽 단은 고정되고 다른 한쪽은 첨단 질량이 부착된 외팔보를 나타내고, 또한 첨단질량을 질점으로 가정한 경계 조건식은 다음과 같다.

$$w(0, t) = 0 \tag{5.a}$$

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \tag{5.b}$$

$$EI \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0 \tag{5.c}$$

$$EI \left. \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} = m_p \left. \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial t^2} \right|_{x=l} \tag{5.d}$$

식 (4)와 식 (5)로부터  $\phi_i(x)$ 를 구하면

$$\phi_i(x) = \cosh \beta_i x - \cos \beta_i x - \frac{C_n}{C_d} \{ \sinh \beta_i x - \sin \beta_i x \} \tag{6}$$

이고, 식 (6)에서  $C_n$ 과  $C_d$ 는 다음과 같다.

$$C_n = \cosh \beta_i l + \cos \beta_i l \tag{7.a}$$

$$C_d = \sinh \beta_i l + \sin \beta_i l \tag{7.b}$$

여기서  $\beta_i l$ 은 다음과 같다.

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{l} \quad (7.c)$$

식 (7.c)에서  $\lambda_i$ 는 다음식에서 구한다.

$$\frac{m_p \lambda_i}{\rho l} \{ \cosh \lambda_i \sin \lambda_i - \sinh \lambda_i \cos \lambda_i \} - \cosh \lambda_i \cos \lambda_i - 1 = 0 \quad (8)$$

3차 진동 모드까지 고려한 유연 링크 매니플레이터의 운동 방정식을 구하고, 고차항을 무시하여 선형화된 모델식은 다음과 같다<sup>(8, 9)</sup>.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{T(t)\} \\ y(t) = \{l\phi_1(l) \phi_2(l) \phi_3(l)\} \{x(t)\} \quad (9)$$

식 (9)에서  $[M]$ 은 계의 관성 행렬,  $[C]$ 는 계의 감쇠 행렬,  $[K]$ 는 계의 강성 행렬이며,  $\{x(t)\}$ 는  $\{ \theta(t) q_1(t) q_2(t) q_3(t) \}^T$ 이고,  $y(t)$ 는 출력이다. 그리고

각 행렬  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ 의 요소들은 부록에 수록하였다.

Table 1은 본 연구에 사용된 유연 링크 매니플레이터의 매개 변수값을 나타낸다. 유연 링크의 1차, 2차, 3차 고유 진동수 값들은 각각 22.3ad/sec, 104.8rad/sec, 320.4rad/sec이다.

Table 1 System parameters

피라미터	실 계 값
길이 ( $l$ )	0.5 m
허브관성 ( $I_h$ )	0.002 kg/m <sup>2</sup>
링크의 길이당 질량 ( $\rho$ )	0.15 kg/m
링크 강성 ( $EI$ )	0.3 Nm <sup>2</sup>
부하질량 ( $m_p$ )	0.01 kg
모터 감쇠 ( $D$ )	0.05 Ns/rad

Table 2 Poles and zeros with varying stiffness

$EI=0.3 \text{ Nm}^2$		$EI=0.2 \text{ Nm}^2$		$EI=0.1 \text{ Nm}^2$		$EI=0.05 \text{ Nm}^2$	
Poles	Zeros	Poles	Zeros	Poles	Zeros	Poles	Zeros
0	$-0.1 \pm 171.9j$	0	$-0.08 \pm 140.2j$	0	$-0.05 \pm 99.29j$	0	$-0.038 \pm 70.2j$
$-1.69 \pm 320.4j$	$-0.04 \pm 39.29j$	$-1.66 \pm 261.6j$	$-0.03 \pm 32.08j$	$-1.61 \pm 184.9j$	$-0.023 \pm 22.7j$	$-1.57 \pm 130.7j$	$-0.016 \pm 16.0j$
$-0.41 \pm 104.8j$	96.54	$-0.4 \pm 85.6j$	78.8	$-0.38 \pm 60.49j$	55.6	$-0.37 \pm 42.7j$	39.4
$-2.3 \pm 22.3j$	-96.54	$-2.25 \pm 17.97j$	-78.8	$-2.08 \pm 12.2j$	-55.6	$-1.70 \pm 8.01j$	-39.4
-4.86		-4.97		-5.3		-6.1	

Table 2는 강성의 변화에 따른 유연 링크 매니플레이터의 영점과 극점의 값을 나타낸다. 강성이 감소함에 따라 양의 영점이 원점에 접근함을 알 수 있다. 이 때 원점에 가까운 영점은 과도 응답에 큰 영향을 주게 되어 시스템을 불안정하게 만든다.

### 3. 제어기 설계

주파수역에서 LQG제어기는 플랜트의 전달 함수 모델을 기초로 하고, Wiener-Hopf 기법을 이용하여 보상기를 설계한다<sup>(10)</sup>. 먼저 유연 링크의 모델링시 무시된 탄성 모드를 확률 변수로 가정한 후 이것을 성능 지수에 반영하여 제어기를 설계한다.

#### 3.1 플랜트 불확실 모델

Fig. 3은 제어 시스템을 나타낸다. 여기서  $\xi(t)$ ,  $\zeta(t)$ 는 평균이 0인 백색잡음이라 가정한다.  $W_r$ ,

$W_d$ ,  $W$ 는 각각 기준 입력 모델, 외란 입력 모델, 플랜트 전달 함수를 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$W_r = A^{-1} E_r \quad (10)$$

$$W_d = A^{-1} C_d \quad (11)$$

$$W = A^{-1} B \quad (12)$$

여기서 A, B는 플랜트 전달 함수의 분모, 분자

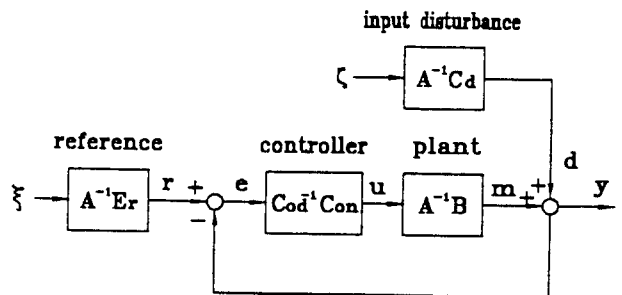


Fig. 3 Output feedback control system

다항식이고,  $E_r$ ,  $C_d$ 는 각각 기준 입력모델, 외란 입력 모델 전달 함수의 분자 다항식이다. 제어 입력  $u$ , 출력  $y$ , 기준 입력과 출력 사이의 오차  $e$ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$u = M(r - d) \quad (13)$$

$$y = WMr + (1 - WM)d \\ = WSC_o r + Sd \quad (14)$$

$$e = r - y = (1 - WM)(r - d) \\ = S(r - d) \quad (15)$$

여기서  $W$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $C_o$ 는 각각 플랜트 전달 함수, 감도(sensitivity) 전달 함수, 제어감도(control sensitivity) 전달 함수, 보상기 전달 함수이다.

확률 모델은  $\delta W$ 라 하면 플랜트의 모델링 오차를 포함한 모델은 다음과 같이 표현된다.

$$W = \bar{W} \delta W \quad (16)$$

여기서  $\bar{W}$ 는 강제 플랜트 전달 함수이다.

$\delta W$ 의 전달 함수는 다음과 같은 다항식 형태로 표현이 된다.

$$\delta W = \delta W_n / \delta W_d \quad (17)$$

$\delta W_n$ 과  $\delta W_d$ 의 평균은 1이고, 분자와 분모항은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W_n = 1 + \delta W_n' \quad (18)$$

$$\delta W_d = 1 + \delta W_d' \quad (19)$$

본 연구에서  $\delta W$ 를 다음과 같이 가정하였다.

$$\delta W = \frac{\delta W_n}{\delta W_d} = \frac{1 + \alpha s}{1 + \beta s} \quad (20)$$

여기서  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 평균은 0이고, 분산은 각각 다음과 같다.

$$E\{\alpha^2\} = \sigma_n^2, \quad E\{\beta^2\} = \sigma_d^2 \quad (21)$$

$\sigma_n$ 과  $\sigma_d$ 는 플랜트의 모델링 오차 정도에 의해 구할 수 있다.

식 (17)를 이용하여 감도 전달 함수, 페루프 전달 함수, 제어 감도 전달 함수를 나타내면 다음과 같다.

$$S = \frac{1}{1 + WC_o} = \frac{1}{1 + \bar{W} \frac{\delta W_n}{\delta W_d} C_o} \\ = \frac{\delta W_d}{\delta W_d - \delta W_n + (1 + WC_o) \delta W_n} \\ = \frac{\bar{S} \delta W_d}{1 + (1 - \bar{S}) \delta W_n' + \bar{S} \delta W_d'} \\ = \frac{\bar{S} \delta W_d}{1 + \bar{T} \delta W_n' + \bar{S} \delta W_d'} \quad (22)$$

여기서  $1 + \bar{T} \delta W_n' + \bar{S} \delta W_d'$ 를  $\delta W_c$ 로 놓으면  $S$ 는 다음과 같다.

$$S = \frac{\bar{S} \delta W_d}{\delta W_c} \\ T = 1 - S = \frac{1 + (1 - \bar{S}) \delta W_n' - \bar{S}}{1 + \bar{T} \delta W_n' + \bar{S} \delta W_d'} = \frac{\bar{T} \delta W_n}{\delta W_c} \quad (23)$$

$$M = C_o S = \frac{C_o \bar{S} \delta W_d}{1 + \bar{T} \delta W_n' + \bar{S} \delta W_d'} = \frac{\bar{M} \delta W_d}{\delta W_c} \quad (24)$$

여기서  $\bar{S}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{M}$ 는 공칭 플랜트에 대한 각각의 감도 함수, 페루프 전달 함수, 제어 감도 함수를 나타낸다.  $\delta W_c$ 는 설계 변수로 사용하기 위하여  $\Delta W_c$ 로 쓸 수 있고, 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta W_c = 1 + \bar{T} \delta W_n' + \bar{S} \delta W_d' \\ = 1 + (\alpha \bar{T} + \beta \bar{S}) s = 1 - \gamma s \quad (25)$$

여기서  $\gamma$ 는 설계 변수로 사용된다.

### 3.2 제어기 설계

제어기 설계에 필요한 시스템 성능 지수  $J$ 를 다음과 같이 설정한다.

$$J = E\{q_c e^2(t) + \gamma_c u^2(t)\} \quad (26)$$

식 (26)에서  $E\{\cdot\} = E_p\{E_s\{\cdot\}\}$ 이고,  $E_p$ 와  $E_s$ 는 각각 시스템 확률 매개 변수와 상태 변수에 대한 기대값이다. 식 (26)은  $S$ 영역에서 나타내면 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_D E_p\{(Q_c \Phi_{ee} + R_c \Phi_{uu})\} dS \quad (27)$$

식 (27)에서  $D$ 는 주파수 영역을 나타내고, 제어력에 대한 스펙트럼  $\Phi_{uu}$ 와 기준 입력과 출력 사이의 오차에 대한 스펙트럼  $\Phi_{ee}$ 는 식 (13)과 식 (14)를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi_{uu} = M \phi_{cc} M^* \quad (28)$$

$$\Phi_{ee} = S \Phi_{cc} S^* \quad (29)$$

여기서  $*$ 는 어드조인트(adjoint)이고,  $\Phi_{cc} = \Phi_{rr} + \Phi_{dd}$ 이며,  $\Phi_{rr}$ ,  $\Phi_{dd}$ 는 각각 기준 입력에 대한 스펙트럼과 외란에 대한 스펙트럼으로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_{rr} = A^{-1} E_r E_r^* A^{*-1}$$

$$\Phi_{dd} = A^{-1} C_d E_d^* A^{*-1}$$

$$\Phi_{cc} = A^{-1} E_r E_r^* A^{*-1} + A^{-1} C_d C_d^* A^{*-1}$$

식 (27)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_D E_p\{(Q_c S^* S + R_c M^* M) \Phi_{cc}\} ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_D \{(\overline{Q}_c S^* S + \overline{R}_c M^* M) \Phi_{cc}\} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_D \{ \overline{Q}_c Y_f^* Y_f - \overline{Q}_c \overline{W} \overline{M} Y_f^* Y_f \\
 &\quad - \overline{Q}_c \overline{M}^* \overline{W}^* Y_f^* Y_f + \overline{M} \overline{M}^* Y_c^* Y_c Y_f^* Y_f \} ds \quad (30)
 \end{aligned}$$

여기서 가중치  $\overline{Q}_c$ ,  $\overline{R}_c$ , 제어 스펙트랄 인자 (control spectral factor)  $Y_c$  및 필터스펙트랄 인자 (filter spectral factor)  $Y_f$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \overline{Q}_c &= \frac{B_q^* B_q}{A_w^* A_w} = \frac{E_p \{ \delta W_d^* Q_c \delta W_d \}}{\Delta W_c^* \Delta W_c} \\
 &= Q_c \frac{(1 + \sigma_d^2 S^2)}{(1 + \gamma^2 S^2)} \\
 \overline{R}_c &= \frac{B_r^* B_r}{A_w^* A_w} = \frac{E_p \{ \delta W_d^* R_c \delta W_d \}}{\Delta W_c^* \Delta W_c} \\
 &= R_c \frac{(1 + \sigma_d^2 S^2)}{(1 + \gamma^2 S^2)} \\
 Y_f Y_f^* &= \Phi_{cc} = A^{-1} A^*{}^{-1} C_d C_d^* = A^{-1} A^*{}^{-1} D_f D_f^* \\
 Y_c^* Y_c &= \overline{W}^* \overline{Q}_c \overline{W} + \overline{R}_c \\
 &= \frac{B^* B_q^* B_q B + A^* B_r^* B_r A}{A_w^* A_w A^*{}^{-1} A^{-1}} \\
 &= \frac{D_c^* D_c}{A_w^* A_w A^*{}^{-1} A^{-1}}
 \end{aligned}$$

여기서  $A_w$ 는 가중치의 분모 다항식이고,  $B_q$ ,  $B_r$ 는 각각 가중치의 분자다항식을 나타낸다.  $D_c$ 와  $D_f$ 는 Strictly Hurwitz이다.

또  $\overline{Q}_c Y_f^* Y_f \overline{W}^*$ 를  $\Phi_h$ 라고 하면 식 (29)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2\pi j} \int_D \{ \overline{Q}_c Y_f^* Y_f - \Phi_h^* \overline{M} \\
 &\quad - \overline{M}^* \Phi_h + \overline{M} \overline{M}^* Y_c^* Y_c Y_f^* Y_f \} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_D \left\{ (Y_c \overline{M} Y_f - \frac{\Phi_h}{Y_c^* Y_f^*}) (Y_c \overline{M} Y_f \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Phi_h}{Y_c^* Y_f^*})^* + \overline{Q}_c Y_f^* Y_f - \frac{\Phi_h \Phi_h^*}{Y_c^* Y_c Y_f^* Y_f} \right\} ds \quad (31)
 \end{aligned}$$

식 (31)에서 마지막 2개의 항은 제어 감도  $M$ 과 무관하기 때문에 첫 번째 항에서  $\frac{\Phi_h}{Y_c^* Y_f^*}$ 은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\frac{\Phi_h}{Y_c^* Y_f^*} = \frac{B_q^* B_q D_f B^*}{D_c^* A_w A} = \frac{F_o}{D_c^*} + \frac{G_o}{A_w A} \quad (32)$$

식 (32)를 Diophantine 식으로 나타내면 다음과 같다<sup>(11)</sup>.

$$D_c^* G_o + F_o A A_w = B^* B_q^* B_q D_f \quad (33)$$

식 (32)에서 코절(causal) 부분의 함수는 다음과

같다.

$$\left\{ \frac{\Phi_h}{Y_c^* Y_f^*} \right\}_+ = \frac{G_o}{A_w A} \quad (34)$$

성능 지수  $J$ 값은 Wiener-Hopf 기법을 적용하여 최소화하고,  $Y_c \overline{M} Y_f = \frac{G_o}{A_w A}$ 일 때  $J$ 가 최소값을 갖는다.  $J$ 가 최소가 될 때 식 (30)의 첫 번째 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 Y_c \overline{M} Y_f - \frac{\Phi_h}{Y_c^* Y_f^*} \\
 = \frac{D_c D_f C_{con} - G_o (A C_{od} + B C_{on})}{A A_w (A C_{od} + B C_{on})} - \frac{F_o}{D_c^*} \quad (35)
 \end{aligned}$$

여기서  $C_{on}$ 과  $C_{od}$ 는 보상기의 분자와 분모의 다항식이다. 식 (34)를 이용하여 또 다른 하나의 디아폰틴 식을 구하면 다음과 같다.

$$D_c^* H_o - F_o A_w B = B_r^* B_r A^* D_f \quad (36)$$

식 (33)에  $B$ 를 곱하고, 식 (36)에  $A$ 를 곱해서 두 식을 더하면 다음과 같다.

$$B G_o + A H_o = D_c D_f \quad (37)$$

식 (32)을 식 (30)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 Y_c \overline{M} Y_f - \frac{\Phi_h}{Y_c^* Y_f^*} \\
 = \frac{(C_{on} H_o - G_o C_{od})}{A_w (A C_{od} + B C_{on})} - \frac{F_o}{D_c^*} \quad (38)
 \end{aligned}$$

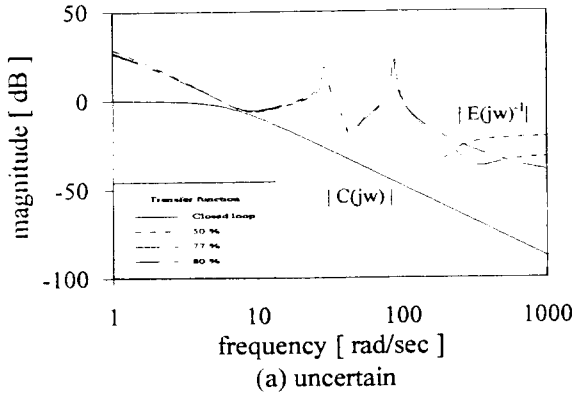
식 (31)이 최소화되기 위해서는 식 (38)의 첫 번째 분자 항이 0이다. 따라서 성능지수  $J$ 를 최소화시키는 보상기의 전달 함수  $C_o$ 를 구하면 다음과 같다.

$$C_o = \frac{C_{on}}{C_{od}} = H_o^{-1} G_o \quad (39)$$

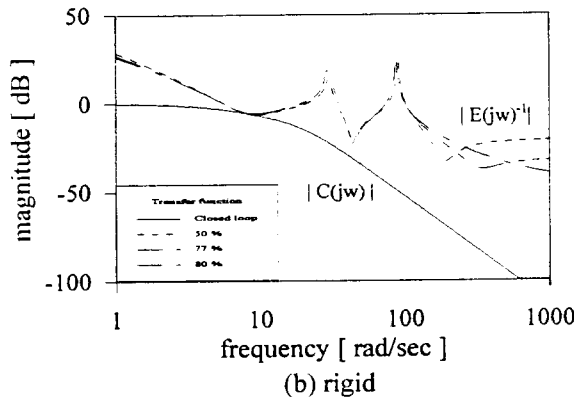
공칭 플랜트 모델을 기초로 설계된 보상기는 특성 방정식 (37)를 만족하면 안정하다. 본 연구에서  $\sigma_d$ 는 0.029이고,  $\gamma$ 는 0.0075이다. 그리고 보상기의 교차 주파수를 5rad/sec로 하기 위해서 가중치  $Q_c$ ,  $R_c$ 를 각각 1과 1.212로 설정하였다.

### 3.3 제어 시스템의 안정도-강인성

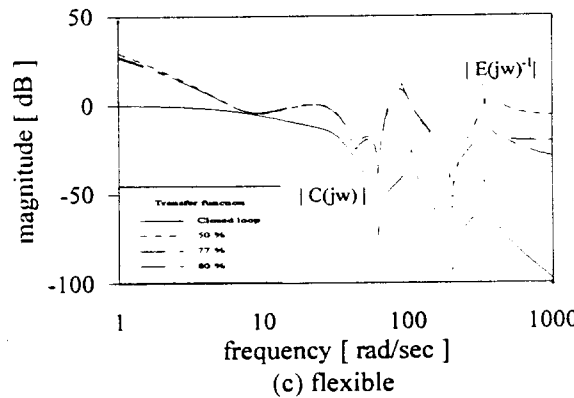
3차 진동 모드까지 고려하여 모델링한 유연 링크 매니플레이터를 실제 시스템으로 간주하고, 매니플레이터의 첨단 질량과 링크 강성의 변화에 대하여 강체 링크 매니플레이터의 모델을 구속 조건으로 놓고 성능 지수에 확률 변수를 반영하여 설계된 제어기와 성능 지수에 확률 변수를 반영하지 않고 설계



(a) uncertain



(b) rigid



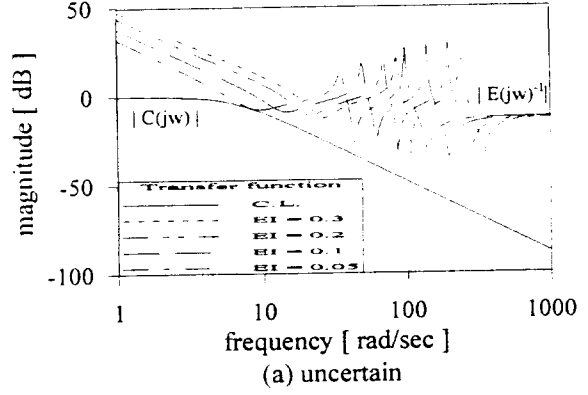
(c) flexible

Fig. 4 Bode plots for the closed loop transfer function and modeling errors with varying payload

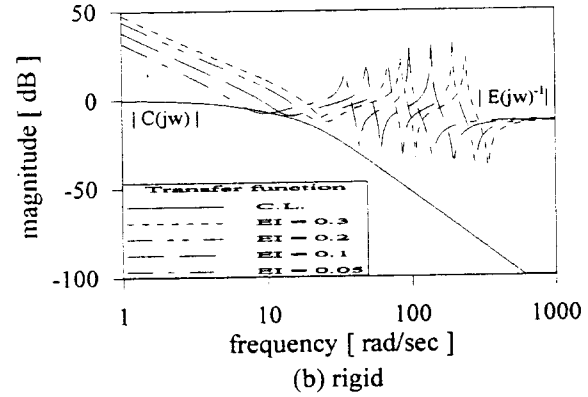
된 제어기 그리고 3차 진동 모드까지 고려하여 모델링한 유연 링크 매니플레이터의 모델을 구축 조건으로 하여 설계한 제어기의 각각에 대하여 안정도-강인성을 조사하기로 한다.

제어 시스템에 대한 안정도-강인성 판별조건식<sup>(12)</sup>은 다음과 같다.

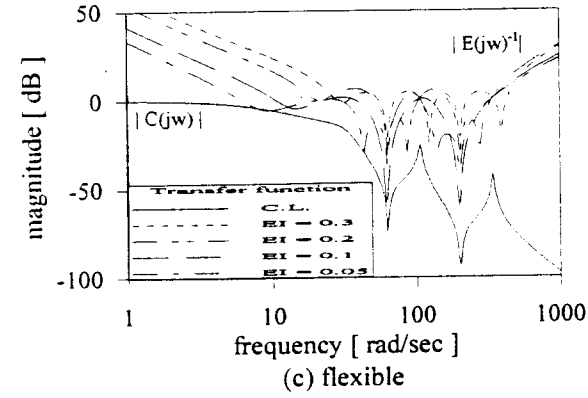
$$|\bar{T}(j\omega)| < |E(j\omega)^{-1}| \quad (40)$$



(a) uncertain



(b) rigid



(c) flexible

Fig. 5 Bode plots for the closed loop transfer function and modeling errors with varying stiffness

여기서  $E(j\omega)$ 는 곱셈형 모델링 오차이고  $\bar{T}(j\omega)$ 는 공칭 플랜트에 제어기가 부착된 페루프 전달함수로서 다음식과 같다.

$$E(j\omega) = [W(j\omega) - \bar{W}(j\omega)]\bar{W}(j\omega)^{-1} \quad (41)$$

$$\bar{T}(j\omega) = \frac{\bar{W}(j\omega)}{1 + \bar{W}(j\omega)C_o(j\omega)} \quad (42)$$

Fig. 4(a)와 (b)와 (c)는 첨단 질량의 변화에 따른

모델링 오차에 대한 제어기의 안정도-강인성을 나타낸다. 강체 링크 매니퓰레이터의 모델을 구속 조건으로 놓고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영하여 설계된 제어기와 유연 링크 모델을 구속 조건으로 놓고 설계된 제어기는 부착된 침단 질량의 80% 증가에 대해서도 각각 안정도-강인성이 보장됨을 알 수 있다. 그러나 강체 링크 매니퓰레이터의 모델을 구속 조건으로 놓고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영하지 않고 설계된 제어기는 부착된 침단 질량의 80% 증가에 대하여 안정도-강인성이 보장되지 않는다.

Fig. 5(a)와 (b)는 (c)는 강성 변화에 따른 안정도-강인성을 나타낸다. 강체 링크 매니퓰레이터의 모델을 구속 조건으로 놓고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계된 제어기는 강성 EI값이 약 0.05 Nm<sup>2</sup> 이상일 때 안정도-강인성이 보장된다. 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영하지 않고 설계된 제어기는 강성 EI 값이 약 0.05 Nm<sup>2</sup>에서 발산하고, 유연 링크 매니퓰레이터의 모델을 고려하여 설계된 제어기는 강성 EI값이 약 0.05 Nm<sup>2</sup>보다 클 때 안정도-강인성이 보장됨을 알 수 있다.

#### 4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

강체 링크 매니퓰레이터의 모델을 구속 조건으로 놓고 성능 지수에 확률 변수를 반영시켜 설계된 LQG제어기의 유용성과 성능을 검토하기 위하여, 유연 링크 매니퓰레이터의 침단 질량과 링크의 강성을 변화시키면서 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 이것과 강체 매니퓰레이터의 모델, 3차 진동 모드까지 고려한 유연 링크 모델을 구속 조건으로 놓고 설계된 기존 LQG제어기와 성능을 비교하였다.

Table 3은 각각 보상기들의 전달 함수를 나타내고 있다. 강체 매니퓰레이터 모델을 구속 조건으로 하

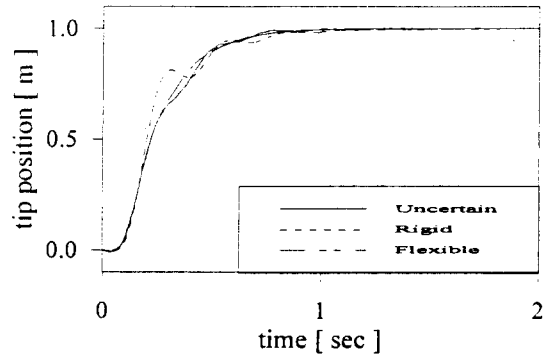


Fig. 6 Step responses of the closed system

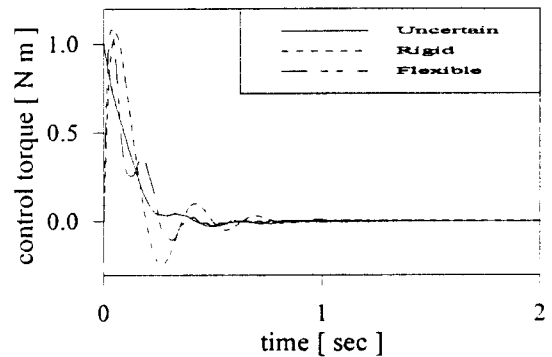


Fig. 7 Control torque

고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계된 보상기와 성능 지수에 확률 변수 모델을 시키지 않고 설계된 보상기 전달 함수의 차수는 각각 2차이고, 유연 링크 매니퓰레이터 모델을 구속 조건으로 하여 설계된 보상기의 전달 함수는 8차 시스템임을 알 수 있다.

Fig. 6은 단위 스텝 입력에 대한 시간역 응답을 나타낸다. 강체 매니퓰레이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계된 제어기와 유연 링크 매니퓰레이터의 모델을 구속

Table 3 Transfer functions of the compensators

Compensator	Transfer function
Uncertain	$G_u(s) = \frac{1.218S^2 + 5.71S + 0.167}{1.468S^2 + 14.61S + 0.11}$
Rigid	$G_r(s) = \frac{50S + 232}{S^2 + 35.85S + 619.3}$
Flexible	$G_f(s) = \frac{8.17 \times 10^4 S^7 + 1.72 \times 10^3 S^6 + 1.04 \times 10^5 S^5 + 1.536 \times 10^4}{S^8 + 7.31 \times 10 S^7 + 1.30 \times 10^5 S^6 + 8.4 \times 10^6 S^5 + 1.6 \times 10^9 S^4} + \frac{1.14 \times 10^{11} S^3 + 1.404 \times 10^{12} S^2 + 7.54 \times 10^{13} S + 3.51 \times 10^{14}}{+ 8.85 \times 10^{10} S^3 + 3.32 \times 10^{12} S^2 + 7.832 \times 10^{13} S + 9.58 \times 10^{14}}$

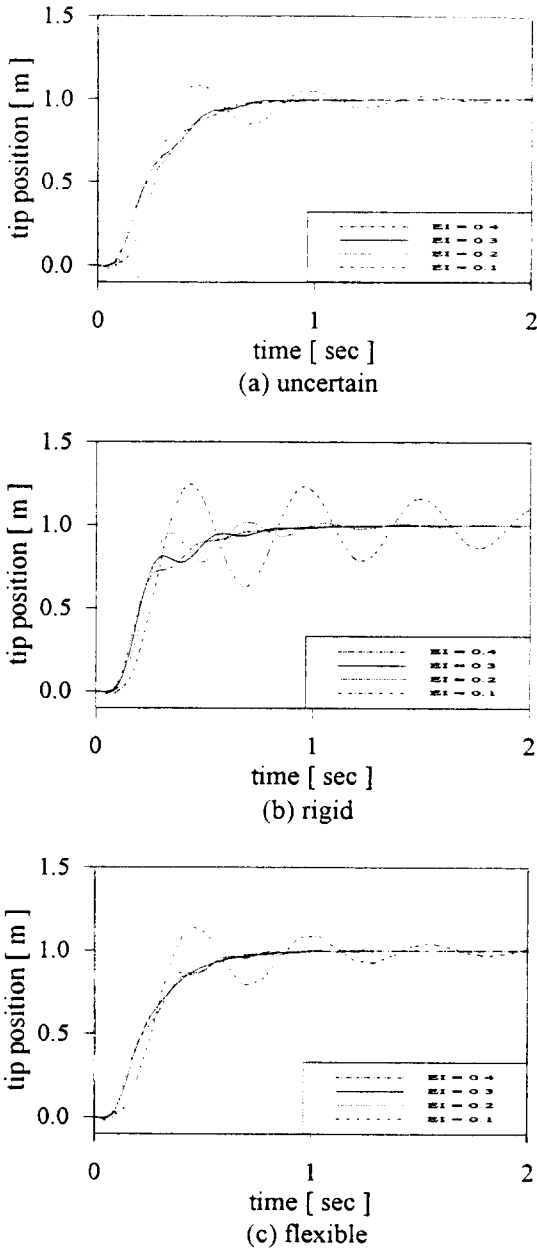


Fig. 8 Step responses with varying stiffness

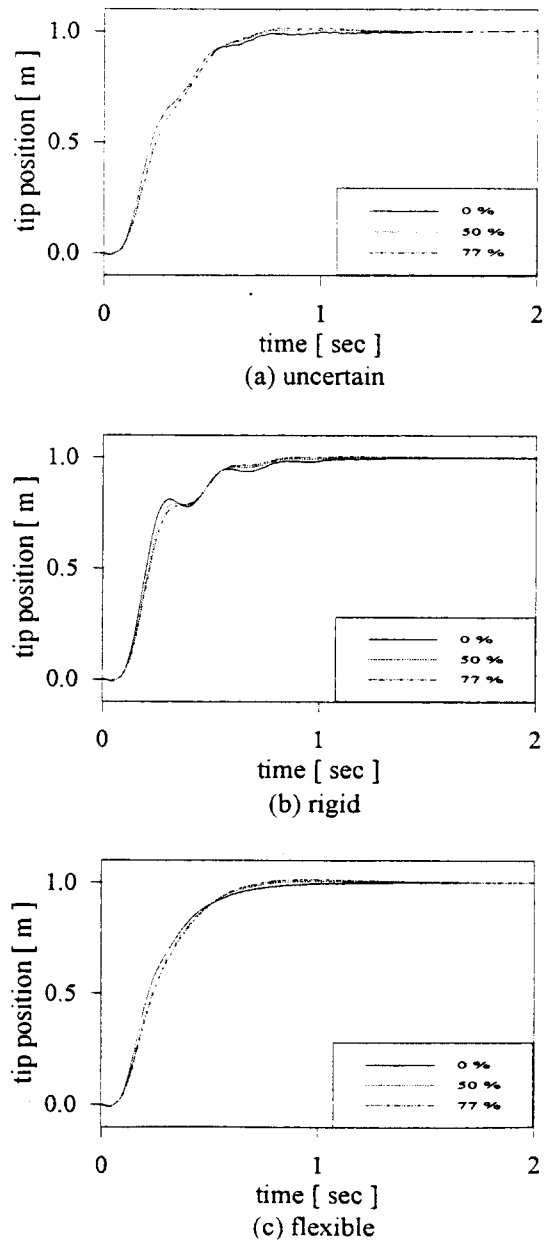


Fig. 9 Step responses with varying payload

조건으로 하여 설계된 제어기 각각에 대하여, 제어 성능을 평가하는 2% 정착 시간, 최대 오버슈트, 최대 언더슈트, 상승시간, 지연 시간 등을 살펴보면 서로 유사함을 알 수 있다. 그러나 강체 매니플레이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시키지 않고 설계된 제어기는 이들 제어기보다 제어 성능이 떨어짐을 알 수 있다.

Fig. 7은 단위 스텝 입력에 대한 제어 토크를 나타내고 있다. 강체 매니플레이터 모델을 구속 조건으로

로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계된 제어기와 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시키지 않고 설계된 제어기 그리고, 유연 링크의 모델을 대상으로 설계된 제어기의 제어력은 각각 1 Nm, 1.06 Nm, 1.08 Nm이다.

Fig. 8는 링크의 강성 변화에 따른 단위 스텝 입력에 대한 시간역 응답을 나타낸다. 강체 매니플레이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계된 제어기와 유연 링크 매



니플래이터의 모델을 구속 조건으로 하여 설계된 제어기 각각에 대하여,  $EI=0.1 \text{ Nm}^2$ 보다 클 때 제어 성능을 평가하는 2% 정착 시간, 최대 오버슈트, 최대 언더슈트, 상승 시간, 지연 시간등을 살펴보면 서로 유사함을 알 수 있다. 강체 매니플래이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능지수에 확률 변수 모델을 반영시키지 않고 설계된 제어기는  $EI=0.4 \text{ Nm}^2$  일 때 이들 제어기와 유사한 제어 성능을 나타내고, 그 이하에서 제어 성능이 떨어짐을 알 수 있다.

Fig. 9은 링크의 강성값  $EI$ 를  $0.3 \text{ Nm}^2$ 으로 고정하고, 매니플래이터 끝점의 첨단 질량 변화에 따른 단위 스텝 입력에 대한 시간역 응답 성능을 나타낸다. 각각의 제어기는 설계시 부착된 첨단 질량이 증가함에 따라 오버슈트가 증가하고, 77%이하에서 서로 비슷한 제어 성능을 나타내고 있다.

이들 결과에서 강체 링크 매니플래이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시키지 않고 설계된 기존 제어기는 무시된 유연 링크 강성의 모델링 오차에 의해 성능이 저하됨을 알 수 있다. 유연 링크 매니플래이터의 모델을 구속 조건으로 하여 설계된 제어기는 성능면에서 양호하나 설계시 유연 링크 매니플래이터의 모델을 이용하기 때문에 구조가 복잡하고, 모델링하기 어려운 유연 링크 매니플래이터 모델이 필요하다. 강체 매니플래이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계한 제어기는 성능면에서 고차 진동 모드 항을 고려하여 설계된 제어기의 제어 성능과 비슷하고, 강성 변화에 따른 성능과 안정도-강인성은 다소 우수함을 알 수 있다.

## 5. 결 론

강체 링크 매니플래이터 모델을 구속 조건으로 하고 무시된 유연 링크 매니플래이터의 탄성 모드를 확률 변수로 가정하여 성능 지수에 반영하는 제어기를 구성하였다. 이 제어기와 기존 LQG제어기의 성능과 안정도-강인성을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 비교하고, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 강체 매니플래이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계된 제어기와 유연 링크 모델을 설계된 기존 제어기는 비슷한 제어 성능을 나타낸다.

(2) 강체 매니플래이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계된 제어기는 2차 시스템이고, 유연 링크 모델을 구속

조건으로 놓고 설계된 기존 제어기는 8차 시스템이다. 따라서 강체 모델을 구속 조건으로 놓고 설계된 제어기가 보다 단순하다.

(3) 강체 매니플래이터 모델을 구속 조건으로 하고 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시켜 설계된 제어기는 비 최소 위상 플랜트인 유연 링크 매니플래이터의 끝점을 제어하는데 성능 지수에 확률 변수 모델을 반영시키지 않고 설계된 제어기에 비해 성능과 안정도-강인성이 개선되었다.

## 참 고 문 헌

- (1) Rakhsha, F., and Goldenberg, A. A., 1985, "Dynamics Modelling of a Single Flexible Robot," IEEE, pp. 984~991.
- (2) Wang, D., and Vidyassagar, M., 1989, "Transfer Function of a Single Flexible Link," IEEE, pp. 1042~1047.
- (3) Kwon Dong-soo, and Book, W. J., 1994, "A Time-Domain Inverse Dynamic Tracking Control of a Single-Link Flexible Manipulator," ASME, Vol. 116, pp. 193~200.
- (4) 하영균, 1987, "유연 단일 링크 로봇 조작용의 최적귀환 제어," 대한기계학회논문집, 제11권, 제 6 호, pp. 923~934.
- (5) 한기봉, 이시복, 1992, "유연 링크 매니플래이터 LQG/LTR제어," 대한기계학회 춘계학술대회 논문집 (I), pp. 611~615.
- (6) Grimbale, M. J., 1992, "LQG Optimal Control Design for Uncertain System," IEE. Proceedings-D, pp. 21~30.
- (7) Oakley, C. O., and Cannon, R. H., 1989, "End Point Control of a Two Link Manipulator with a Very Flexible Forearm: Issues and Experiments," Proceedings of ACC, Vol. 2, pp. 1381~2336.
- (8) 한기봉, 이시복, 1996, "유연 링크 로봇의 특이 섭동 모델 최적제어," 한국정밀공학회지, 제13권, 제 1 호, pp. 62~68.
- (9) Yang, G. B., and Donath, M., 1988, "Dynamic Model of Robot Manipulator with Both Structural and Joint Flexibility," Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 1, pp. 476~481.
- (10) Youla, D. C., and Bongiorno, J. J., 1976, "Mod-

ern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-21, No. 1, pp. 3~13.

- (11) Kucera, V., 1979, Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems, Prentice Hall, pp. 29~32.
- (12) Lehtomaki, N. A., Sandell, N. R., and Athans, M., 1981, "Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Design," IEEE Trans. on AC, Vol. AC-26, pp. 75~92.

### 부 록

계의 관성 행렬  $[M]$ , 계의 감쇠 행렬  $[C]$ , 계의 강성 행렬  $[K]$ 는 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & 0 & 0 \\ M_{13} & 0 & M_{33} & 0 \\ M_{14} & 0 & 0 & M_{44} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} \end{bmatrix}$$

각 행렬의 요소는 다음과 같다.

$$M_{11} = I_h + \rho \int_0^l x^2 dx + m_p l^2$$

$$M_{12} = (\rho \int_0^l x \phi_{1(x)} dx + m_p l \phi_1(l))$$

$$M_{13} = \rho \int_0^l x \phi_2(x) dx + m_p l \phi_2(l)$$

$$M_{14} = \rho \int_0^l x \phi_3(x) dx + m_p l \phi_3(l)$$

$$M_{22} = \rho \int_0^l \phi_1^2(x) dx + m_p \phi_1^2(l)$$

$$M_{33} = \rho \int_0^l \phi_2^2(x) dx + m_p \phi_2^2(l)$$

$$M_{44} = \rho \int_0^l \phi_3^2(x) dx + m_p \phi_3^2(l)$$

$$K_{22} = EI \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx$$

$$K_{33} = EI \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 \phi_2(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx$$

$$K_{44} = EI \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 \phi_3(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx$$

여기서  $I_h$ ,  $j$ ,  $m_p$ ,  $l$ ,  $d_{11}$ 는 각각 허브의 관성, 부하질량, 링크의 길이, 모터감쇠를 나타낸다.