

〈논 문〉

종동력을 받는 이중진자의 혼돈운동 연구

Chaotic Behavior of a Double Pendulum Subjected to Follower Force

장 안 배* · 이 재 영**

Ahn-Bae Jang and Jae-Yeong Lee

(1997년 2월 14일 접수 ; 1997년 3월 27일 심사완료)

Key Words : Chaos(혼돈), Strange Attractor(기이한 끌개), Fractal(프랙탈), Unpredictability(예측 불가능성), Sensitivity to Initial Conditions(초기조건에 대한 민감성), Dynamic Buckling Loads(동적 좌굴하중), Nonconservative Force(비보존력), Follower Force(종동력), Power Density Spectrum(파워 스펙트럼), Poincare Map(프앙카레 맵), Quasi-Periodic(준주기적)

ABSTRACT

In this study, the dynamic instabilities of a nonlinear elastic system subjected to follower forces are investigated. The two-degree-of-freedom double pendulum model with nonlinear geometry, cubic spring, and linear viscous damping is used for the study. The constant, the initial impact forces acting at the end of the model are considered. The chaotic nature of the system is identified using the standard methods, such as time histories, power density spectrum, and Poincare maps. The responses are chaotic and unpredictable due to the sensitivity to initial conditions. The sensitivities to parameters, such as geometric initial imperfections, magnitude of follower force, direction control constant, and viscous damping, etc., are analysed. Dynamic buckling loads are computed for various parameters, where the loads are changed drastically for the small change of parameters.

1. 서 론

대부분의 자연계 및 공학계들은 비선형계이므로 이들의 거동 또한 비선형으로 기술해야 하지만, 일반적으로 비선형계의 해를 해석적으로 구하기는 불가능하므로 비선형항들을 무시하거나 선형화하여 근사해를 구하는 방법들이 대신 사용되어져 왔다. 그러나, 비선형계에서는 점프(jump)현상, 혼돈운동(chaotic motion)과 같은 선형계에서는 볼 수 없는 거동이 나타나며, 특히 혼돈운동은 초기조건에 대한 극도의 민감성(sensitivity to initial condition)으로

인하여 초기조건이 미소 변화하여도 계는 전혀 다른 거동을 나타낼 수 있기 때문에 근사해법으로 구한 해가 계의 거동을 정확하게 나타낸다고는 볼 수 없다^{(1,2)}}.

근래에 와서 공학계의 혼돈운동을 해석하려는 연구 및 실험들이 수행되고는 있지만, 해석적 연구의 경우에는 매개변수의 변화에 대한 민감성으로 인해 계의 거동 예측이 불가능하게 되며^{(3-5)}}, 실험적 연구인 경우에도 실험장치 및 시편이 필연적으로 갖는 초기불완전성(initial imperfection)과 현실적으로 정확한 초기조건(initial conditions)을 구하는 것 자체가 불가능하므로 계의 정확한 거동을 예측하기란 불가능하다^{(6)}}. 따라서, 거동의 특성 규명과 매개변수들에 대한 민감성 해석 및 안정성 해석 등이 주관심사가 되어 왔다.

*군사과학대학원 무기공학과

**정회원, 군사과학대학원 무기공학과

탄성계의 동적 거동에 관한 연구는 매개변수의 변화에 따른 좌굴하중 및 민감성 해석과 안정성 해석⁽⁷⁾ 등이 주를 이루어 왔다. 비보존력이 작용하는 탄성계의 안정성에 관한 연구는 Bolotin⁽⁸⁾에 의해 집약되었으며, 그 후 Leipholz⁽⁹⁾ 등의 학자에 의해 많은 연구가 이루어 졌다. 비보존력 중 종동력(follower force)을 받는 탄성계의 안정성 해석은 류봉조⁽¹⁰⁾ 등의 로켓 추진력을 받는 외팔보의 안정성에 관한 연구외에도 국내외의 여러 학자들에 의해 연구된 바 있지만, 좌굴 후(post-buckling) 불안정성에 관한 연구외에는 대부분 선형계에 관한 연구들이었다. 비선형 보존 탄성계의 동적 안정성 해석은 Kim⁽¹¹⁾ 등의 학자들에 의해 수행되었으며, 비선형 비보존 탄성계의 안정성에 대한 연구는 최근에 Kounadis⁽¹²⁾에 의해 연구된 바 있다.

구조물의 혼돈운동을 해석하기 위한 연구는 최근 10여 년 간 활발히 연구되었는데, Moon⁽²⁾ 등은 일 단고정 탄성보에 자기력이 작용하는 경우에 대해서, Yagasaki⁽¹³⁾ 등은 양단이 고정된 보에 준주기 기적 기진력이 작용하는 경우의 혼돈운동을, Lee & Symonds^(4,5) 등은 충격력이 작용하는 탄소성보에서 소성변형에 기인하는 혼돈운동을 에너지법을 사용하여 규명하고 계의 장기적 거동(long-term behavior)을 예측하기 위한 연구를 수행하였다. 그러나, 종동력을 받는 비선형 탄성계의 혼돈운동 특성을 규명하기 위한 본격적인 연구나 실험은 시도된 바 없다.

본 연구는 로켓 추진력 등과 같은 종동력을 받는 탄성계에 나타날 수 있는 혼돈운동을 규명하고 혼돈운동의 특성인 초기조건에 대한 민감도중에서도 특히 동적좌굴하중의 매개변수 변화에 대한 민감도를 해석하고자 한다. 이를 위해 기하학적, 재료적 비선형성을 갖는 2-자유도계 이중진자를 모델로 사용하였다. 모델에 작용하는 하중은 시간에 따라 크기가 일정한 하중과 충격하중으로 나누었으며, 하중 작용 방향에 따라 보존력(conservative force)과 종동력으로 각각 나누어 표준적인 방법들을 사용하여 혼돈운동을 규명하고, 매개변수의 변화에 따른 계의 안정성 해석과 위상공간(phase space)에서의 동특성 연구 및 초기조건에 대한 민감성 등의 혼돈운동 특성을 해석하고자 한다.

2. 이중진자의 수학적 모델

2.1 수학적 모델

Fig. 1은 끝단에 하중이 작용하는 탄성 비선형계모

델인 이중진자를 나타내며, 여기서 l 은 무게를 무시할 수 있는 강체로 가정된 봉 AB 와 BC 의 길이를 나타내고, m_1 과 m_2 는 봉의 끝단 B 와 A 에 위치한 집중질량을 각각 나타낸다. ε_1 과 ε_2 는 하중이 작용하기 전에 수직선과 봉 BC , AB 가 이루는 초기각(initial angles)을 의미하며, θ_1 과 θ_2 는 하중이 작용한 후에 각변위(displacement angles)를 각각 의미한다.

P 는 봉 AB 의 끝단 A 에 작용하는 하중이며, 본 연구에서는 시간에 따라 하중의 크기가 변하지 않는 일정하중과 초기충격하중의 두 가지 경우로 나누어 취급하였다.

봉 AB 의 끝단 A 에 작용하는 하중은 봉 AB 와 $n\theta_2$ 의 각도를 이루는데, 여기서 n 은 방향제어상수(direction control constant)로서 $n=1$ 인 경우는 하중이 항상 연직방향으로 작용하는 보존력이며, $n=0$ 인 경우는 하중이 봉 AB 방향으로 작용하는 종동력이 된다.

c_1 과 c_2 는 각각 C , B 에서의 선형 점성감쇠계수(linear viscous damping coefficients)를 나타낸다.

계의 스프링은 비선형 3차 비틀림 스프링으로서, k 는 B , C 에 부착되어 있는 선형 스프링 상수를 나타내고 δ_i , γ_i 는 각각 2, 3차 스프링 상수들을 나타낸다.

2.2 운동방정식

계의 운동에너지를 K , 탄성에너지를 U , 계에 공급된 총 일을 W , 에너지 소산(energy dissipation)을 D 라 하면 계의 운동방정식은 다음과 같다.

(1) 운동에너지(K)

집중질량 m_1 , m_2 가 갖는 운동에너지는 다음과 같

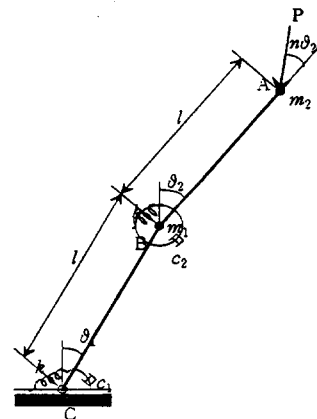


Fig. 1 Mathematical model of double pendulum in deformed state

다.

$$K = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2[2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2] \quad (1)$$

(2) 탄성에너지 (U)

Fig. 1에서 B , C 에 부착되어 있는 스프링은 비선형 3차 비틀림스프링으로 가정되었으며, 스프링이 갖는 복원력에 의한 무차원 비틀림 복원모멘트는 아래의 식과 같다.

Spring C :

$$\frac{M_C}{k} = z_1 + \delta_1 z_1^2 + \gamma_1 z_1^3$$

Spring B :

$$\frac{M_B}{k} = (z_2 - z_1) + \delta_2(z_2 - z_1)^2 + \gamma_2(z_2 - z_1)^3 \quad (2a)$$

여기서, z_i 는 $z_i = \theta_i - \varepsilon_i$ 로서 각변위(θ_i)와 초기각(ε_i)과의 차이각을 나타낸다.

계가 갖는 탄성에너지는 식 (2a)의 복원모멘트를 적분함으로써 식 (2b)와 같이 구해진다.

$$\frac{U}{k} = \int (\frac{M_C}{k} + \frac{M_B}{k}) d\theta \\ = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}\delta_1 z_1^3 + \frac{1}{4}\gamma_1 z_1^4 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2 \\ + \frac{1}{3}\delta_2(z_2 - z_1)^3 + \frac{1}{4}\gamma_2(z_2 - z_1)^4 \quad (2b)$$

(3) 에너지 소산 (D)

Fig. 1의 C 와 B 에 존재하는 감쇠에 의한 감쇠력은 각각 $c_1\dot{\theta}_1$ 과 $c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$ 이며, 감쇠에 의한 에너지 소산은 식 (3)과 같다.

$$D = \int [c_1\dot{\theta}_1 + c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)] d\theta \\ = \int_{t_1}^{t_2} [c_1\dot{\theta}_1^2 + c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2] dt \quad (3)$$

(4) 계에 공급된 일 (W)

봉 AB 의 끝단 A 에 봉 AB 와 $n\theta_2$ 의 각도를 이루며 작용하는 하중에 의해 계에 공급된 일은 다음과 같으며

$$W = \int Pds = \int Pvd\tau = \int_{t_1}^{t_2} (P_x v_x + P_y v_y) dt \\ = p \int_{t_1}^{t_2} \{ \dot{\theta}_1 \sin[\theta_1 - (1-n)\theta_2] + \dot{\theta}_2 \sin n\theta_2 \} dt \quad (4)$$

여기서, $p = Pl/k$ 를 나타낸다.

(5) 운동방정식

감쇠가 포함된 비보존계의 운동방정식을 유도하는데 사용되는 수정된 Lagrange 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \theta_i} = Q_i \quad (5a)$$

여기서, $L = K - U$, F 는 감쇠에 의한 시간당 에너지 손실, Q_i 는 봉 AB 와 $n\theta_2$ 의 각으로 작용하는 하중을 각각 나타내며, F 와 Q_i 는 다음과 같다.

$$F = c_1\dot{\theta}_1^2 + c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad (5b)$$

$$Q_1 = P \sin[\theta_1 - (1-n)\theta_2], \quad Q_2 = p \sin n\theta_2 \quad (5c)$$

식 (1)~(5)를 식 (5a)에 대입하면, $i=1$ 인 경우의 운동방정식은 다음과 같다

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l^2 [\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)] + m_2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \delta_1 z_1^2 + \gamma_1 z_1^3 + 2z_1 \\ - z_2 - \delta_2(z_2 - z_1)^2 - \gamma_2(z_2 - z_1)^3 + c_1 \dot{\theta}_1 - c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \\ - p \sin[\theta_1 - (1-n)\theta_2] = 0 \quad (6)$$

$i=2$ 인 경우의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m_2 l^2 [\ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] + (z_2 - z_1) \\ + \delta_2(z_2 - z_1)^2 + \gamma_2(z_2 - z_1)^3 + c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - p \sin n\theta_2 = 0 \quad (7)$$

식 (6)과 (7)을 무차원화 시키기 위해 사용된 무차원 변수들은 다음과 같다.

$$\theta(\tau) = \vartheta(\tau), \quad \tau = t \sqrt{\frac{k}{m_2 l^2}}, \quad \frac{\partial \theta(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \vartheta(\tau)}{\partial \tau}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vartheta}{d\tau} \sqrt{\frac{k}{m_2 l^2}}, \quad m = \frac{m_1}{m_2}, \quad \zeta_i = \frac{c_i}{l \sqrt{k m_2}} \quad (8)$$

여기서, m 은 질량비(ratio of mass), ζ_i 는 감쇠비(damping ratio)를 의미한다.

식 (8)로부터 $i=1$ 인 경우의 무차원화된 방정식은 아래의 식과 같으며

$$(1+m)\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (z_2 - z_1) \\ + z_1 + \delta_1 z_1^2 + \gamma_1 z_1^3 - \delta_2(z_2 - z_1)^2 - \gamma_2(z_2 - z_1)^3 \\ + (\zeta_1 + \zeta_2)\dot{\theta}_1 - \zeta_2 \dot{\theta}_2 - p \sin[\theta_1 - (1-n)\theta_2] = 0 \quad (9)$$

$i=2$ 인 경우의 무차원화된 운동방정식은 다음의 식과 같다.

$$\ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (z_2 - z_1) \\ + \delta_2(z_2 - z_1)^2 + \gamma_2(z_2 - z_1)^3 + \zeta_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - p \sin n\theta_2 = 0 \quad (10)$$

식 (9), (10)에서 $\dot{\theta}_i \cos(\theta_1 - \theta_2)$, $\dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$

등은 대변형에 기인하는 기하학적 비선형항들이고, $\delta_1 z_1^2$, $\gamma_1 z_1^3$, $\gamma_2 (z_2 - z_1)^3$, $\delta_2 (z_2 - z_1)^2$ 등은 비선형 스프링에 기인하는 재료적 비선형항들로서 혼돈운동의 원인이 된다.

본 연구에서는 식 (9)와 (10)의 수치적분을 위해 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하였다. Reinhall⁽¹⁴⁾ 등은 본래의 미분방정식이 혼돈운동을 포함하고 있지 않더라도 수치적분에 사용된 시간증분이 상대적으로 큰 경우에는 계가 혼돈운동을 나타낼 수 있음을 밝힌 바 있으나, 본 연구의 수치적분에 사용된 시간증분 0.02초는 수치실험 결과 시간증분의 크기가 혼돈운동의 원인이 아님을 알 수 있었으며, 한편 Belytschko⁽¹⁵⁾ 등에 의해 제안된 비선형계의 수치적분에 사용되는 시간증분 기준인 $2/\omega_{max}$ 보다 충분히 작은 값이다. (식 (9), (10)의 선형자유진동계에서 $m=2$ 일 때의 $2/\omega_{max}=1.0925$ 임)

3. 계의 거동해석

3.1 하중의 크기가 일정하게 작용하는 경우

본 절은 작용하중의 크기가 시간에 무관하게 일정한 경우, 계에 발생할 수 있는 혼돈운동을 규명하고

자 한다.

Table 1은 계의 스프링이 2차 비선형 스프링($\delta_i \neq 0$, $\gamma_i=0$)일 때 ε_2 및 ζ_i 를 변화시키면서 계산한 동적좌굴하중(dynamic buckling loads; P_D) 값이다.

Table 1에서 ε_2 가 감소함에 따라 동적좌굴하중은 점점 증가하지만 ε_2 가 -0.034에서 -0.0342로 미소변화함에 따라 동적좌굴하중은 약 2.5~3.5배까지 급격한 도약(jumping)을 하는데, 이는 매개변수의 미소변화에 대한 민감도를 나타내는 혼돈운동의 특성을 보여주는 예이다.

Fig. 2는 작용하중의 크기와 방향의 변화에 대한 거동변화를 나타내는 시간이력과 프앙카레 맵을 나타낸다. Fig. 2(a)에서 작용하중이 종동력(실선)인 경우는 보존력(점선)인 경우 보다 상대적으로 작은 진폭으로 진동하고 있다. 하중이 보존력으로 작용하는 경우, 계의 최종적인 거동형태를 해석하기 위해 수치계산을 만약 80초까지 수행했다면 계는 음(-)의 방향에서 진동하는 것으로 해석되었을 것이며, 100초까지 수행했다면 양(+)의 방향으로 진동하는 것으로 해석되었을 것이다. 이와 같이 계의 거동 형태가 시간에 대해 불규칙적으로 변하기 때문에 최종적인 거동형태 및 계의 장기적 거동의 예측이 불가

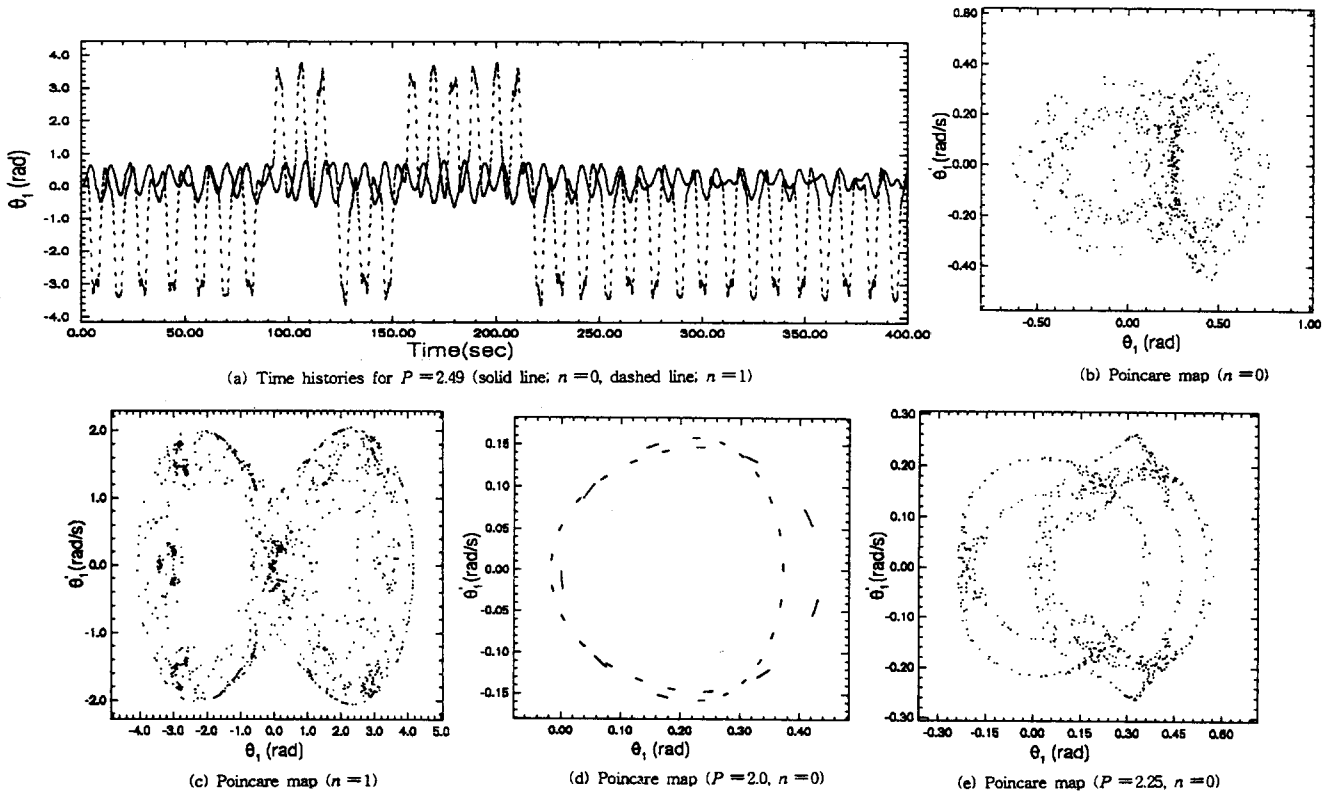


Fig. 2 Time histories and Poincaré maps for $m=2$, $\zeta_i=0$, $\delta_i=\gamma_i=0$, $\varepsilon_1=0.05$, $\varepsilon_2=-0.03$

Table 1 Dynamic buckling loads for P_c with $n=1$, $\gamma_i=0$, $\delta_i=-2.5$, $\delta_2=-0.75$, $m=2$, $\epsilon_1=0.05$

초기 변위각 (ϵ_2)	동적좌굴하중(P_b)			
	ζ_i			
	0.0	0.0001	0.001	0.01
-0.030	0.29147	0.29165	0.29264	0.30137
-0.031	0.29482	0.29495	0.29610	0.30576
-0.0314	0.29622	0.29636	0.29755	0.30764
-0.0315	0.29658	0.29671	0.29792	0.30812
-0.032	0.29839	0.29853	0.29981	0.31063
-0.033	0.30222	0.30238	0.30381	0.31063
-0.034	0.30638	0.30657	0.30819	0.32264
-0.0342	0.83965	0.94969	1.06213	-
-0.0345	0.83805	0.94900	1.06095	-
-0.035	0.83353	0.94789	1.05841	-
-0.036	0.83011	0.94570	1.05509	-

Table 2 Dynamic buckling loads for P_c with $m=2$, $\epsilon_1=0.03$, $\delta_i=0$, $\gamma_i=-0.01$

초기 변위각 (ϵ_2)	동적좌굴하중(P_b)			
	$n=1$		$n=0$	
	ζ_i		ζ_i	
	0	0.0001	0	0.0001
-0.03	11.567	11.681	11.651	11.635
-0.028	11.562	11.684	11.648	11.617
-0.024	11.577	11.719	11.649	11.647
-0.02	11.568	11.714	11.615	11.610
-0.018	11.566	11.709	11.658	11.653
-0.014	11.567	11.711	11.659	11.668
-0.01	11.569	11.699	11.658	11.663
-0.008	11.564	11.694	11.658	11.663
-0.004	11.563	11.693	11.664	11.732
0	11.649	11.691	16.497	16.561
0.01	11.644	11.682	17.058	17.118
0.02	11.640	11.681	17.550	17.531
0.03	11.657	11.684	18.248	18.018

능함을 알 수 있다. 따라서 혼돈운동의 장기적 특성을 해석하기 위해서는 위상공간에 동특성을 나타내는 프랑카레 맵 등을 이용하는 것이 바람직하다.

Figs. 2(b), (c)는 각각 Fig. 2(a)의 실선과 점선에 해당되는 프랑카레 맵들로 제한된 영역내에 분포된 점들은 계가 혼돈운동을 나타냄을 뜻한다. 미소변화하는 중동력에 대한 프랑카레 맵들이 Figs. 2(d), (e)에 나타나 있다. Fig. 2(d)는 $P=2.0$ 인 경우로서 프랑카레 맵 상에 불연속적인 짧은 선들이 2개의 궤적을 그리고 있는데, 이는 계의 장기적 거동이 준주기적(quasi-periodic)임을 의미하는 것이다. 그러나 Fig. 2(e)의 $P=2.25$ 인 경우에 대한 프랑카레 맵의 어트랙터는 프랙탈 구조를 나타내고 있는데, 이는 작용하중이 미소 증가함에 따라 계의 거동이 준주기적에서 혼돈운동으로 변화하였음을 의미한다. 따라서 매개변수의 미소변화에 대해 거동이 혼돈운동에서 준주기적 거동으로, 준주기적 거동에서 혼돈운동으로 불규칙적으로 변함을 알 수 있는데 이는 매개변수의 변화에 대한 민감성과 장기적 거동의 예측 불가능성을 나타내는 예이다.

Table 2는 하중의 크기가 일정하고 계의 스프링이 3차($\delta_i=0$, $\gamma_i \neq 0$) 비선형 스프링일 때, 계의 매개변수(n , ϵ_2 , ζ_i)들을 변화시키면서 구한 동적좌굴하중 값이다. Table 2에서 하중이 보존력으로 작용하는 경우($n=1$)에는 ϵ_2 의 미소변화에 대해 동적 좌굴하

중도 미소변화하지만, 하중이 중동력으로 작용하는 경우($n=0$)에는 ϵ_2 값의 미소변화에 대해 동적좌굴하중도 미소변화하다가 ϵ_2 값이 -0.004 에서 0 으로 미소하게 변하는 순간 동적좌굴하중이 급격히 변하였다. 따라서 Table 1의 경우와 마찬가지로 매개변수 변화에 대한 거동의 예측 불가능성을 나타내고 있다.

Figs. 3, 4는 동적좌굴하중보다 큰 하중이 작용할 때 계가 안정성을 잃고 발산하는 것을 나타낸 것으로, Fig. 3은 하중이 중동력으로 작용하는 경우로서 동적좌굴하중이 16.497(실선)일 때 작용하중이 $P=16.4971$ (점선)로 동적좌굴하중 보다 미소(0.0001)하게 크게 작용할 때, 약 250초까지는 실선의 경우와 거동이 거의 일치하지만 그 이후부터 급격히 진폭이 커지면서 계는 안정성을 잃고 양(+)의 방향으로 발산한다.

Fig. 4는 하중이 보존력으로 작용하는 경우로서 하중이 $P=11.567$ 로 동적좌굴하중(11.566)에 비해 미소(0.001)하게 크지만 계는 안정성을 잃고 발산한다. 하지만 Fig. 3과는 달리 각각의 거동은 초기부터 전혀 다른 양상을 보이며 초기에 안정성을 잃고 음

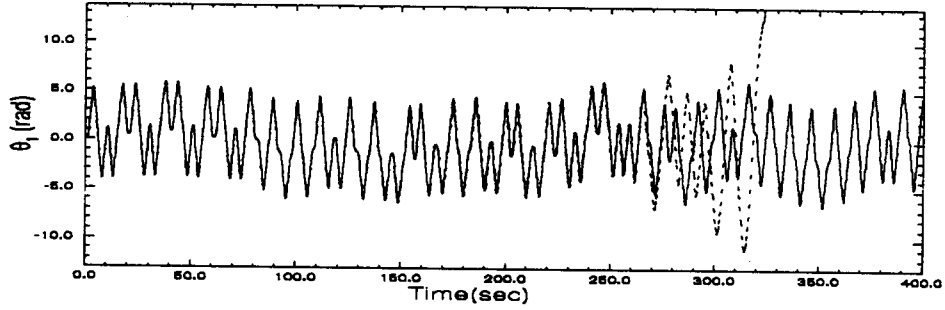


Fig. 3 Time histories for $n=0, m=2, \delta_i=0, \gamma_i=-0.01, \zeta_i=0, \varepsilon_1=0.03, \varepsilon_2=0.0$; $P_D=16.497$ (solid line ; $P=16.497$, dashed line ; $P=16.4971$)

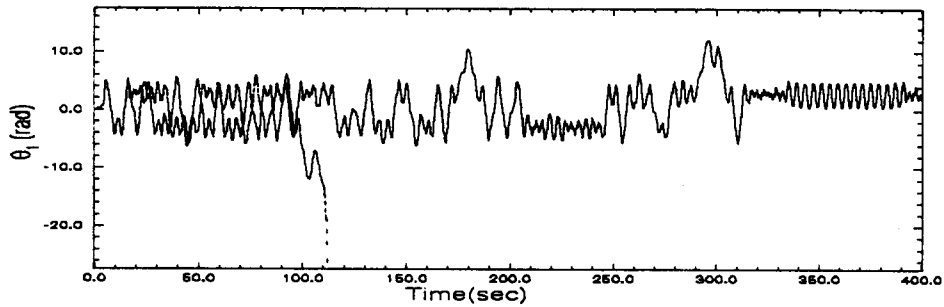
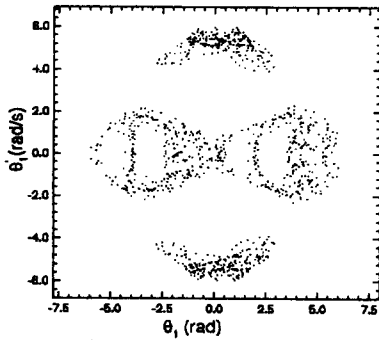
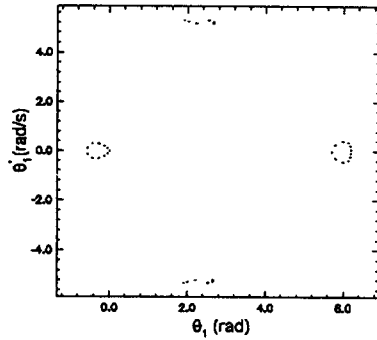


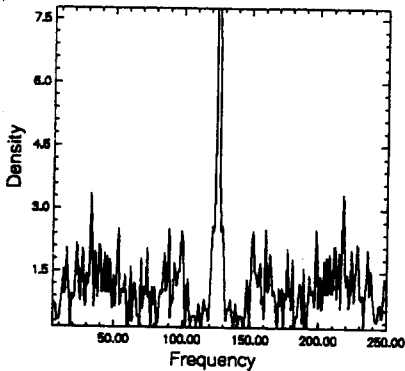
Fig. 4 Time histories for $n=1, m=2, \delta_i=0, \gamma_i=-0.01, \zeta_i=0, \varepsilon_1=0.03, \varepsilon_2=-0.018$; $P_D=11.566$ (solid line ; $P=11.566$, dashed line ; $P=11.567$)



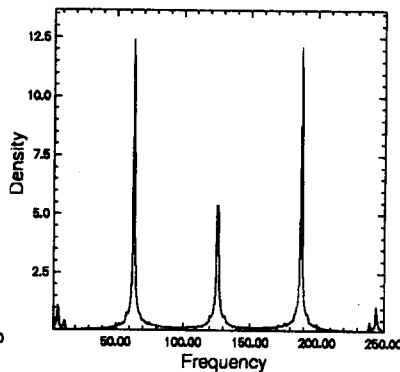
(a) Poincaré map ($P=6.5$)



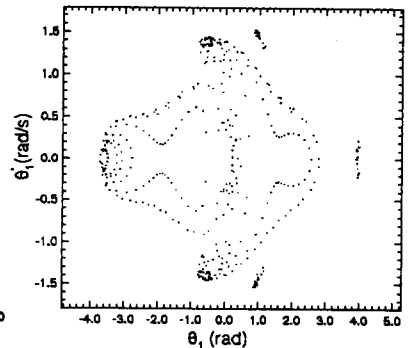
(b) Poincaré map ($P=7.5$)



(c) P.D.S. ($P=6.5$)



(d) P.D.S. ($P=7.5$)



(e) Poincaré map ($P=8.5$)

Fig. 5 Poincaré maps and Power density spectrum for $n=0, m=2, \zeta_i=0, \delta_i=0, \gamma_i=-0.01, \varepsilon_1=0.03, \varepsilon_2=-0.02$; $P_D=11.615$

(-)의 방향으로 발산한다.

Figs. 3과 4의 시간이력들로부터 알 수 있는 바와 같이 계의 거동은 매우 복잡하고 불규칙하며 전혀 예측이 불가능하다. 이와 같이 시간에 관계없이 크기가 일정한 하중이 작용하는 계에서 불규칙하며 비주기적 응답이 나타나는 것은 혼돈운동의 대표적인 특성이다.

Fig. 5는 크기가 일정한 하중이 중동력으로 작용할 때, 하중의 크기 변화에 따른 계의 장기적 거동 해석을 위한 프앙카레 맵과 power density spectrum이다. Fig. 5(a)는 $P=6.5$ 인 경우로서 프앙카레 맵 상의 점들은 기하학적 프랙탈 구조를 갖고 있으며 이는 계의 거동이 혼돈운동임을 나타내며, 넓은 밴드(band)의 주파수 영역을 갖는 Fig. 5(c)의 power density spectrum으로부터도 이를 알 수 있다. Fig. 5(b)는 $P=7.5$ 인 경우로, 프앙카레 맵 상의 유한한 점들은 계의 거동이 주기적임을 나타내며 따라서 Fig. 5(d)의 power density spectrum도 몇 개의 뚜렷한 피크(peak)만 나타내고 있다.

Fig. 5(e)는 $P=8.5$ 인 경우로, 프앙카레 맵 상의

Table 3 Dynamic buckling loads for P_i with $m=2$, $\delta_i=-0$, $\gamma_i=-0.01$, $\epsilon_1=0.03$

초기 변위각 (ϵ_2)	동적좌굴하중 (P_D)					
	$n=1$			$n=0$		
	ζ_i			ζ_i		
	0	0.0001	0.01	0	0.001	0.01
-0.04	121	121	125	194	197	201
-0.03	126	132	130	201	205	211
-0.02	132	136	136	210	212	221
-0.01	139	139	142	222	227	233
0	148	148	152	239	240	248
0.01	160	160	164	255	261	267
0.02	178	178	182	285	289	294
0.03	212	212	217	335	339	348
0.04	314	314	319	1353	1359	1329
0.05	200	201	205	336	341	349

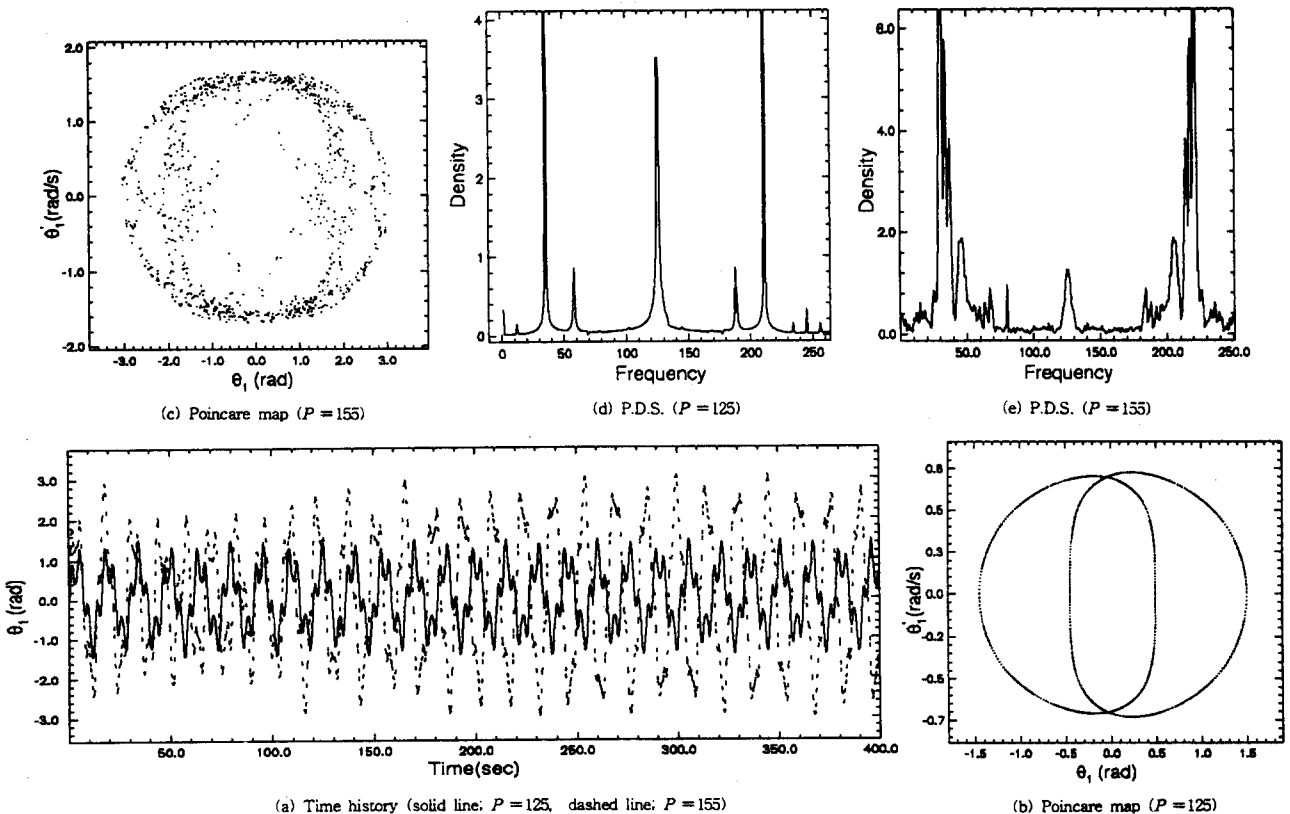


Fig. 6 Time histories, Poincaré maps and Power density spectrum for $n=0$, $\zeta_i=0$, $m=2$, $\delta_i=0$, $\gamma_i=-0.01$, $\epsilon_1=0.03$, $\epsilon_2=-0.02$; $P_D=210.0$

chaos attractor로 프랙탈 구조를 나타내며, $\theta_1=1$, 4 부근에서 제한된 영역을 벗어난 점들이 산발적으로 나타나는데, 이러한 점들은 시간이 경과함에 따라 어느 순간 거동형태가 갑자기 변하기 때문에 나타나는 점들이다.

3.2 충격하중으로 작용하는 경우

본 절에서는 하중이 초기에 충격력으로 작용하는 경우에 대한 거동을 해석하고자 하며 여기서 하중의 작용시간은 0.5초이다.

충격하중이 작용할 때 매개변수 변화에 대한 동적좌굴하중이 Table 3에 계산되어 있다.

$n=1$ 인 경우, 동적좌굴하중은 ε_2 가 $-0.04 \sim 0.03$ 까지는 규칙적으로 증가하지만 0.03에서 0.04로 변함에 따라 상대적으로 크게 증가하고, 다시 0.04에서 0.05로 변함에 따라 상대적으로 크게 감소한다.

$n=0$ 인 경우, 동적좌굴하중은 $n=1$ 인 경우와 유사한 양상을 보이지만 $n=1$ 의 경우에 비하여 크며, ε 가 0.03에서 0.04로, 0.04에서 0.05로 미소 변함에 따라 동적좌굴하중이 급격히 증가 및 감소하고 있다. 한편, ξ 값의 변화에 대해 동적좌굴하중은 거의 비슷한 값을 나타내고 있다.

이상에서 계의 동적좌굴하중은 어떤 매개변수의 미소변화에 대해서는 민감하게 반응하는 반면 어떤 매개변수의 변화에 대해서는 민감도를 나타내지 않음을 알 수 있다.

Fig. 6은 충격하중이 종동력으로 작용할 때, 하중의 크기 변화에 따른 계의 거동변화를 알아보기 위한 그림들로서 Fig. 6(a)와 6(b), 6(c)와 6(d), 6(e)는 각각 시간이력과 프랑카레 맵과 power density spectrum을 나타낸다.

Fig. 6(a)에서 $P=125$ (실선)는 $P=155$ (점선)인 경우에 비해 상대적으로 작은 진폭을 나타내고, 각각의 거동은 초기부터 전혀 다른 양상을 나타낸다. Fig. 6(b)는 $P=125$ 인 경우로 프랑카레 맵 상의 2개의 폐곡선을 이루고 있는데 이는 계의 거동이 준주기적임을 나타내며 Fig. 6(d)의 power density spectrum도 뚜렷이 구별되는 몇 개의 피크만 나타내고 있다. Fig. 6(c)는 $P=155$ 인 경우로 프랑카레 맵 상의 제한된 영역에 분포된 점들은 계의 거동이 혼돈 운동임을 나타내며 넓은 밴드의 주파수 영역을 갖는 Fig. 6(e)의 power density spectrum으로 부터도 이를 알 수 있다.

Fig. 6으로부터 매개변수의 변화에 대해 거동이 준주기적 거동에서 혼돈운동으로 불규칙하게 변함을

알 수 있으며 이는 매개변수에 대한 거동의 예측 불가능성을 나타내는 예들이다.

4. 결 론

본 연구는 끝단에 하중이 작용하는 탄성계를 기하학적, 재료적 비선형성을 갖는 2-자유도계 이중진자(double pendulum)로 모델링하여, 이 때 나타날 수 있는 혼돈운동을 해석하였다.

계는 비선형 스프링에 기인하는 재료적 비선형항들과 대변형(large deformation)에 기인하는 기하학적 비선형항들을 포함하고 있으며, 이러한 비선형항들은 혼돈운동을 발생시키는 원인이 되고 있다.

계에 작용하는 하중은 시간의 변화에 관계없이 일정한 경우와 초기 충격력으로 작용하는 경우로 구분하였으며, 작용방향에 따라서는 보존력과 종동력으로 나누어 연구하였다.

여러 매개변수들을 변화시키면서 수치해석을 통해 구한 동적좌굴하중은 매개변수의 미소변화에 대하여 불규칙적이며 예측 불가능한 양상을 보이는데 특히, 어느 순간 급격하게 도약(jumping)하거나 감소하는 현상 등을 발견할 수 있었다.

한편, 동적좌굴하중보다 큰 하중이 계에 작용하는 경우에 계는 안정성을 잃고 발산했다.

시간 영역이나 위상공간, 주파수 영역에서 계의 거동을 해석하는 과정에서 초기조건에 대한 민감성 뿐만 아니라 계의 장기적 거동의 예측 불가능성(unpredictability) 및 strange attractor 등과 같은 혼돈운동의 특성들이 나타났다. 특히 초기조건에 대한 극도의 민감도로 인하여 매개변수가 미소변화함에 따라 동적좌굴하중이 급격히 변함을 알 수 있었는데 이는 끝단에 하중이 작용하는 비선형계의 설계 및 해석시에 주의를 기울여야 할 사항이다.

참고문헌

- (1) Moon, F.C., 1987, Chaotic Vibrations, Wiley, New York.
- (2) Moon, F.C., and Shaw, S.T., 1983, "Chaotic Vibrations of a Beam with Nonlinear Boundary Conditions," Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 18, pp. 465~477.
- (3) Dowell, E.H., 1984, "Observation and Evolution of Chaos for an Autonomous Systems," ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 51, pp. 664~673.

- (4) Lee, J-Y, Symonds, P.S., and Borino, G., 1992, "Chaotic Response of a 2DOF Elastic-Plastic Beam Model to Short Pulse Loading," ASME J. of Applied Mechanics, pp. 711~721.
- (5) Lee, J-Y, and Symonds, P.S., 1992, "Extended Energy Approach to Chaotic Elastic-Plastic Response to Impulsive Loading," Int. J. Mech. Sci., Vol. 34, pp. 139~157.
- (6) Moon, F.C., and Poddar, B., 1988, "Chaotic Motion of an Elastic-Plastic Beam," ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 185~189.
- (7) Herrmann, G., and Bungay, R.W., 1964, "On the Stability of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces," ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 35, pp. 435~440.
- (8) Bolotin, V.V., 1963, Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, Oxford.
- (9) Leipholz, H., 1980, Stability of Elastic Systems, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (10) 류봉조, 1993, "로켓 추진력을 받는 외팔보의 동적 안정성에 관한 수치 및 실험적 연구," 대한기계학회논문집, 제 17권, pp. 2762~2772.
- (11) Kim, I.S., and Park, Y.P., 1993, "Experiments on the Elastic Cantilever Subjected to a Rocket Follower force," Proc. of Asia-Pacific Vibration Conference '93, Kitakyushu, Japan.
- (12) Kounadis, A.N., Avraam, T., and Mallis, J., 1992, "On the Reliability of Classical Divergence Instability Analyses of Ziegler's Nonconservative Model," Computer Methods in Appl. Mech. and Engng. 95, pp. 317~330.
- (13) Yagasaki, K., 1992, "Chaotic Dynamics of a Quasi-Periodically Forced Beam," ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 59, pp. 161~167.
- (14) Reinhall, P.G., Caughey, T.K., and Storti, D.W., 1989, "Order and Chaos in a Discrete Duffing Oscillator; Implications on Numerical Integration," ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 56, pp. 162~166.
- (15) Belytschko, T., Holmes, N., and Mullen, R., 1975, "Explicit Integration Stability, Solution Properties, Cost, in Finite Element Analysis of Transient Nonlinear Structural Behavior," ASME, New York, AMD-Vol. 14, pp. 1~22.