압전체를 사용한 외팔보 진동의 위상지연 제어

Phase Delay Control of a Cantilever Beam Using Piezoelectric Materials

황 진 권, 최 종 호
(Jin Kwon Hwang and Chong-Ho Choi)

Abstract : In a lightly damped cantilever beam, most of the vibration energy is found around natural frequencies. Based on this, a phase delay control for suppressing vibration of the beam is proposed in this paper. This controller is designed to behave like a velocity feedback controller at the frequencies of modes to be controlled. Also, this controller is designed in consideration with uncontrolled modes for robust stability and improving of the sensitivity function of the control system. This phase delay control is applied to vibration suppression of a cantilever beam with a pair of a piezoelectric actuator and a piezoelectric sensor. Experimental results showed that the phase delay control functions efficiently.

Keywords : vibration control, phase delay, piezoelectric materials, cantilever beam

I. 서론

통신위성이나 우주정거장과 같은 우주구조물은 발사가 용이하도록 가볍게 제작된 전형적인 유연구조물이다. 이러한 유연구조물은 2차 미분방정식으로 표현되는 무한개의 진동모드(mode)들을 갖으며 각 진동모드의 댐핑비(damping ratio)는 대략 0.5%[1]로 매우 작다. 이로 인하여 유연구조물을 약간 이동하거나 회전시키면 큰 진동이 야기된다. 특히 저주파수 진동은 오래 지속하므로 유연구조물에 마모, 불안정성 및 운용성 저하를 수반한다. 따라서, 유연구조물에서 저주파수 진동모드들을 제어하는 것은 필수적이다. 대부분의 우주구조물들은 보(beam)나 트러스(truss) 등을 부착한 복합구조물이며, 외팔보(cantilever beam) 구조물은 통신위성에서 태양전지판 구조물을 들 수 있다.

유연구조물의 진동제어에 가진기(actuator)와 센서(sensor)로 PZT(lead zirconate titanate)와 PVDF(poly-vinylidene flourede) 압전체가 널리 이용되고 있다. 압전체는 가볍고 그 가격이 비교적 저렴하고 반작용 없이 정밀하게 가진할 수 있다는 장점이 있다. 특히, PZT 압전체는 압전 스트레인 계수(piezoelectric strain)와 영률이 PVDF 압전체보다 커서 가진기 용도로 효과적으로 사용될 수 있다. 유연구조물의 진동제어에 압전 가진기와 압전 센서의 유용성을 보여준 연구 사례들은 매우 많다. Bailey와 Hubbard [2]는 PVDF 압전체를 외팔보 전체에 부착하고 리아노프(Lyapunov) 제어기법에 의하여 진동이 감소됨을 실험하였다. Anderson과 Hagood[3]는 압전체가 부착된 유연구조물의 운동을 상태공간 모델로 유도하였고 하나의 압전체를 가진가와 센서로 동시에 사용할 수 있음을 보였다. Lee와 Moon[4]은 압전체의 모양을 달리하여 특정한 진동모드만 가진하거나 측정하는 가진기와 센서를 제작하였고, Clark 등[5]은 압전 가진기에 의하여 발생된 평판의 진동을 이론적으로 유도하였고 그것을 실험으로 확인하였다.

LQG 제어[3], H_∞제어[6] 및 퍼지(fuzzy) 제어[7] 등으로 유연구조물의 진동을 감쇄할 수 있으나 이러한 제어기들은 성능에 비하여 매우 복잡하다는 단점이 있다. 진동모드의 댐핑비를 증가시키는 속도되먹임 제어기[8]는 간단하면서 충분한 진동감쇄를 기대할 수 있으나, 제어하지 않는 진동모드들의 불확실성과 고주파수의 잡음 등에 의하여 그 제어시스템이 불안정할 수도 있다[9]. 이러한 불안정 문제점을 개선하여 현재 가장 널리 알려진 제어기법으로 PPF(Positive Position Feedback) 제어[9][10]가 있다. 이 제어의 장점은 진동변위 신호를 사용하고 스필-오버(spill-over) 영향에 둔감하다 것이다. 그러나, 큰 진동감쇄를 얻도록 PPF 제어기의 이득을 증가시키면, 그 감도함수의 주파수응답은 고유주파수 양옆 부근에서 피크(peak)들을 갖는다. 진동제어 과정에서 이 피크 영역에 있는 외란은 증폭이 되므로, PPF 제어의 성능을 떨어뜨리게 된다.

본 논문에서는, 댐핑이 작은 외팔보의 진동 에너지는 고유주파수들 부근에 대부분 존재한다는 것을 이용하여 고유주파수에서 속도되먹임의 제어효과를 얻을 수 있는 위상지연 제어를 제안한다. 이 제어기는 구조가 간단하고 제어기 설계 과정에서 스필-오버 영향과 감도함수의 개선을 고려할 수 있다. 실험을 통하여, 한 쌍의 압전 가진기와 센서가 부착된 외팔보에 위상지연 제어를 적용하여 진동이 감소됨을 보인다.

II. 외팔보의 운동방정식과 압전체의 부착위치 선정

고정단이 $x=0$이고 자유단이 $x=l$ 인 균일한 외팔보의 운동방정식은 편미분방정식으로 표현된다. 외팔보를 회전관성이 무시되는 Eulur 보로 가정할 때, 외부의 굽힘 모멘트(moment) $M(x,t)$에 의한 진동변위 $w(x,t)$는

$$\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}=\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

$$0<x<l$$

로 주어진다[3][11]. 여기서, ρ는 외팔보의 밀도이고, A는 횡단면의 면적이고, E는 영률이고, I는 관성 모멘트이다. 외팔보의 고정단과 자유단에서 경계조건들은

$$w(x,t)=\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=0, \quad \text{for } x=0$$

접수일 : 1996. 11. 21., 수정완료 : 1997. 4. 16.
황진권 : 서울대학교 전기공학부
최종호 : 서울대학교 전기공학부
* 본 논문은 자동제어특화센타에서 지원하여 연구하였습니다.

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} = 0, \quad \text{for } x = l$$

이 된다. 위의 경계조건들과 (1)의 편미분방정식에서 진동변위 $w(x,t)$는 무한개의 진동모드들의 합으로 구해지며 각 진동모드는 시간함수와 공간함수의 곱으로 표현된다.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \tag{2}$$

여기서, $q_i(t)$는 n 번째 진동모드이고 $\phi_i(x)$는 n 번째 진동모드의 진동형상을 나타내는 고유함수(eigenfunction)이다. 또한, 편미분방정식의 고유치해석[12]에 의하여 진동모드의 고유주파수를 구할 수 있다.

압전체는 전기-기계적 에너지 변환이 우수한 1과 2 방향의 등방성(transversely isotropic) 물질로서, 외부에 전계가 인가되면 스트레인(strain)이 생기고, 압전체에 변형이 있으면 전압이 유기된다. 외팔보에 압전체를 부착하여 굽힘 모멘트 $M(x,t)$를 발생시킬 수 있다. 압전체에 인가된 전압이 $u(t)$일 때, 1-방향의 응력 σ_1은

$$\sigma_1 = Y_1 S_1 = - Y_1 \frac{d_{31}}{h_p} u(t) \tag{3}$$

로 계산된다[4][10]. 여기서, Y_1은 압전체의 영률이고 S_1은 1-방향으로 압전체의 변형률이고 d_{31}은 3-방향의 전계에 대한 1-방향의 압전 스트레인 계수이고 h_p는 압전체의 두께이다. 외팔보의 구간 x_1에서 x_2까지 압전체를 부착할 때, 위치에 따라 압전체에 분포되는 전압 $V(x,t)$는

$$V(x,t) = [H(x-x_1) - H(x-x_2)]u(t) \tag{4}$$

이며, $H(x)$는 단위계단함수이다. 이 때, $V(x,t)$에 의하여 외팔보에 작용하는 굽힘 모멘트 $M(x,t)$는

$$M(x,t) = \mu V(x,t), \quad \mu =: \int_{-(h_p + h_l + h_b - h_c)}^{-(h_l + h_b - h_c)} \sigma_1 b z \, dz \tag{5}$$

로 계산된다. 여기서 h_l와 h_b는 각각 접착체와 외팔보의 두께이고 b는 압전체의 폭이고 h_c는 외팔보의 굽힘 중심축면이고 z 축은 압전체의 두께 방향인 3-방향이다. h_c는 압전체, 접착체 및 외팔보에 대한 힘평형의 관계로부터 계산될 수 있고, h_c의 계산에서 접착체의 두께는 상대적으로 매우 작아서 h_l을 무시할 수 있다.

함유함수의 직교성(orthogonality)을 이용하면, (1)의 편미분방정식은 각 진동모드별로 2차 미분방정식으로 나타낼 수 있다. 외팔보의 진동에, 매우 작지만, 점성 댐핑(viscous damping)과 굽힘 댐핑(bending damping)을 고려하면 압전체가 부착된 외팔보의 운동방정식은

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \mu p_i u(t), \tag{6}$$

$$p_i := \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} dx = \phi'_i(x_2) - \phi'_i(x_1),$$
$$i = 1, 2, 3, \cdots$$

이 된다. 여기서, ω_i는 i 번째 고유주파수($rad/\sec$)이고, ζ_i는 i 번째 진동모드의 댐핑비이고, $\phi'_i(x)$는 i 번째 고유함수의 1차 도함수이다.

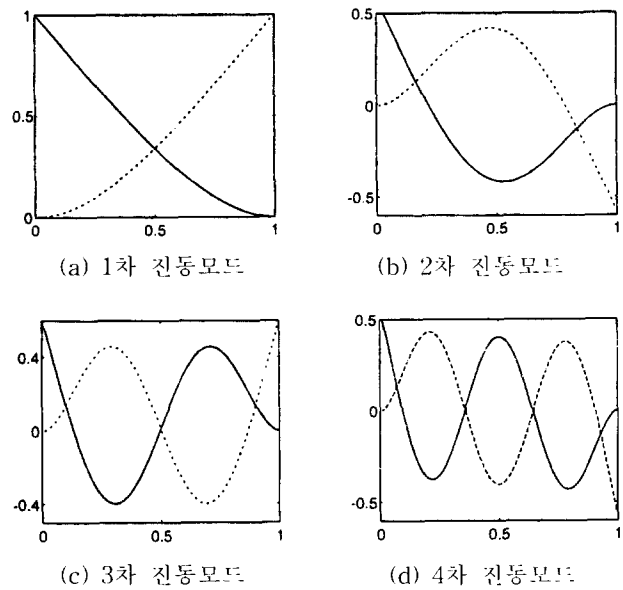


그림 1. 진동모드의 형상(점선)과 그 위치감도함수의 형상(실선).

Fig. 1. The modal sensitivity functions(dot line) and the modal shape functions(solid line).

운동방정식 (6)에서 입력 계수 p_i의 크기는 i 번째 진동모드에 대한 압전체의 가진세기를 나타낸다. 압전체의 부착위치를 변경하면서 p_i의 크기를 조사하면 i 번째 진동모드에 대한 좋은 부착위치를 찾을 수 있다. 이러한 부착위치 선정의 기준으로 고유함수의 2차 도함수를 이용할 수 있으며, 본 논문에서 이것을 위치감도함수로 정의한다. 즉, i 번째 진동모드의 위치감도함수는

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \frac{d^2 \phi_i(\alpha)}{d\alpha^2} d\alpha = \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \tag{7}$$

이다. 단위 길이의 외팔보에 대한 4 차까지 진동모드들의 위치감도함수 형상들이 그림 1에 있다. 압전체를 외팔보의 일부 구간에만 부착할 때, 1차 진동모드에 대하여 가장 큰 가진력을 주는 위치는 외팔보의 고정단이고, 2차 진동모드에 대하여서는 외팔보의 고정단이나 가운데에서 좋은 가진력을 얻을 수 있다. 또한, 3차 이상의 진동모드들에 대하여서는 그 고유함수의 극점(extreme point)에서 좋은 가진력을 얻을 수 있다. 제어하지 않는 진동모드들에 대한 스필-오버 영향을 줄이는데 있어서, 가진기의 부착위치는 매우 중요하다. 위치감도함수를 이용하여 스필오버 영향이 작게되는 압전체의 부착위치를 찾을 수 있다. 한 예로, 외팔보의 첫 번째와 두 번째 진동모드들을 제어대상으로 할 때, 좋은 부착위치는 고정단 부근이 된다. 이것은 1차와 2차 진동모들의 가진력은 좋은 반면에 3차 이상의 진동모드들의 가진력은 상대적으로 작기 때문이다.

이 부착위치와 더불어, 가진기와 센서를 동일 위치에 배치하는 것도 매우 중요하다. 이 동일 위치가 아닌 경우에, 제어시스템은 스필-오버에 의하여 불안정할 수도 있다[11]. 또한, Cannon[13]은 진동모드 계수의 불확실성에

의하여 제어기 설계가 매우 어려워진다는 것을 실험으로 보여주었다. 이 동일 위치에 대한 또 다른 장점은 플랜트가 최소위상 시스템이 되어 다양한 제어이론을 적용할 수 있다는 것이다. 압전 가진기와 압전 센서를 동일 구간 x_1에서 x_2까지 부착할 때, 외팔보의 진동에 의하여 유기되는 압전 센서의 전압 $y(t)$는 다음의 비례관계로 주어진다[3][10].

$$y(t) \propto \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\, dx$$

압전체의 물성치와 외팔보의 물성치에 의하여 결정되는 전압-변위 상수 ν를 도입하면 센서의 출력전압은

$$y(t) = \nu \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\, q_i(t)\, dx = \nu \sum_{i=1}^{\infty} p_i q_i(t) \qquad (8)$$

이 된다. i 번째 진동모드에 대한 압전체의 측정세기는 가진세기 p_i와 같으므로 위치감도함수는 가진기 뿐만 아니라 센서의 부착위치를 선정하는데도 사용될 수 있다.

III. 위상지연 제어

작은 댐핑비에 의하여 외팔보의 진동은 고유주파수들에서 공진하므로, 임펄스(impulse) 형태의 충격이나 백색잡음을 외팔보에 가하면, 대부분의 진동 에너지는 고유주파수를 중심으로 하는 극히 좁은 주파수 대역에 분포하게 된다. 따라서, 외팔보의 진동을 효과적으로 제어하는 것은 이 좁은 주파수 대역에 있는 진동을 없애는 것이다. 이러한 관점에서 고유주파수에서 속도되먹임이 되는 위상지연 제어를 제안한다. 즉, 이 제어기는 고유주파수에서 미분제어기와 동일한 90° 위상을 갖도록 설계된다.

전대역(all-pass) 필터로 특정한 주파수에 위상지연을 줄 수 있다. 시스템의 설계와 구성이 간편하도록 변수가 적은 2차 전대역 필터를 사용하는 것이 바람직하며 이러한 전대역 필터는 시간 지연기 e^{-sT}에서 Pade의 근사화[14]에 의하여 얻어질 수 있다.

$$e^{-sT} \approx \frac{2 - Ts + (-Ts)^2/2}{2 + Ts + (Ts)^2/2} \qquad (9)$$

여기서, 지연시간 T는 설계변수로서 적절히 선정되면, 특정한 주파수에서 원하는 위상지연을 줄 수 있다. 또한, 다수의 주파수들에서 원하는 위상지연들을 갖는 시스템은 그 주파수들의 개수만큼의 전대역 필터들을 직렬로 연결하여 구성될 수 있다.

전대역 필터들의 사용에 의하여, 처음 n개의 진동모드들을 위한 위상지연 제어기 $K(s)$는

$$K(s) = K_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{2 - T_i s + (-T_i s)^2/2}{2 + T_i s + (T_i s)^2/2} \qquad (10)$$

로 설계될 수 있으며 K_0는 제어기의 이득이다. 제어기 설계의 편리를 위하여, 그림 2와 같이 양의 되먹임(positive feedback)을 사용하면, n개의 고유주파수들에서 $K(s)$의 위상이 $-90°$ 되는 $T_i\,(i=1,2,\cdots,n)$를 찾으면 된다.

제어하지 않는 고주파수의 진동모드들에 의한 불확실

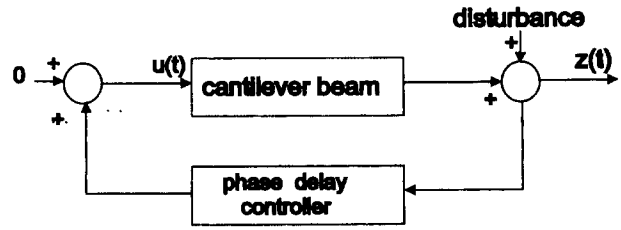


그림 2. 포시티브 피드백에 의한 위상지연 제어시스템.
Fig. 2. The phase delay control system by positive feedback.

성은 위상지연 제어이득 K_0의 크기를 제한하여 진동감쇄 정도를 미미하게 할 수도 있다. 위상지연 제어기 (10)은 모든 주파수에서 이득이 동일하므로, 주파수 영역에서 제어하지 않는 진동모드들에 의한 견실한(robust) 안정성 조건을 살펴볼 필요가 있다. 압전 가진기와 센서가 부착된 외팔보의 전달함수는 (6)과 (8)의 Laplace 변환으로 얻을 수 있다. 처음 n개의 저주파수 진동모드들을 제어대상일 때, 그 전달함수 $P(s)$와 폐루프 전달함수 $C(s)$는

$$P(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \qquad (11)$$

$$C(s) = \frac{K(s)P(s)}{1 - K(s)P(s)} \qquad (12)$$

이며, 여기서 $c_i = \mu\nu p_i^2$ $(c_i > 0)$이다. 제어하지 않는 진동모드들에 의한 곱셈모델 불확실성(multiplicative model uncertainty)의 최대 오차 한계를 $e(\omega)$로 놓으면, 견실한 제어가 되기 위한 조건은

$$|C(j\omega)| \le \frac{1}{e(\omega)}, \quad \forall\omega \qquad (13)$$

로 주어진다[15]. 제어하지 않는 고주파수 진동모드의 관측 스필-오버 영향에 의하여 (13)의 조건이 위배되기 쉬우므로[11], 센서 신호에 저대역통과 필터를 도입할 필요가 있다. 이것에 의하여 제어이득 K_0를 증가시킬 수 있고 보다 나은 진동감쇄를 얻을 수 있다.

주파수 영역에서 감도함수 $S(s)$의 크기는 외란 감소의 정도를 나타낸다.

$$S(s) = \frac{1}{1 - K(s)P(s)} \qquad (14)$$

$K(s)P(s)$는 제어대상 진동모드의 고유주파수에서 $-180°$ 위상과 최대의 크기를 가지므로, 고유주파수에서 큰 진동감쇄를 얻을 수 있다. 그러나, 진동모드의 작은 댐핑비에 의하여, 고유주파수보다 약간 떨어진 주파수에서 $K(s)P(s)$ $S(j\omega)$의 위상과 크기는 각기 0° 와 1에 가깝게 되어, 에 피크들이 있게 된다. 이 피크들은 제어이득이 클수록 높게 되어 진동감쇄를 나쁘게 한다. 한편, PPF 제어에서도 이러한 피크들이 나타나는데, 이 피크들의 높이를 한정하면서 PPF 제어이득을 증가시키기는 매우 어렵다. 위상지연 제어에서 진동감쇄를 나쁘게 하는 가장 저주파수의 피크는 $0Hz$ 부근에 있으며 이 피크의

크기는

$$S(0)=\frac{1}{1-K(0)P(0)},$$

$$K(0)P(0)=K_0\sum_{i=1}^{n} c_i/\omega_i^2 \tag{15}$$

이다. 여기에 n차 이상의 진동모드들에 의한 모델오차를 고려하면 주파수 $0Hz$에서 실제 감도함수의 크기는

$$\frac{1}{1-\left(K(0)P(0)+K_0\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i/\omega_i^2\right)}$$

로 된다. 모델에 큰 오차가 있고 제어이득도 크면, 주파수 $0Hz$에서 실제의 감도함수는 높은 피크를 가지며, 압전체의 부착위치가 잘 못 선정
된 경우에는 견실한 안정성 조건 (13)도 위배할 수도 있다. 이것을 개선하기 위하여, 고대역통과 필터의 도입이 필요하다. 1차 진동모드 제어신호의 크기에 변동이 없도록 고대역통과 필터의 컷-오프 주파수는 1차 고유주파수보다 작도록 한다.

견실한 제어를 위한 저대역통과 필터와 고대역통과 필터의 도입으로 위상지연 제어기는

$$K(s)=K_0L(s)H(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{2-T_is+(-T_is)^2/2}{2+T_is+(T_is)^2/2} \tag{16}$$

이 되며, $L(s)$는 저대역통과 필터이고 $H(s)$는 고대역통과 필터이다. $L(s)$와 $H(s)$에 의한 위상지연들을 고려하여 T_i $(i=1,2,\cdots,n)$들을 적절히 선정하면 고유주파수에서 위상이 $-90°$ 가 되는 $K(s)$를 설계할 수 있다. 제어이득 K_0를 근궤적(root-locus) 방법으로 결정할 수 있으며, 작은 댐핑비 때문에 외팔보 시스템의 극점들과 영점들은 복소수 평면의 허수 축에 매우 가깝게 배열된다[16]. 따라서, 좋은 진동감쇄를 얻기 위하여서는 폐루프 시스템의 극점들이 허수 축에서 가능한 멀리 떨어진 위치에 존재하도록 제어이득 K_0를 설정한다.

IV. 외팔보 실험 장치 및 시스템 식별

실험 대상의 외팔보는 강철이며 그 규격은 그림 3에 나타나 있다. 외팔보의 두께는 $0.8mm$이고, 밀도는 $7870kg/m^3$이고, 영률은 $210\times10^9N/m^2$이고, 포아송비(Poission ratio)는 0.30이다. 실험 외팔보의 고유치 해석에 의한 처음 3개의 고유주파수들은 $3.7844Hz$, $23.7164Hz$ 그리고 $66.4061Hz$로 계산되었다. 이 실험에서 제어대상들은 처음 2개의 저주파수 진동모드들이고, 이 두 진동모드들의 위치감도가 좋은 고정단에 압전체들을 그림 3과 같이 부착하였다. 외팔보에 부착된 압전체는 Piezo System 회사의 G1195 PZT[17]이며, 압전체의 두께는 $0.23mm$이고, 밀도는 $7600kg/m^3$이고, d_{31}은 $166\times10^{-12}m/V$이고, 영률은 $63\times10^9N/m^2$이고, 포아송비는 0.31이다. 그림 3의 3개 압전체들 중에서 가운데 것이 압전 가진기이며, 가진기와 센서를 동일위치에 부착하기 위하여, 가진기 양옆의 두 압전체들을 전선으로 연결하여 하나의 압전 센서를 구성하였다. 실험에서 외란을 발생하기 위하여 외팔보 뒷면에 외란 발생용 압전체를 그림 3과 같이 부착하였다.

Hwang[18]이 제안한 유연구조물에 대한 다입력 다출력 시스템 식별기법을 사용하면 정밀한 모델을 얻을 수 있다. 이 기법은 식별하려는 진동모드들의 고유주파수들이 주파수 영역에서 적절한 간격으로 배열되어 있다는 가정을 요구한다. 외팔보의 고유주파수들은 이 가정을 잘 만족하므로, 이 식별기법을 단일입력 단일출력 시스템에 적합하도록 약간 수정하면 외팔보에 쉽게 적용할 수 있다. 외팔보의 i 번째 진동모드의 미분방정식에서 구하려는 계수를 a_i, b_i 그리고 c_i로 표현하여 (6)과 (8)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

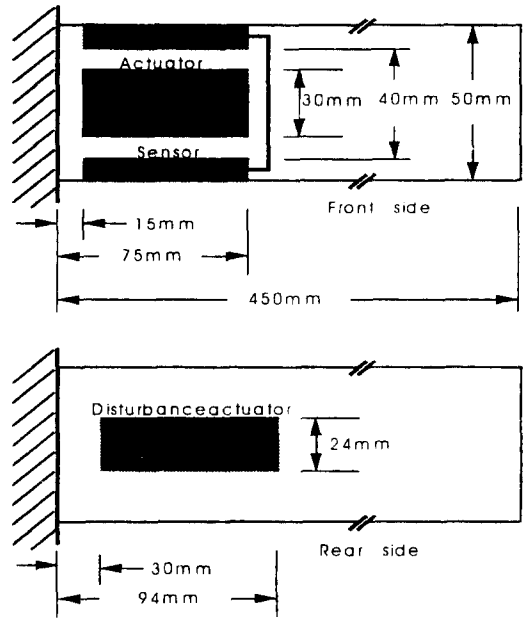


그림 3. 실험에 사용한 외팔보의 규격.
Fig. 3. The cantilever beam used in the test.

$$\ddot{q}_i(t)+a_i\,\dot{q}_i(t)+b_iq_i(t)=c_iu(t),$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t) \tag{17}$$

여기서, $a_i=2\zeta_i\omega_i$, $b_i=\omega_i^2$ 그리고 $c_i=\mu\nu p_i^2$이다. 입력 $u(t)$와 출력 $y(t)$에서 i 번째의 진동모드에 관련된 신호만을 추출할 수 있는 대역통과 필터를 도입하고 이 추출된 신호에서 다른 진동모드의 신호를 무시하면, (17)은 다음과 같이 근사화될 수 있다.

$$\ddot{q}_i(t)+a_i\,\dot{q}_i(t)+b_iq_i(t)=c_iu_i^f(t),$$

$$y_i^f(t)=q_i(t) \tag{18}$$

여기서, $u_i^f(t)$와 $y_i^f(t)$는 각각 $u(t)$와 $y(t)$에서 필터링된 i 번째 진동모드에 관한 신호이다. 최소자승법(least square method)[19]을 적용하기 위하여, Tustin의 방법을 사용하여 (18)의 미분방정식을 이산방정식으로 변환할 필요가 있다.

$$y_i^f[k+2]+\overline{a}_iy_i^f[k+1]+\overline{b}_iy_i^f[k]=\overline{c}_iv_i[k]$$

$$v_i[k]:=u_i^f[k]+2u_i^f[k-1]+u_i^f[k-2] \tag{19}$$

여기서, $u_i^f[k]$와 $y_i^f[k]$는 각기 $u_i^f(t)$와 $y_i^f(t)$를 샘플링

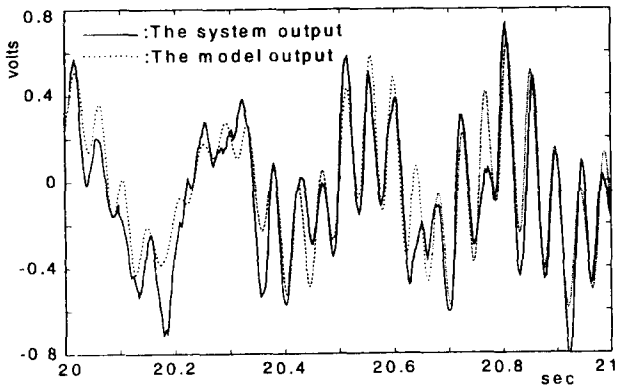


그림 4. 외팔보 시스템과 그 모델 출력들의 비교.
Fig. 4. The outputs of the system and the model.

한 신호들이고 $\overline{a_i}$, $\overline{b_i}$ 및 $\overline{c_i}$는 연속시간 계수들에서 변환된 이산시간 계수들이다. N 개의 샘플링 데이터에 대하여 다음의 목적함수를

$$\min_{\overline{a_i}\ \overline{b_i}\ \overline{c_i}} \sum_{k=3}^{N-2}\left[y_i^f[k+2]+\overline{a_i}y_i^f[k+1]+\overline{b_i}y_i^f[k]-\overline{c_i}v_i[k]\right]^2 \tag{20}$$

고려한다. 이산방정식 (19)는 $y_i^f[k]$와 $v_i[k]$에 대하여 선형이므로 최소자승법으로 (20)의 $\overline{a_i}$, $\overline{b_i}$ 및 $\overline{c_i}$를 구할 수 있고 Tustin의 변환 관계로부터 a_i, b_i 및 c_i를 $\overline{a_i}$, $\overline{b_i}$ 및 $\overline{c_i}$에서 계산할 수 있다.

실험 외팔보의 1차와 2차 진동모드들에 대한 진동 데이터를 얻기 위하여, 슈도랜덤(pseudo-random)잡음을 $30Hz$ 대역폭의 저대역통과 필터에 통과하여 압전 가진기에 인가하였다. 실험의 샘플링 주파수는 $600Hz$이었고 샘플링 횟수는 16384이었다. 1차와 2차 진동모드들의 신호를 추출하기 위하여, 대역폭이 $1Hz$인 4차 Butterworth 대역통과 필터들을 사용하였다. 식별기법에 의하여 처음 두 진동모드들의 모델 $P(s)$는

$$P(s)=\frac{5.4533}{s^2+9.0347\times10^{-2}s+5.3238\times10^2}+\frac{69.154}{s^2+9.1353\times10^{-2}s+2.0767\times10^4} \tag{21}$$

로 구해졌다. 그림 4에 모델의 출력과 실제 시스템의 출력이 비교되어 있는데, 이들 두 신호들은 대체로 비슷함을 알 수 있다.

V. 제어기 설계 및 실험 결과

전기회로 구현이 쉽도록 위상지연 제어기에 1차의 저대역통과 필터와 고대역통과 필터를 사용하였고 저대역통과 필터의 전달함수는 $L(s)=2\pi\cdot30/(s+2\pi\cdot30)$이고 고대역통과 필터의 전달함수는 $H(s)=s/(s+2\pi\cdot3)$이다. 식별된 모델로부터 위상지연 제어기 $K(s)$는

$$K(s)=40\times\frac{s^2-7.8826\times10s+2.0712\times10^3}{s^2+7.8826\times10s+2.0712\times10^3}\times\frac{s^2-3.9414\times10^2s+5.1780\times10^4}{s^2+3.9414\times10^2s+5.1780\times10^4}\times\frac{s}{s+2\pi\cdot3}\frac{2\pi\cdot30}{s+2\pi\cdot30} \tag{22}$$

로 설계되었고 그림 5에서 $K(s)$의 위상은 1차와 2차의 고유파수들에서 $-90°$ 이다. 설계된 제어기에서 (16)의 시간지연 T_1과 T_2를 구하는 과정은 부록에 첨부되어 있다. 작은 댐핑비에 의하여 그림 6에서 1차와 2차 진동모드들의 극점들의 궤적은 허수 축에 매우 가까이 있으며 제어이득 40은 1차 진동모드 극점들이 허수 축에서 가능한

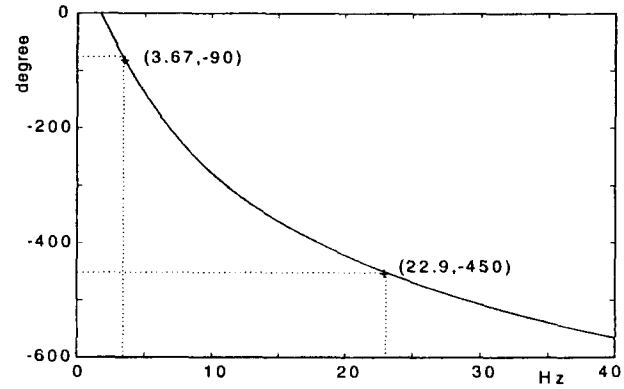


그림 5. 제어기의 위상.
Fig. 5. The phase of the controller.

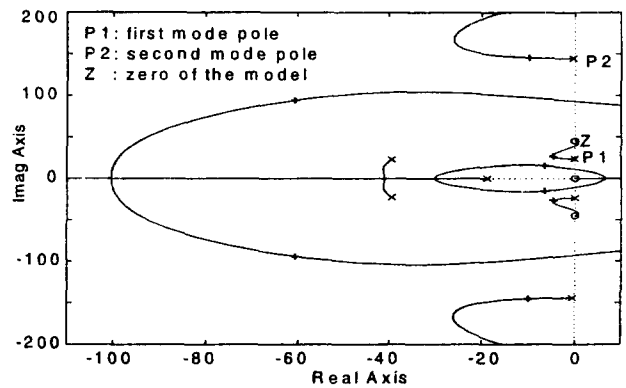


그림 6. 폐루프 극점들의 궤적.
Fig. 6. The root loci of the closed loop poles.

멀리 떨어지도록 선정된 것이다.

위상지연 제어와 PPF 제어에 의한 외팔보의 진동감쇄를 비교하기 위하여 1차와 2차 진동모드들을 위한 PPF 제어기 $K_p(s)$도 설계하였다.

$$K_p(s)=\left[\frac{3.2311\times10^3}{s^2+3.4006s+5.3238\times10^2}+\frac{6.2391\times10^4}{s^2+8.9068s+2.0767\times10^4}\right]$$

$$\times \frac{2\pi \cdot 800}{s+2\pi \cdot 800} \tag{23}$$

여기서, 저대역통과 필터 $2\pi \cdot 800/(s+2\pi \cdot 800)$는 고주

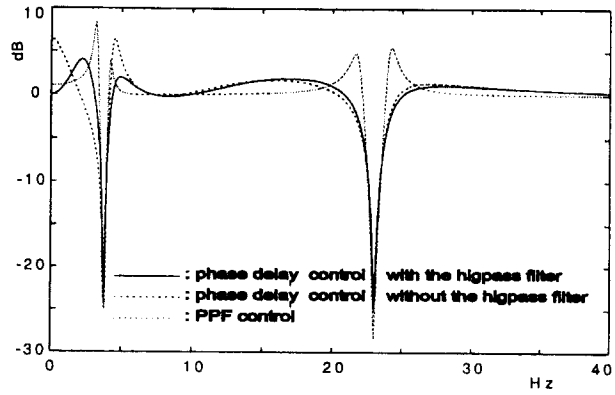


그림 7. 감도전달함수의 주파수 응답.
Fig. 7. The frequency response of the sensitivity function.

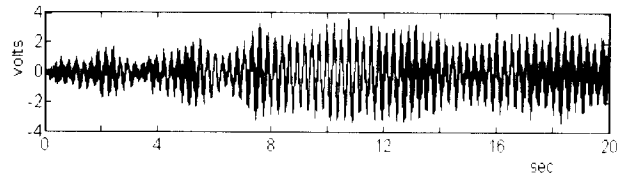
파수의 잡음과 제작된 전기회로 자체의 동특성을 줄이기 위하여 부가되었다. 진동감쇄에 대한 위상지연 제어기와의 비교가 용이하도록 1차와 2차의 고유주파수들에서 제어이득을 40으로 하였다. 이 PPF 제어기와 위상지연 제어기는 OP 증폭기들(operational amplifiers)의 사용에 의한 아날로그 회로로 제작되었다.

설계된 위상지연과 PPF 제어시스템들의 감도함수 주파수 응답들이 그림 7에 있으며 이것들은 1차와 2차 고유주파수들에서 대역제거(band rejection) 필터의 형태를 갖는다. 또한, 그림 5에서 위상지연 제어기는 1차보다 2차 고유주파수 부근에서 위상이 $-90°$ 더 근접하여 1차보다 2차 고유주파수에서 더 넓은 주파수 제거대역을 갖는다. 그림 7에서 감도함수들은 고유주파수 양옆에서 $0dB$보다 큰 피크들을 갖고 있다. 위상지연 제어기에 고대역통과 필터가 없을 때, 고유주파수 양옆의 피크들은 더 높음을 알 수 있다. 또한, PPF 제어시스템의 피크들은 위상지연 제어시스템의 피크들보다 더 높은데, 이것에서 PPF 제어보다 위상지연 제어의 진동감쇄가 더 좋다는 것을 예측할 수 있다.

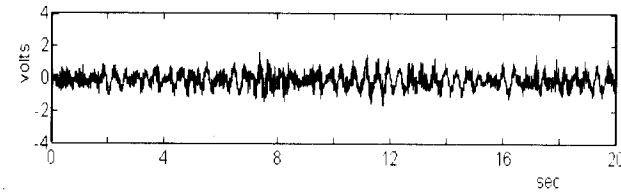
실험에서 1차와 2차 고유주파수의 단일음 신호(single tone)들을 외란 발생기에 인가했을 때, 위상지연 제어기와 PPF 제어기 모두가 발생된 진동을 $20dB$ 이상 감소시킬 수 있었다. $0Hz$에서 $30Hz$까지의 주파수 대역에 분포된 잡음을 외란 발생기에 인가하였을 때, 실험의 결과가 그림 8에 있으며, 이미 예측한 바와 같이 위상지연 제어가 PPF 제어보다 더 좋은 진동감쇄를 보여준다. 또한, 위상지연 제어기에 저대역통과 필터를 도입에 의하여 이 필터가 없는 경우보다 $6dB$이상 진동을 감쇄할 수 있었다.

VI. 결론

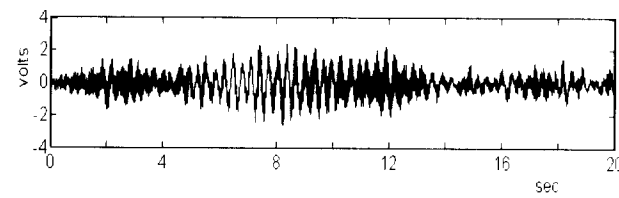
본 논문에서 작은 댐핑비를 갖는 외팔보의 저주파수 진동을 감쇄할 수 있는 위상지연 제어를 제안하였다. 이 위상지연 제어기는 진동모드의 고유주파수에서 미분제어기와 동일한 효과를 얻을 수 있고 아날로그 회로로 간단히 구현될 수 있다. 또한, 제어하지 않는 진동모드들의 불확실성을 반영하여 제어기를 설계할 수 있으며, 제어이득이 큰 경우, PPF 제어시스템의 감도함수는 고유주파수 부근에서 높은 피크들을 갖으나 위상지연 제어에서는 이러한 문제점을 대처할 수 있다. 압전체를 부착한 외팔보



(a) 외란



(b) 위상지연 제어 후의 진동



(c) PPF 제어 후의 진동

그림 8. 외란과 진동제어 결과.
Fig. 8. The disturbance and the controlled output.

에 위상지연 제어를 적용하여 좋은 진동감쇄를 얻을 수 있음을 보였고, PPF 제어 실험과 비교하여 위상지연 제어가 더 나은 진동감쇄을 준다는 것도 확인하였다.

참고문헌

[1] M. J. Balas, "Trends in large space structure control theory. fondest hope, wildest dreams," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 3, pp. 522-535, June, 1985.

[2] T. Bailey and J. E. Hubbard, "Distributed piezo electric-polymer active vibration control of a cantilevered beam," *AIAA Journal of Guidance and Control*, vol. 8, no. 5, pp. 605-611, 1985.

[3] E. H. Anderson and N. W. Hagood, "Simultaneous piezoelectric sensing/actuation: analysis and application to controlled structures," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 174, no. 5, pp. 617-639, 1994.

[4] C.-K. Lee and F. C. Moon, "Modal sensors/ actuators," *ASME Trans. Journal of Applied Mechanics*, vol. 57, pp. 434-441, June, 1990.

[5] R. L. Clark, M. R. Flemming and C. R. Fuller, "Piezo electric actuators for distributed vibration excitation of thin plates : a comparison between theory and experiment," *ASME Trans. Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 115, pp. 332-339, 1993.

[6] E. T. Falangas, J. A. Dworak, and S. Koshigoe, "Controlling plate vibrations using piezoelectric actuators," *IEEE, Control System Magazine*, vol. 15, no. 4, pp. 34-41, 1994.

[7] M. K. Kwak and D. Sciulli, "Fuzzy-logic based vibration suppression control experiments on active structures," *Journal of Sound and Vibration.*, vol. 191, no. 1, pp. 15-28, 1996.

[8] M. J. Balas, "Direct velocity feedback control of large space structures," *J. Guidance and Control*, vol. 2, no. 3, pp. 252-253, 1979.

[9] C. G. Goh and T. K. Caughey, "On the stability problem caused by finite actuator dynamics in the collocated control of large space structures," *Int. J. Control*, vol. 41, no. 3, pp. 787-802, 1985.

[10] J. L. Fanson and T. K. Caughey, "Positive position control of large space structures," *AIAA Journal*, vol. 28, no. 4, pp. 717-724, 1990.

[11] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*, Wiley Interscience, 1990.

[12] R. D. Blevins, *Formulas for Actual Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company, 1979.

[13] R. H. Cannon Jr. and D. E. Rosenthal, "Experiments in control of flexible structures with noncollocated sensors and actuators," *Journal of Guidance*, vol. 7, no. 5, pp. 546-553, 1984.

[14] C. H. Houpis and G. B. Lamont, *Digital Control Systems-theory, hardware, software, second edition*, Mcgraw-Hill, pp. 669-671, 1992.

[15] G. Stein, and M. Athans, "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, no. 2, pp. 105-114, February, 1987.

[16] K. D. Lindner, K. M. Reichard and L. M. Tarkenton, "Zeros of modal models of flexible structures," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 9, pp. 1384-1388, September, 1993.

[17] Piezo System Inc., *Product Catalog*, 1994.

[18] J. K. Hwang, C.-H. Choi, C. K. Song and J. M. Lee, "Identification of a thin plate with bonded piezoelectric actuators/sensors," *Proc. IFAC the 13th* 이론 및 진동제어.*Conference*, San Francisco, pp. 95-100, July, 1996.

[19] T. Soderstrom and P. Stoica, *System Identification*, Prentice-Hall, 1989.

부록 : T_1과 T_2를 구하는 방법

두 고유주파수 ω_1과 ω_2에서 다음을 만족하는 T_1과 T_2를 구한다.

$$\angle[K(j\omega_1)] = -90^\circ \ ,$$
$$\angle[K(j\omega_2)] = -90^\circ \ -360^\circ \qquad (24)$$

여기서, $\angle[\cdot]$는 복소수의 각도를 의미한다. 실험에 사용된 저대역통과 필터 $L(s)$와 고대역통과 필터 $H(s)$에 의한 위상지연은

$$\angle[L(j\omega_1)] + \angle[H(j\omega_1)] = 31.2^\circ \ ,$$
$$\angle[L(j\omega_2)] + \angle(H(j\omega_2)] = -31.1^\circ \qquad (25)$$

이다. T_1과 T_2에 관련된 식들을 (24), (25)과 (16)에서 얻을 수 있다.

$$\angle[2 - j\omega_1 T_1 - \omega_1^2 T_1^2/2]$$
$$+ \angle[2 - j\omega_1 T_2 - \omega_1^2 T_2^2/2] = -60.6^\circ \qquad (26)$$

$$\angle[2 - j\omega_1 T_1 - \omega_1^2 T_1^2/2]$$
$$+ \angle[2 - j\omega_1 T_2 - \omega_1^2 T_2^2/2] = -209.5^\circ \qquad (27)$$

삼각함수의 변환공식을 사용하면,

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2)}{1 - \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}$$

(26)와 (27)에서 T_1과 T_2의 연립 방정식을 얻을 수 있다.

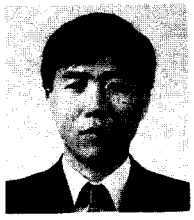
$$\frac{\omega_1 T_2(\omega_1^2 T_1^2/2 - 2) + \omega_1 T_1(\omega_1^2 T_2^2/2 - 2)}{(\omega_1^2 T_1^2/2 - 2)(\omega_1^2 T_2^2/2 - 2) - \omega_1^2 T_1 T_2}$$
$$= \tan(-60.6^\circ \ ) \qquad (28)$$

$$\frac{\omega_2 T_2(\omega_2^2 T_1^2/2 - 2) + \omega_2 T_1(\omega_2^2 T_2^2/2 - 2)}{(\omega_2^2 T_1^2/2 - 2)(\omega_2^2 T_2^2/2 - 2) - \omega_2^2 T_1 T_2}$$
$$= \tan(-209.5^\circ \ ) \qquad (29)$$

비선형 프로그래밍에 의하여 연립방정식 (28)와 (29)에서 T_1과 T_2를 구할 수 있다.

최 종 호

제어 · 자동화 · 시스템공학회 논문지 제 3권 제 2호 참조.



황 진 권

1985년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동대학원 석사(1987), 동대학 박사(1997). 1987~1993 삼성전자 선임연구원. 1995 ~ 현재 서울대학교 제어계측 신기술 연구원. 관심분야는 제어시스템