상태지연 선형시스템에 대한 출력되먹임 H^∞제어기 설계

Output Feedback H^∞ Controller Design for Linear Systems with Delayed State

정 은 태, 오 도 창, 박 홍 배
(Eun Tae Jeung, Do Chang Oh, and Hong Bae Park)

Abstract : In this paper, we present an output feedback H^∞ controller design method and derive the sufficient condition of the bounded real lemma for linear systems with multiple delays in states. For state delayed systems, sufficient conditions for the existence of k-th order H^∞ controllers are given in terms of three linear matrix inequalities(LMIs). Furthermore, we show how to construct such controllers from the positive definite solutions of their LMIs and give an example to illustrate the validity of the proposed design procedure.

Keywords : time delay, output feedback, H^∞ control, linear matrix inequality

I. 서론

1980년대부터 H^∞제어에 관한 연구는 상당한 관심을 받으면서 진행되어 왔다. 1989년 Doyle 등[1]은 상태공간에서 리카티 방정식을 기초로 하여 H^∞제어기 설계에 대한 효과적인 방법을 제안하였다. 상태공간에서 H^∞제어기 설계를 위한 다른 접근은 선형 행렬 부등식(LMI: linear matrix inequality)을 이용한 방법이 있다. Gahinet 등[2]과 Iwasaki 등[3]은 선형 행렬 부등식을 기초로 일반적인 H^∞제어 문제에 대한 모든 제어기의 매개변수화를 제시하였다. 그들의 주요 결과는 임의의 차수를 가지는 H^∞제어기가 존재할 필요충분조건은 세개의 선형 행렬 부등식으로 주어진다는 것을 보였다.

그러나 지금까지의 논문들은 시간지연이 없는 시스템에 대한 H^∞제어 문제를 다루었고, 시간지연을 가지는 시스템에 대한 H^∞제어 문제를 다룬 논문은 그다지 많지 않다. Foias 등[4]은 함수적 해석기법(functional analytic technique)을 이용하여 입력에 시간지연을 가지는 선형 시스템에 대한 감도를 최소화하는 H^∞제어기를 구하였다. Lee 등[5]은 리카티 부등식을 이용하여 상태에 시간지연이 있는 시스템에 대한 상태되먹임 H^∞제어기를 설계하였고, Choi 등[6]은 상태와 입력에 시간지연이 있는 시스템으로 확장하여 상태되먹임 H^∞제어기를 설계하였다. 그러나 시간지연 시스템의 상태를 모두 이용할 수 없다면, 이러한 설계기법은 적용될 수 없다.

따라서 본 논문에서는 상태에 여러개의 시간지연이 있는 시스템에 대한 출력되먹임 H^∞제어기를 설계한다. 또한 시간지연을 가지는 폐루프 시스템에 대한 BRL (bounded real lemma)의 충분조건을 제시한다. 즉, 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하고, 폐루프 시스템의 H^∞-노옴이 주어진 γ보다 작거나 같을 충분조건을 제시한다. BRL의 충분조건을 이용하여 출력되먹임 H^∞제어기가 존재할 충분조건을 선형 행렬 부등식으로 나타내고, 출력되먹임 H^∞제어기를 설계하는 방법을 제시한다. 마지막으로 예제를 통하여 본 논문에서 제시한 이론의 타당성을 검증한다.

II. 문제 설정

상태에 시간지연이 있는 시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+\sum_{i=1}^{N} A_{h_i}x(t-h_i)+B_1w(t)+B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t)+D_{11}w(t)+D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t)+D_{21}w(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t\in[-\max\{h_1,h_2,\cdots,h_N\},0] \end{aligned} \tag{1}$$

을 고려한다. 여기서 $x(t)\in\mathbf{R}^n$, $w(t)\in\mathbf{R}^l$, $u(t)\in\mathbf{R}^m$, $z(t)\in\mathbf{R}^p$와 $y(t)\in\mathbf{R}^q$는 각각 상태, 제곱적분 가능한 외란, 제어입력, 제어하고자 하는 출력과 측정출력이고, $h_i(i=1,2,\cdots,N)$는 양의 상수인 지연시간이다. $\phi(t)$는 구간 [$-\max\{h_1, h_2, \cdots, h_N\}$, 0]에서 정의된 연속 벡터 함수이며, 시간지연 시스템 (1)이 t = 0에서 동작할때 필요한 초기조건이다. $\mathbf{R}^n$은 n차원 실수 공간을 의미하며 모든 행렬은 적절한 차원을 가지는 상수행렬이다. 그리고 시간지연 시스템 (1)의 H^∞제어기를

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_K\xi(t)+B_Ky(t) \\ u(t) &= C_K\xi(t)+D_Ky(t) \end{aligned} \tag{2}$$

와 같이 두자. 여기서 $\xi(t)\in\mathbf{R}^k$는 제어기의 상태이다. 시간지연 시스템 (1)에 제어기 (2)를 적용하였을때 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_{cl}\eta(t)+\sum_{i=1}^{N} A_{cl_i}\eta(t-h_i)+B_{cl}w(t) \\ z(t) &= C_{cl}\eta(t)+D_{cl}w(t) \end{aligned} \tag{3}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} &\eta(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t)\end{bmatrix},\ A_{cl}=\begin{bmatrix} A+B_2D_KC_2 & B_2C_K \\ B_KC_2 & A_K\end{bmatrix}, \\ &A_{cl_i}=\begin{bmatrix} A_{h_i} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,N, \\ &B_{cl}=\begin{bmatrix} B_1+B_2D_KD_{21} \\ B_KD_{21}\end{bmatrix}, \\ &C_{cl}=[\,C_1+D_{12}D_KC_2 \;\; D_{12}C_K\,], \\ &D_{cl}=D_{11}+D_{12}D_KD_{21} \end{aligned} \tag{4}$$

이다. $w(t)$에서 $z(t)$까지의 폐루프 전달함수는

$$T_{zw}(s)=D_{cl}+C_{cl}(sI-A_{cl}-\sum_{i=1}^{N} A_{cl_i}e^{-sh_i})B_{cl} \tag{5}$$

이다.

본 논문에서는 γ-준최적 H^∞제어 문제를 해결하는 충분조건을 제시하고자 한다. 시간지연 시스템 (1)에 대한 γ-준최적 H^∞제어 문제는 폐루프 시스템 (3)이 점근적으로 안

접수일자 : 1996. 3. 30., 수정완료 : 1996. 11. 30.
정은태, 오도창 : 창원대학교
박홍배 : 경북대학교 전자·전기공학부
※ 본 연구는 1996년도 한국과학재단 연구비지원에 의한 결과임.
과제번호 : 961-0924-148-1

정하고, 전달함수 (5)의 H^∞-노옴이 $\gamma>0$보다 작거나 같게 하는 제어기 (2)를 설계하는 것이다. 즉, 제어기의 변수 A_K, B_K, C_K와 D_K를 결정하는 문제이다. 따라서 제어기의 변수들을

$$K := \begin{bmatrix} D_K & C_K \\ B_K & A_K \end{bmatrix} \tag{6}$$

와 같이 하나의 행렬로 표현하면, 폐루프 시스템의 행렬 A_{cl}, A_{cl_i}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}은

$$\begin{aligned} &A_{cl}=A_0+B_{00}KC_{00},\ A_{cl_i}=A_iE,\ \ i=1,2,\cdots,N, \\ &B_{cl}=B_0+B_{00}KD_{20}, \\ &C_{cl}=C_0+D_{10}KC_{00},\ D_{cl}=D_{11}+D_{10}KD_{20} \end{aligned} \tag{7}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} &A_0=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix},\ A_i=\begin{bmatrix} A_{h_i} \\ 0 \end{bmatrix},\ \ i=1,2,\cdots,N, \\ &B_0=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{00}=\begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix},\ E=[\,I_n\ 0\,], \\ &C_0=[\,C_1\ 0\,],\ C_{00}=\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \\ &D_{10}=[\,D_{12}\ 0\,],\ D_{20}=\begin{bmatrix} D_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

이다. (8)은 단지 시간지연 시스템의 행렬들로 구성되어 있고, 폐루프 시스템의 행렬들은 제어기 행렬 K의 어파인(affine) 형태이다.

보조정리 1은 본 논문의 결과를 위해 기본적으로 필요한 시간지연 시스템의 안정성에 관한 것이다.

보조정리 1: 상태에 시간지연을 가지는 시스템

$$\dot\eta(t)=A\eta(t)+\sum_{i=1}^{N}A_iE\eta(t-h_i) \tag{9}$$

을 고려하자. 여기서 $A\in\mathbf{R}^{(n+k)\times(n+k)}$, $A_i\in\mathbf{R}^{(n+k)\times n}$, $E\in\mathbf{R}^{n\times(n+k)}$이다. 리카티 부등식

$$A^TP+PA+\sum_{i=1}^{N}(PA_iQ_i^{-1}A_i^TP+E^TQ_iE)<0 \tag{10}$$

을 만족하는 양한정(positive definite) 행렬 $P\in\mathbf{R}^{(n+k)\times(n+k)}$, $Q_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$ $(i=1,2,\cdots,N)$가 존재하면, 시간지연 시스템 (9)는 지연시간 $h_i\ge 0(i=1,2,\cdots,N)$에 관계없이 점근적으로 안정하다.

증명: Lyapunov 함수를

$$V(\eta(t),t)=\eta^T(t)P\eta(t)+\sum_{i=1}^{N}\int_{t-h_i}^{t}\eta^T(\tau)E^TQ_iE\eta(\tau)d\tau$$

와 같이 설정하여 [5]-[8]의 방법과 유사하게 전개하면 (10)의 조건을 얻을 수 있다. ■

III. 주요 결과

이 장에서는 시간지연을 가지는 폐루프 시스템 (3)이 점근적으로 안정하고 폐루프 전달함수 (5)의 H^∞-노옴이 γ보다 작거나 같을 충분조건을 유도한다. 그리고 시간지연 시스템 (1)에 대해 H^∞제어기가 존재할 충분조건을 선형 행렬 부등식으로 나타내고, 제어기 구성 방법을 알아본다.

보조정리 2: 폐루프 시스템 (3)을 고려하자. $\sigma_{\max}(D_{cl})<\gamma$을 가정하고, 리카티 부등식

$$\begin{aligned} &A_{cl}^TP+PA_{cl}+\sum_{i=1}^{N}(PA_iQ_i^{-1}A_i^TP+E^TQ_iE) \\ &\quad+\gamma^{-2}C_{cl}^TC_{cl}+(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl}) \\ &\quad\times I-\gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1}(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl})^T<0 \end{aligned} \tag{11}$$

을 만족하는 양한정 행렬 P와 $Q_i(i=1,2,\cdots,N)$가 존재한다고 가정하자. 이때 폐루프 시스템 (3)은 지연시간 $h_i(i=1,2,\cdots,N)$에 관계없이 점근적으로 안정하고 $\|T_{zw}\|_\infty\le\gamma$을 만족한다.

증명: (11)을 만족하는 양한정 행렬 P와 $Q_i(i=1,2,\cdots,N)$는 (10)의 리카티 부등식을 만족하므로 폐루프 시스템 (3)은 지연시간 $h_i(i=1,2,\cdots,N)$에 관계없이 점근적으로 안정하다. 그리고 $\|T_{zw}\|_\infty\le\gamma$임을 보이기 위해 (11)의 좌변을

$$\begin{aligned} S:=\ &A_{cl}^TP+PA_{cl}+\sum_{i=1}^{N}(PA_iQ_i^{-1}A_i^TP+E^TQ_iE) \\ &+\gamma^{-2}C_{cl}^TC_{cl}+(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl}) \\ &\times(I-\gamma^{-2}D^TD)^{-1}(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl})^T \end{aligned} \tag{12}$$

와 같이 정의하자. (12)의 양변에

$$j\omega P+\sum_{i=1}^{N}(e^{j\omega h_i}A_{cl_i}^TP+e^{-j\omega h_i}PA_{cl_i})$$

을 더해서 정리하면

$$\begin{aligned} &(-j\omega I-A_{cl}^T-\sum_{i=1}^{N}e^{j\omega h_i}A_{cl_i}^T)P \\ &+P(j\omega I-A_{cl}-\sum_{i=1}^{N}e^{-j\omega h_i}A_{cl_i})-(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl}) \\ &\times(I-\gamma^{-2}D^TD)^{-1}(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl})^T \\ =\ &\sum_{i=1}^{N}(PA_iQ_i^{-1}A_i^TP+E^TQ_iE-e^{j\omega h_i}A_{cl_i}^TP-e^{-j\omega h_i}PA_{cl_i}) \\ &+\gamma^{-2}C_{cl}^TC_{cl}+S \\ =\ &\sum_{i=1}^{N}W_i(j\omega)+\gamma^{-2}C_{cl}^TC_{cl}+S \end{aligned} \tag{13}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} W_i(j\omega)\ :=\ &PA_iQ_i^{-1}A_i^TP+E^TQ_iE \\ &-e^{j\omega h_i}A_{cl_i}^TP-e^{-j\omega h_i}PA_{cl_i} \\ =\ &[PA_ie^{-j\omega h_i}-E^TQ_i]Q_i^{-1} \\ &\times[PA_ie^{-j\omega h_i}-E^TQ_i]^*,\ i=1,2,\cdots,N \end{aligned} \tag{14}$$

이다. $(\bullet)^*$는 공액복소전치를 나타내고, (14)는 모든 $\omega\in\mathbf{R}$에 대하여 $W_i(j\omega)\ge 0(i=1,2,\cdots,N)$임을 의미한다. 그리고

$$\Phi(j\omega):=(j\omega I-A_{cl}-\sum_{i=1}^{N}A_{cl_i}e^{-j\omega h_i})^{-1} \tag{15}$$

을 정의하여 (13)의 앞과 뒤에 각각 $(\Phi(j\omega)B_{cl})^*$와 $\Phi(j\omega)B_{cl}$을 곱하여 정리하면

$$\begin{aligned} &\gamma^{-2}B_{cl}^T\Phi^*(j\omega)C_{cl}^TC_{cl}\Phi(j\omega)B_{cl} \\ &+B_{cl}^T\Phi^*(j\omega)[S+\sum_{i=1}^{N}W_i(j\omega)]\Phi(j\omega)B_{cl} \\ =\ &B_{cl}^T\Phi^*(j\omega)PB_{cl}+B_{cl}^TP\Phi(j\omega)B_{cl} \\ &-B_{cl}^T\Phi^*(j\omega)(\gamma^{-2}C_{cl}^TD_{cl}+PB_{cl})(I-\gamma^{-2}D_{cl}^TD_{cl})^{-1} \\ &\times(\gamma^{-2}D_{cl}^TC_{cl}+B_{cl}^TP)\Phi(j\omega)B_{cl} \end{aligned} \tag{16}$$

이고, 또한

$$
\begin{aligned}
&\gamma^{-2}T_{zw}^{*}(j\omega)T_{zw}(j\omega)-I \\
&\quad +B_{cl}^{T}\Phi^{*}(j\omega)[S+\sum_{i=1}^{N}W_i(j\omega)]\Phi(j\omega)B_{cl} \\
&= B_{cl}^{T}\Phi^{*}(j\omega)[PB_{cl}+\gamma^{-2}C_{cl}^{T}D_{cl}] \\
&\quad +[\gamma^{-2}D_{cl}^{T}C_{cl}+B_{cl}^{T}P]\Phi(j\omega)B_{cl}-(I-\gamma^{-2}D_{cl}^{T}D_{cl}) \\
&\quad -B_{cl}^{T}\Phi^{*}(j\omega)(\gamma^{-2}C_{cl}^{T}D_{cl}+PB_{cl})(I-\gamma^{-2}D_{cl}^{T}D_{cl})^{-1} \\
&\quad \times(\gamma^{-2}D_{cl}^{T}C_{cl}+B_{cl}^{T}P)\Phi(j\omega)B_{cl} \\
&= -[(\gamma^{-2}D_{cl}^{T}C_{cl}+B_{cl}^{T}P)\Phi(j\omega)B_{cl}-(I-\gamma^{-2}D_{cl}^{T}D_{cl})]^{*} \\
&\quad \times(I-\gamma^{-2}D_{cl}^{T}D_{cl})^{-1} \\
&\quad \times[(\gamma^{-2}D_{cl}^{T}C_{cl}+B_{cl}^{T}P)\Phi(j\omega)B_{cl}-(I-\gamma^{-2}D_{cl}^{T}D_{cl})] \\
&\le 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

이다. 그리고 모든 $\omega \in \mathbf{R}$에 대하여

$$
\begin{aligned}
T_{zw}^{*}(j\omega)T_{zw}(j\omega) &\le \gamma^{2}I-\gamma^{2}B_{cl}^{T}\Phi^{*}(j\omega) \\
&\quad \times[S+\sum_{i=1}^{N}W_i(j\omega)]\Phi(j\omega)B_{cl} \\
&\le \gamma^{2}I
\end{aligned}
\tag{18}
$$

이므로 $\|T_{zw}\|_\infty \le \gamma$ 이다. ■

참조 1 : 보조정리 2는 시간지연을 가지는 폐루프 시스템 (3)에 대한 BRL의 충분조건이다. 만약 (3)에 시간지연 항들이 없다면(즉, $A_{h_i}=0,\ i=1,2,\cdots,N$), (11)을 만족하는 $P>0$는

$$
\begin{aligned}
&A_{cl}^{T}P+PA_{cl}+\gamma^{-2}C_{cl}^{T}C_{cl}+(\gamma^{-2}C_{cl}^{T}D_{cl}+PB_{cl}) \\
&\quad \times(I-\gamma^{-2}D_{cl}^{T}D_{cl})^{-1}(\gamma^{-2}C_{cl}^{T}D_{cl}+PB_{cl})^{T}<0
\end{aligned}
$$

와 같은 BRL의 리카티 부등식을 만족한다.

참조 2 : Lee 등[5]이 고려한 상태되먹임 H^∞제어기와 보조정리 2의 결과를 비교하기 위해서, $C_2=I$, $D_{11}=0$, $D_{12}=0$, $D_{21}=0$, $N=1$와 $u(t)=Fx(t)$라 두자. 이때 (11)의 리카티 부등식은

$$
\begin{aligned}
&(A+B_2F)^{T}P_1+P_1(A+B_2F)+\gamma^{-2}C_1^{T}C_1 \\
&\quad +P_1A_{h_1}Q_1^{-1}A_{h_1}^{T}P_1+Q_1+P_1B_1B_1^{T}P_1 < 0
\end{aligned}
$$

와 같이 나타낼 수 있고, $P=\gamma P_1$와 $Q=\gamma Q_1$라 두면 Lee 등의 결과와 동일하다.

보조정리 2는 시간지연을 가지는 폐루프 시스템에 대한 BRL의 충분조건을 제시한 것이지, H^∞제어기의 존재성 조건이나 설계방법을 제시한 것은 아니다. 그러므로 선형 행렬 부등식을 이용하여, H^∞제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 제시한다. (11)의 리카티 부등식을 만족하는 양한정 행렬 P와 $Q_i(i=1,2,\cdots,N)$가 존재할 필요충분조건은

$$
\begin{bmatrix}
A_{cl}^{T}P+PA_{cl}+\sum_{i=1}^{N}E^{T}Q_iE & PB_{cl} & C_{cl}^{T} & PA_1 & \cdots & PA_N \\
B_{cl}^{T}P & -\gamma I & D_{cl}^{T} & 0 & \cdots & 0 \\
C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I & 0 & \cdots & 0 \\
A_1^{T}P & 0 & 0 & -Q_1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_N^{T}P & 0 & 0 & 0 & \cdots & -Q_N
\end{bmatrix} < 0 \tag{19}
$$

와 같은 선형 행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬 P가 존재하는 것이다. (19)에는 제어기 행렬 K도 포함되어 있으므로 직접 K를 찾는 것은 쉬운 일이 아니다. 그러나 (7)에서 보았듯이 폐루프 시스템의 행렬은 K의 어파인 형태이므로 (19)를

$$
\Psi+\Sigma\Pi K\Theta^{T}+\Theta K^{T}\Pi^{T}\Sigma^{T} < 0 \tag{20}
$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \mathrm{Diag}(P,\ I,\ I,\ I,\cdots,\ I), \\
\Pi &= [B_{00}^{T}\ D_{10}\ 0\ 0\ \cdots\ 0]^{T}, \\
\Theta &= [C_{00}\ D_{20}\ 0\ 0\ \cdots\ 0]^{T},
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\Psi=\begin{bmatrix}
A_0^{T}P+PA_0+\sum_{i=1}^{N}E^{T}Q_iE & PB_0 & C_0^{T} & PA_1 & \cdots & PA_N \\
B_0^{T}P & -\gamma I & D_{11}^{T} & 0 & \cdots & 0 \\
C_0 & D_{11} & -\gamma I & 0 & \cdots & 0 \\
A_1^{T}P & 0 & 0 & -Q_1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_N^{T}P & 0 & 0 & 0 & \cdots & -Q_N
\end{bmatrix} \tag{22}
$$

이다. (20)을 만족하는 K가 존재할 필요충분조건은 부등식

$$
\Pi_{\perp}^{T}\Sigma^{-1}\Psi\Sigma^{-1}\Pi_{\perp} < 0, \tag{23}
$$

$$
\Theta_{\perp}^{T}\Psi\Theta_{\perp} < 0 \tag{24}
$$

을 만족하는 것이다. 여기서 $\Pi_{\perp}$와 $\Theta_{\perp}$는 각각 Π와 Θ의 직교상보(orthogonal complement)이다[2, 3, 8]. (23)과 (24)를 이용하여 시간지연 시스템 (1)에 대한 H^∞제어기가 존재할 충분조건을 다음 정리에 나타낸다.

정리 1 : 시간지연 시스템 (1)을 고려하자. 그리고 $[W_1^{T}\ W_2^{T}]^{T}$와 $[W_3^{T}\ W_4^{T}]^{T}$를 각각 $[B_2^{T}\ D_{12}^{T}]^{T}$와 $[C_2\ D_{21}]^{T}$의 직교상보라 두자. 이때 선형 행렬 부등식

$$
\begin{bmatrix}
W_1 & 0 & 0 & 0 \\
W_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & I
\end{bmatrix}^{T}
\begin{bmatrix}
XA^{T}+AX & XC_1^{T} & B_1 & A_H & X_H \\
C_1X & -\gamma I & D_{11} & 0 & 0 \\
B_1^{T} & D_{11}^{T} & -\gamma I & 0 & 0 \\
A_H^{T} & 0 & 0 & -Q_H & 0 \\
X_H & 0 & 0 & 0 & -Q_H^{-1}
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
W_1 & 0 & 0 & 0 \\
W_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & I
\end{bmatrix} < 0, \tag{25}
$$

$$
\begin{bmatrix}
W_3 & 0 & 0 \\
W_4 & 0 & 0 \\
0 & I & 0 \\
0 & 0 & I
\end{bmatrix}^{T}
\begin{bmatrix}
A^{T}Y+YA+\sum_{i=1}^{N}Q_i & YB_1^{T} & C_1^{T} & YA_H \\
B_1^{T}Y & -\gamma I & D_{11}^{T} & 0 \\
C_1 & D_{11} & -\gamma I & 0 \\
A_H^{T}Y & 0 & 0 & -Q_H
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
W_3 & 0 & 0 \\
W_4 & 0 & 0 \\
0 & I & 0 \\
0 & 0 & I
\end{bmatrix} < 0, \tag{26}
$$

$$
\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \ge 0, \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
A_H &= [A_{h_1}\ A_{h_2}\ \cdots\ A_{h_N}], \\
X_H &= [X\ X\ \cdots\ X], \\
Q_H &= \mathrm{Diag}\{Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_N\}
\end{aligned}
$$

을 만족하는 양한정 행렬 X, Y와 Q_H가 존재하면, 시간지연 시스템 (1)에 대한 H^∞제어기가 존재한다. 더우기 (25)-(27)을 만족하는 어떤 $(X,\ Y)$에 대해서

$$
Rank(I-XY)=k < n \tag{28}
$$

이면, 차수가 k인 H^∞제어기가 존재한다.

증명 : 조건 (23), (24)를 간단히 하기 위해서, P와 P^{-1}를

$$
P=\begin{bmatrix} Y & N \\ N^{T} & ? \end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix} X & M \\ M^{T} & ? \end{bmatrix} \tag{29}
$$

와 같이 분해하자. 여기서 $X,\ Y\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $M,\ N\in\mathbf{R}^{n\times k}$이고 ? 는 관심없는 부분이다. 그리고 Π와 Θ의 직교상보는

$$\Pi_{\perp}=\begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ W_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},\ \Theta_{\perp}=\begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ W_4 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix} \tag{30}$$

이다. (23)과 (24)의 부등식에 (22), (29)와 (30)을 대입하여 정리하면

$$\begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0\\ W_2 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} XA^T+AX+\sum_{i=1}^{N}XQ_iX & XC_1^T & B_1 & A_H\\ C_1X & -\gamma I & D_{11} & 0\\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I & 0\\ A_H^T & 0 & 0 & -Q_H\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0\\ W_2 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix} < 0, \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0\\ W_4 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TY+YA+\sum_{i=1}^{N}Q_i & YB_1^T & C_1^T & YA_H\\ B_1^TY & -\gamma I & D_{11}^T & 0\\ C_1 & D_{11} & -\gamma I & 0\\ A_H^TY & 0 & 0 & -Q_H\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0\\ W_4 & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix} < 0 \tag{32}$$

이다. (32)는 단지 Y만을 포함하는 선형 행렬 부등식이지만, (31)은 1×1항 때문에 X에 대한 선형 행렬 부등식이 아니다. 그러므로 (31)을 X에 대한 선형 행렬 부등식 형태로 변형하면 (25)가 얻어진다. 그리고 (29)를 만족하는 $P>0$가 존재할 필요충분조건은 $X\text{-}Y^{-1}\geq0$이므로, 이 부등식은 (27)과 등가이다. 끝으로 제어기의 차수는 P의 차원에 의존하기 때문에, 제어기의 차수는 (28)로부터 얻어짐을 쉽게 알 수 있다. ■

참조 3 : 정리 1은 시간지연 시스템 (1)의 γ-준최적 H^{∞} 제어기가 존재할 충분조건이다. 시간지연항들이 없는 시스템을 고려한다면, (25)-(27)을 만족하는 해 $X,\ Y$는 Gahinet 등[2]과 Iwasaki 등[3]이 제시한 결과들을 만족한다.

정리 1은 시간지연 시스템 (1)에 대한 H^{∞}제어기를 찾은 것이 아니라 제어기가 존재할 충분조건을 제시한 것이다. H^{∞}제어기를 얻기 위해서, 먼저 (25)-(27)을 만족하는 해 $(X,\ Y)$를 찾는다. 그리고

$$MN^T = I-XY \tag{33}$$

을 만족하는 전열계수(full-column-rank)를 가지는 $M,\ N\in\mathbf{R}^{n\times k}$을 구한다. 그 다음에 선형 방정식

$$\begin{bmatrix} Y & I\\ N^T & 0\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} I & X\\ 0 & M^T\end{bmatrix} \tag{34}$$

으로부터 유일한 해 P를 얻을 수 있다. Y가 양한정 행렬이고 M이 전열계수일 때, (34)는 항상 풀릴 수 있다[9]. (20)은 K에 대해서 선형 행렬 부등식이므로, γ-준최적 H^{∞}제어기는 (20)을 만족하는 해 K로부터 구할 수 있다.

IV. 예제

본 논문에서 제시한 H^{∞}제어기 설계방법의 타당성을 간단한 예를 통하여 살펴보기 위해 다음의 시간지연 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.1\end{bmatrix}x(t-h_1)\\ &\quad +\begin{bmatrix} 0.1 & -0.3\\ -0.5 & 0.4\end{bmatrix}x(t-h_2)+\begin{bmatrix} 1\\ 0\end{bmatrix}w(t)+\begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) &= [1\ \ 3]\,x(t)+w(t)\\ x(t) &= 0,\quad t\leq 0 \end{aligned} \tag{35}$$

여기서 지연시간 h_1과 h_2는 각각 3초와 5초이다. 제어 목적은 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하고 H^{∞}-노옴이 3이하 (즉, γ=3)가 되도록 제어기를 설계하는 것으로 한다. $Q_1=I_2$, $Q_2=I_2$로 두고, (25)-(27)을 만족하는 양한정 행렬 X와 Y중에 한 쌍은

$$(X,\ Y)=\left(\begin{bmatrix} 1.2200 & 0.0739\\ 0.0739 & 0.6617\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3.4301 & 0.6325\\ 0.6325 & 2.5221\end{bmatrix}\right) \tag{36}$$

이다. 본 예제에서는 ellipsoid 알고리듬[8]을 이용하여 선형 행렬 부등식을 풀었다. 그리고 (33)을 만족하는 전열계수 행렬들 중에 하나는

$$(M,\ N)=\left(\begin{bmatrix} -0.9791 & -0.2036\\ -0.2036 & 0.9791\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3.3005 & 0\\ 1.0836 & -0.5055\end{bmatrix}\right) \tag{37}$$

이다. (34)를 만족하는 양한정 행렬 P는

$$P=\begin{bmatrix} 3.4301 & 0.6325 & 3.3005 & 0\\ 0.6325 & 2.5221 & 1.0836 & -0.5055\\ 3.3005 & 1.0836 & 4.2163 & -0.1047\\ 0 & -0.5055 & -0.1047 & 0.3198\end{bmatrix} \tag{38}$$

이고, (20)을 만족하는 K중에 하나는

$$K=\left[\begin{array}{c|c} D_K & C_K\\ \hline B_K & A_K\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc} -2.4057 & -3.7883 & -0.0014\\ \hline -0.6270 & -3.4535 & 1.0539\\ -2.5984 & 0.2925 & -5.1700\end{array}\right] \tag{39}$$

이다. 제어기 (39)를 시간지연 시스템 (35)에 적용하여 시간영역에서 시뮬레이션한 결과는 그림 1~그림 3에 나타내었다. 시뮬레이션에서 사용한 외란은

$$w(t)=\begin{cases} 5, & t\in[5,\ 9]\\ 0, & t\notin[5,\ 9]\end{cases}$$

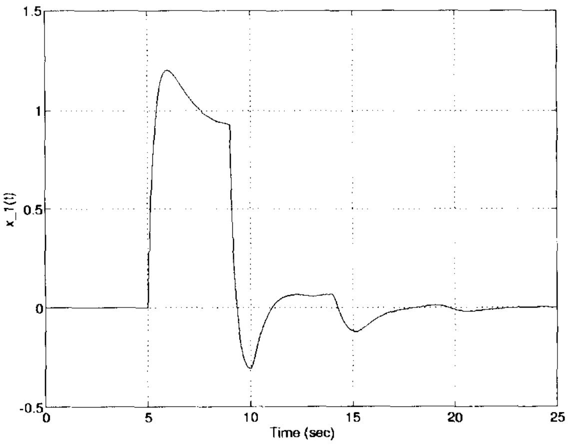

그림 1. $x_1(t)$의 시간응답.

Fig. 1. Time response of $x_1(t)$.

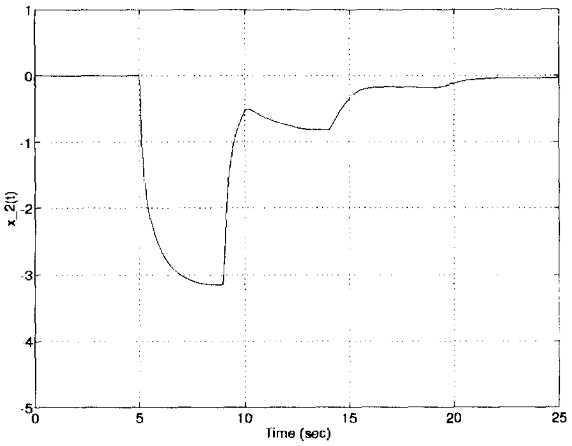

그림 2. $x_2(t)$의 시간응답.
Fig. 2. Time response of $x_2(t)$.

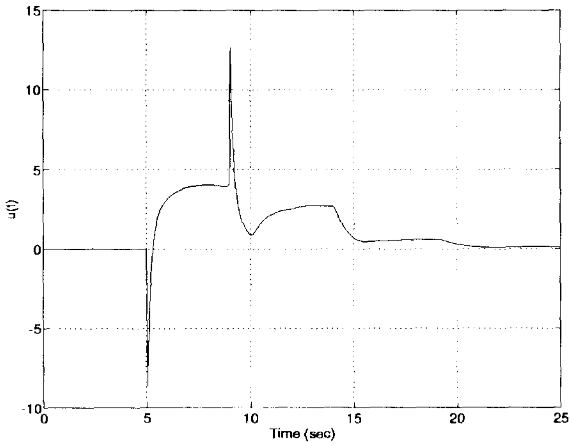

그림 3. $u(t)$의 시간응답.
Fig. 3. Time response of $u(t)$.

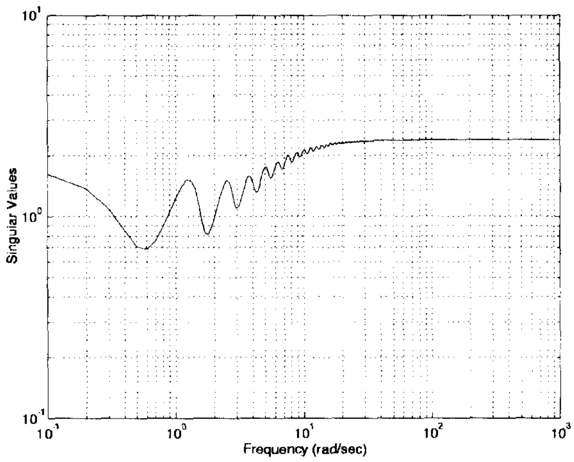

그림 4. 폐루프 전달함수의 최대특이치선도.
Fig. 4. The largest singular values plot of the closed-loop transfer function.

이다. 그림 1과 그림 2는 외란이 시스템에 들어 왔을때 상태들은 외란의 영향을 받다가 점차적으로 외란의 영향이 감쇠되도록 H^∞제어기가 동작함을 나타내고, 그림 3은 이때 사용된 제어입력이다. 그리고 그림 4는 모든 주파수 ω에 따라 폐루프 전달함수의 최대특이치선도(the largest singular values)를 나타낸 것이다. 그림 4로부터 폐루프 전달함수의 H^∞-노옴이 2.5보다 작음을 알 수 있다. 따라서 최종적으로 구한 제어기는 폐루프 시스템을 안정화하고 H^∞-노옴이 3이하임을 보장한다.

V. 결론

본 논문에서는 상태에 여러개의 시간지연을 가지는 시스템에 대한 출력되먹임 H^∞제어기를 설계하였다. 즉, Lee 등이 제시한 상태되먹임 H^∞제어 문제를 출력되먹임으로 확장하였다. 시간지연을 가지는 폐루프 시스템이 모든 시간지연에 대해서 점근적으로 안정하고, 폐루프 시스템의 H^∞-노옴이 미리 설정한 γ보다 작거나 같을 충분조건을 유도하였다. 그리고 선형 행렬 부등식을 이용하여 출력되먹임 H^∞제어기가 존재할 충분조건을 제시하였다. 더우기, 시간지연 시스템에 대한 출력되먹임 H^∞제어기를 설계하는 알고리듬을 제시하였다.

참고문헌

[1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H^∞ control problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, Aug., 1989.

[2] P. Gahinet and P. Apkarian, "An LMI-based parametrization of all H^∞ controllers with applications," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 656-661, Dec., 1993.

[3] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "All controllers for the general H^∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas," *Automatica*, vol. 30, no. 8, pp. 1307-1317, 1994.

[4] C. Foias, A. Tannenbaum, and G. Zames, "Weighted sensitivity minimization for delay systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 31, no. 8, pp. 763-766, Aug. 1986.

[5] J. H. Lee, S. W. Kim, and W. H. Kwon, "Memoryless H^∞ controllers for state delayed systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 159-162, Jan., 1994.

[6] H. H. Choi and M. J. Chung, "Memoryless H^∞ controller design method for linear systems with delayed state and control," *Automatica*, vol. 31, no. 6, pp. 917-919, 1995.

[7] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi, *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, North-Holland Systems and Control Series, vol. 9, Amsterdam, 1987.

[8] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[9] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, and G. Becker, "A collection of robust control problems leading to LMI's," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 1245-1250, 1991.

정 은 태

1966년 1월 12일생. 1991년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1993년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1996년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학박사). 현재 창원대학교 공과대학 제어계측공학과 전임강사. 연구분야는 H^{∞} 제어, 시간지연, 유도항법제어 등.

오 도 창

1967년 1월 16일생. 1991년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1993년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1997년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학박사). 현재 창원대학교 공과대학 국책교수. 연구분야는 견실제어, 모델 및 제어기 차수축소, 시간지연, 유도항법제어 등.

박 홍 배

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제 2권 제 1호 4쪽 참조.