

원추형 액막분열 해석에 의한 액적 크기 예측

Prediction of drop size by analysis of conical liquid sheet breakup

윤 석 주*, 조 대 진**

S. J. Yoon, D. J. Cho

ABSTRACT

A study has been carried out on the instability of a conical liquid sheet by using the linear instability theory. Various analytical methods using the Kelvin-Helmholtz instability theory were tried to examine the wave growth on cylindrical liquid sheets. Cylindrical liquid sheets were extended to the case with the conical sheets. Perturbations due to tangential motion as well as longitudinal one were taken into account. And it was assumed the the breakup occurs when amplitude ratio exceeds $\exp(12)$, drop sizes were predicted only by theoretical approach. The predicted drop size agreed well with the measured Sauter mean diameter, D_{32} .

주요기술용어 : Conical liquid sheet (원추형 액막), Linear theory (선형이론),
Kelvin-Helmholtz instability (Kelvin-Helmholtz 불안정성),
Maximum growth rate(최대성장률)

기 호 설 명

a : 분열지점에서 액막의 공기코어 반경

 d_G : 이론 액적 크기 d_T : 원통형 액주의 직경

h : 원통형 액막의 두께

 h_i : i번째 액막의 두께 h_0 : 초기 액막 두께k : 축방향 파수($2\pi/\lambda, m^{-1}$) k_{max} : 최대성장률을 가진 축방향 교란의 파수 k_T : 합성교란의 파수

$$\left(k_T = \sqrt{k_{max}^2 + n^2 \frac{m\sigma}{a^2}} \right)$$

n : 접선방향 파수

 R_{oc} : 초기의 공기 코어 반경 r_i : i번째 액막의 공기 코어 반경 T_i : 진폭비(η_i / η_{i-1})

U : 노즐 출구에서의 축방향 속도성분

 $V(n)$: i번째 액막의 접선 속도 성분 V_0 : 노즐 출구에서의 접선방향 속도성분 x_i : i번째 액막의 x방향 거리 Δt : 시간 간격(충분히 작게 설정) ϕ_i : 교란 퍼텐셜 η_i : 분열지점에서의 액막의 반경방향 변위 η_1, η_2 : 바깥쪽 및 안쪽 경계면의 변위 α, β : η_1, η_2 의 진폭 ρ_G, ρ_L : 기체 및 액체의 밀도 θ_T : 이론 분무각 σ : 표면장력

* 정회원, 전북대 기계공학과

** 정회원, 전북대 대학원

- : 교란의 성장률(s^{-1})
- θ_{max} : 축방향 교란의 최대성장률
- $\theta_{max max}$: 합성교란의 최대성장률
- (x, r, θ) : 원통 좌표계

하첨자

- 0 : 액체상
- 1 : 액막 안쪽의 기체
- 2 : 액막 바깥쪽의 기체

1. 서 론

압력식 스웰 노즐을 통해 액체를 미세한 분무로 변환시키는 기본 원리는 액막의 면적을 증가시킴으로써 불안정한 상태를 조장하여 분열시키는 것이다.

지금까지 대부분의 연구들은 액막의 분열을 기체와 액체의 접촉면에서의 불안정 현상과 연관시키려 노력해 왔다. 그들은 접촉면에서의 파동에 주로 관심을 두었는데 이러한 파동의 진폭이 성장하여 어떤 임계값에 도달할 때 액막은 환형 띠의 형태로 떨어져 나가게 되며 표면장력의 작용으로 급격히 원통형 액주로 수축된다. 이 액주는 다시 varicose 형태의 분열 과정을 통해 여러 액적으로 분열된다.

York 등⁽¹⁾은 평판형 액막의 분열 기구를 이론적, 실험적으로 연구하였는데 연속상과 불연속상의 경계면에서의 불안정성과 파동이 액막을 액적으로 분산시키는 주요 인자라 결론지었다. 그들은 또 최대 성장률을 가진 파의 파장은 주위 기체 밀도에 역비례함을 찾아내었다. 또 이들은 무한 평판형 액막의 경우를 스웰 노즐로부터 분출되는 원추형 액막에 적용하였으나 실제 실험 데이터와는 일치하지 않았으며 단지 정성적인 경향만 얻어낼 수 있었다.

Squire⁽²⁾는 Lamb⁽³⁾가 수립한 방법을 적용하여 불안정성을 통한 파의 성장을 연구하였다. 그는 얇은 액막에 나타나는 불안정성의 정도를 살펴볼 때 축대칭파보다 비대칭파가 크다는 것을 주지하고 연구를 수행하였는데 가장

불안정한 파의 파장은 액체의 표면장력에 비해하고 주위 공기의 밀도와 연료의 압력(액막 속도의 제곱에 비해)에 반비례한다고 결론지었다.

Dombrowski 등⁽⁴⁾은 주위 기체의 밀도를 변화시키면서 평판형 액막의 안정성과 분열 현상을 연구하고 Squire⁽²⁾와 Hagerty 등⁽⁵⁾의 이론에 기초한 액적 크기 계산 모델을 제시하였다. 그들은 이 연구를 통해 주위 기체의 밀도가 증가함에 따라 액막이 빨리 분열되며 파장 또한 감소함을 밝혔다. Dombrowski 등⁽⁶⁾은 액막의 두께가 하류로 내려감에 따라 감소하는 경우를 고려하여 액막의 두께가 감소함에 따라 교란의 최대 성장률과 그에 상응하는 파수가 증가한다는 것을 밝혀 냈다.

Crapper 등⁽⁷⁾은 원통형 액막에 Kelvin-Helmholtz 불안정성 이론을 적용하여 공기코어의 반경, 액막두께, 주위 기체 압력 등을 변화시켰을 때 불안정성과 파의 거동을 해석하였다. Dumouchel 등⁽⁸⁾은 Crapper 등⁽⁷⁾의 연구를 확장하여 압력식 스웰 노즐에 적용하였는데 원추막의 회전속도 성분과 축방향 속도 성분에 의한 파가 중첩되어 액막에 나타난다고 가정하여 해석하였으며 Dombrowski 등⁽⁶⁾의 이론을 적용하여 액적 크기 계산 모델을 개발하고 액적 크기를 예측, 실험 데이터와 비교하였다. Cousin 등⁽⁹⁾은 노즐 내부유동 해석과 더불어 선형이론, MEF이론을 조합하여 압력식 스웰 노즐의 분무 특성을 예측하는 방법을 제시하고 이 모델이 실험 데이터와 잘 일치함을 보였다.

최근 각종 측정기기 발달로 인해 과거에는 측정이 어려웠던 지점에서의 계측이 가능해짐에 따라 분무특성에 대한 자세한 정보가 다양하게 제시되고 있다. 그러나 대부분의 연구방향은 분무하류에서의 액적 크기와 작동 조건, 연료 및 주위 기체의 물성치, 노즐의 기하학적 특성 등을 연계시키려는 것이 대부분이며, 미립화에 관련된 인자는 매우 다양하고 그 인자들의 역할이 정확히 알려져 있지 않기 때문에 실제 분무를 모델링 하는 연구는 미흡한 편이다. 따라서 본 연구에서는 압력식 스웰 노즐로

부터 분출되는 원주형 액막의 불안정성과 분열과정을 이론적으로 살펴보았다. 이를 위하여 두 가지 속도성분을 가진 원통형 액막에서의 불안정성을 해석하고 이를 원주형 액막에 적용하였다. 또한 원주형 액막으로부터 분열된 원형 액주는 Rayleigh분열기구에 의해 액적으로 분열된다고 가정하여 액적 크기를 예측하는 방법을 제시하였다.

2. 원통형 액막의 불안정성

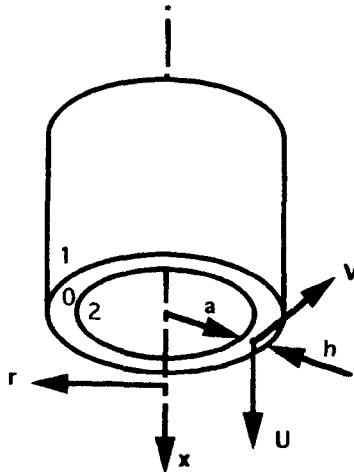


Fig.1 Undisturbed cylindrical liquid system

Crapper등⁷⁾은 축방향 속도 성분만을 고려한 원통형 액막표면의 불안정 파에 대한 해석을 수행하였다. 본 연구에서는 접선방향 속도 성분을 포함시켜 해석을 확장하였다. 그리고 액막의 속도는 충분히 크며 두께는 충분히 얇다고 가정함으로써 표면장력에 의하여 발생하는 액막의 수축현상 이전에 액막은 분열된다고 하였다.(Rayleigh instability)

Fig. 1과 같이 공기코어 반경 a, 액막 두께 h인 원통형 액막이 축방향 속도 U, 접선방향 속도 V로 정지상태의 공기 속을 유동한다고 가정한다.

두 가지 속도 성분으로 인해 두 방향의 서로 수직인 교란이 발생한다고 생각하고 이들을 각각의 파수 k, n으로 정의하면 액막 표면에서

발생하는 교란은 이 두 교란의 합성된 형태로 볼 수 있다.

액막에 가해지는 모든 파들 중 일부는 성장하며 나머지는 소멸하게 되는데, 액막 표면에서 액막에 가해지는 모든 파들 중 가장 빠르게 성장하는 파가 액막의 분열을 주도한다고 가정하고 초기에 정상상태인 액막에 임의의 작은 교란이 가해진다고 가정한다. 또한 이 교란으로 인한 비정상상태의 유동은 비회전 유동이라 하고 이에 수반되는 교란 퍼텐셜을 ϕ 라 하면 각 상에서의 연속방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi_i = 0 \tag{1}$$

여기서 i는 각 상을 표시한다(Fig. 2 참조).

$\phi_i = R(r) \exp[i(kx + n\theta - \omega t)]$ 라 하면 식 (1)은 다시 다음과 같은 Bessel방정식의 형태로 된다.

$$(kr)^2 \frac{\partial^2}{\partial (kr)^2} + kr \frac{\partial R(r)}{\partial (kr)} - (n^2 + (kr)^2)R(r) = 0 \tag{2}$$

식 (2)로부터 각 상의 퍼텐셜은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A_1 K_n(kr) \exp[i(kx + n\theta - \omega t)] \\ \phi_0 &= [A_0 I_n(kr) + B_0 K_n(kr)] \\ &\quad \exp[i(kx + n\theta - \omega t)] \end{aligned} \tag{3}$$

$$\phi_2 = A_2 I_n(kr) \exp[i(kx + n\theta - \omega t)]$$

여기서 $I_n(kr)$, $K_n(kr)$ 은 수정 n차 Bessel 함수이며 $r \rightarrow \infty$ 에 따라 $I_n(kr) \rightarrow \infty$ 이며 $r \rightarrow 0$ 에 따라 $K_n(kr) \rightarrow \infty$ 이므로 이에 관계되는 상수들은 제거하였다.

안쪽 면과 바깥쪽 면의 변위는 각각 다음으로 주어진다.

$$\eta_1 = \alpha \exp[i(kx + n\theta - \omega t)] \tag{4-a}$$

$$\eta_2 = \beta \exp[i(kx + n\theta - \omega t)] \tag{4-b}$$

식 (3)에서 상수 A_0, B_0, A_1, A_2 은 운동학적 경계조건 및 동역학적 경계조건을 적용

하여 결정한다.

2.1 경계조건

2.1.1 운동학적 경계조건

기액 접촉면을 횡단하여 흘러나가는 질량유동은 없어야 하므로 각 상에 대해

$r = a$ 에서

기체

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

액체

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{V(r)}{r} \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

$r = a+h$ 에서

기체

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

액체

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{V(r)}{r} \frac{\partial \eta_2}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

와 같은 조건을 만족해야 한다.

식 (5)와 (7)로부터 상수 A_1, A_2 를 결정할 수 있다.

$$A_1 = -i \frac{\sigma \omega}{kK_n^{l+}}$$

$$A_2 = -i \frac{\beta \omega}{kK_n^{l-}}$$

여기서 상첨자 +, -는 각각 $r=a+h, r=a$ 에서의 값을 나타낸다. 식 (6)과 (8)로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$-i\sigma\omega + iakU + iam \frac{V^+}{a+h} - (A_0 k l_n^{l+} + A_1 k K_n^{l+}) = 0 \quad (9)$$

$$-i\beta\omega + i\beta kU + i\beta m \frac{V^-}{a} - (A_0 k l_n^{l-} + A_1 k K_n^{l-}) = 0 \quad (10)$$

식 (9)와 (10)을 연립하여 상수 A_0, B_0 를 구해 보면 다음과 같다.

$$A_0 = i\Delta [K_n^{l-} \alpha (W^+ - \omega) - K_n^{l+} \beta (W^- - \omega)]$$

$$B_0 = -i\Delta [I_n^{l-} \alpha (W^+ - \omega) - I_n^{l+} \beta (W^- - \omega)]$$

상수 A_0, B_0, A_1, A_2 를 대입하여 각 상의 교란 퍼텐셜을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\phi_1 = -\frac{i\sigma\omega}{kK_n^{l+}} K_n(kr) \exp[i(kx + n\theta - \omega t)] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \phi_0 = i\Delta [& (W^+ - \omega) (K_n^{l-} I_n(kr) - I_n^{l-} K_n(kr))a \\ & + (W^- - \omega) (I_n^{l+} K_n(kr) - K_n^{l+} I_n(kr))\beta] \\ & \exp[i(kx + n\theta - \omega t)] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\phi_2 = -\frac{i\sigma\omega}{kK_n^{l-}} I_n(kr) \exp[i(kx + n\theta - \omega t)] \quad (13)$$

2.1.2 동역학적 경계조건

기액 접촉면에서 수직응력의 차는 표면장력에 기인한다. 즉 표면 근방의 액체의 압력은 액체 바깥쪽의 압력보다 σ/R 만큼 더 크다. 각각의 기액 접촉면에서 Bernoulli정리를 적용하면 다음 두 식을 얻을 수 있다.

$r = a + h$ 에서

$$\begin{aligned} \rho_L \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{V(r)}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \right)_{a+h} - \rho_G \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ = \sigma \left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} + \frac{\eta_1 + \partial^2 \eta_1 / \partial \theta^2}{(a+h)^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$r = a$ 에서

$$\begin{aligned} \rho_G \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \rho_L \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{V(r)}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \right)_a \\ = \sigma \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} + \frac{\eta_2 + \partial^2 \eta_2 / \partial \theta^2}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

식 (14), (15)에 식 (11), (12), (13)을 대입하면 다음의 두 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\rho_G \frac{\omega^2 K_n^+}{k K_n^{I^+}} + \alpha \left(k^2 - \frac{1-n^2}{(a+h)^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \rho_L \Delta (W^+ - \omega)^2 (K_n^{I^-} I_n^+ - I_n^{I^-} K_n^+) \right) \\ & - \beta \rho_L \Delta (W^+ - \omega) (W^- - \omega) \\ & (I_n^{I^+} K_n^+ - K_n^{I^+} I_n^+) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \beta (\rho_L \Delta (W^+ - \omega)^2 (I_n^{I^+} K_n^- - K_n^{I^+} I_n^-) \\ & \quad - \rho_G \frac{\omega^2 I_n^-}{k I_n^{I^-}} + \alpha \left(k^2 - \frac{1-n^2}{a^2} \right)) \\ & - \alpha \rho_L \Delta (W^+ - \omega) (W^- - \omega) \\ & (K_n^{I^-} I_n^- - I_n^{I^-} K_n^-) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

식 (16), (17)로부터 α , β 를 소거하면 ω 에 대한 4차식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \omega^4 [-\rho_L (PQ - RS)] \\ & + \frac{\rho_L \rho_G}{k} \left(\frac{I_n^-}{I_n^{I^-}} P - \frac{K_n^+}{K_n^{I^+}} Q \right) - \rho_G^2 \frac{K_n^+}{K_n^{I^+}} \frac{I_n^-}{I_n^{I^-}} \\ & + \omega^3 [2\rho_L^2 (W^+ + W^-) (PQ - RS) \\ & \quad - \frac{2\rho_L \rho_G}{k} \left(W^- \frac{K_n^+}{K_n^{I^+}} Q + W^+ \frac{I_n^-}{I_n^{I^-}} P \right)] \\ & + \omega^2 [-\rho_L^2 (W^{+2} + W^{-2} + 4W^+ W^-) (PQ - RS) \\ & \quad + \rho_L \alpha \left(k^2 - \frac{1-n^2}{(a+h)^2} \right) Q - \left(k^2 - \frac{1-n^2}{a^2} \right) P \\ & \quad + \rho_L \alpha \left(k^2 - \frac{1-n^2}{(a+h)^2} \right) Q - \left(k^2 - \frac{1-n^2}{a^2} \right) P \\ & \quad + \frac{\rho_L \rho_G}{k} \left(W^{-2} \frac{K_n^+}{K_n^{I^+}} Q - W^{+2} \frac{I_n^-}{I_n^{I^-}} P \right) \\ & \quad + \rho_G \frac{\alpha}{k} \left(\left(k^2 - \frac{1-n^2}{a^2} \right) \frac{K_n^+}{K_n^{I^+}} \right. \\ & \quad \left. - \left(k^2 - \frac{1-n^2}{(a+h)^2} \right) \frac{I_n^-}{I_n^{I^-}} \right)] \\ & + \omega [2\rho_L^2 (W^+ + W^-) W^+ W^- (PQ - RS) \\ & \quad + 2\alpha \rho_L \left(W^+ \left(k^2 - \frac{1-n^2}{a^2} \right) P \right. \\ & \quad \left. - W^- \left(k^2 - \frac{1-n^2}{(a+h)^2} \right) Q \right)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \rho_L^2 W^{+2} W^{-2} (PQ - RS) \\ & + \rho_L \alpha \left[W^{-2} \left(k^2 - \frac{1-n^2}{(a+h)^2} \right) Q \right. \\ & \quad \left. - W^{+2} \left(k^2 - \frac{1-n^2}{a^2} \right) P \right] \\ & + \alpha^2 \left(k^2 - \frac{1-n^2}{a^2} \right) \left(k^2 - \frac{1-n^2}{(a+h)^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$\begin{aligned} P &= \Delta (K_n^{I^-} I_n^+ - I_n^{I^-} K_n^+) \\ Q &= \Delta (I_n^{I^+} K_n^- - K_n^{I^+} I_n^-) \\ R &= \Delta (I_n^{I^+} K_n^+ - K_n^{I^+} I_n^+) \\ S &= \Delta (K_n^{I^-} I_n^- - I_n^{I^-} K_n^-) \end{aligned}$$

주어진 교란에 대해, 즉 k 와 n 에 대해 식 (18)로부터 ω 에 대한 근을 구하게 되는데 양의 허근일 경우 교란은 성장한다.

Hagerty 등⁽⁵⁾과 Squire⁽²⁾의 해석을 기초로 Dombrowski 등⁽⁴⁾은 액막의 경우 비대칭파가 대칭파보다 큰 성장률을 가지기 때문에 비대칭파만을 고려해야 함을 보였다. 따라서 본 연구에서는 비대칭파만을 고려하여 해석하기로 한다.

2.2 결과분석

Fig. 1의 계에 있어서, 액막에 부과되는 교란의 성장률을 찾기 위해 식 (18)에 k 와 n 값을 대입하여 해를 구하게 된다. Fig. 2은 축방향 속도를 변화시킬 때 축방향 교란에 대한 성장률의 변화를 보여준다. 속도가 증가함에 따라 최대성장률 ω_{\max} 은 증가하며, 이와 더불어 k_{\max} 도 증가한다. 즉 파장은 감소한다. 그리고 속도가 증가하면 불안정한 교란의 범위가 점점 증가하는 것을 볼 수 있다.

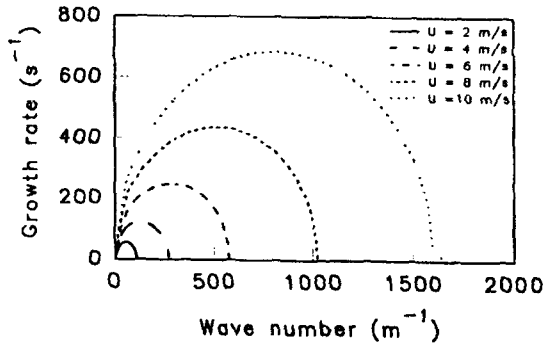


Fig.2 Dispersion diagram
($a=0.015m$, $h=0.2mm$, $V=0m/s(n=0)$)

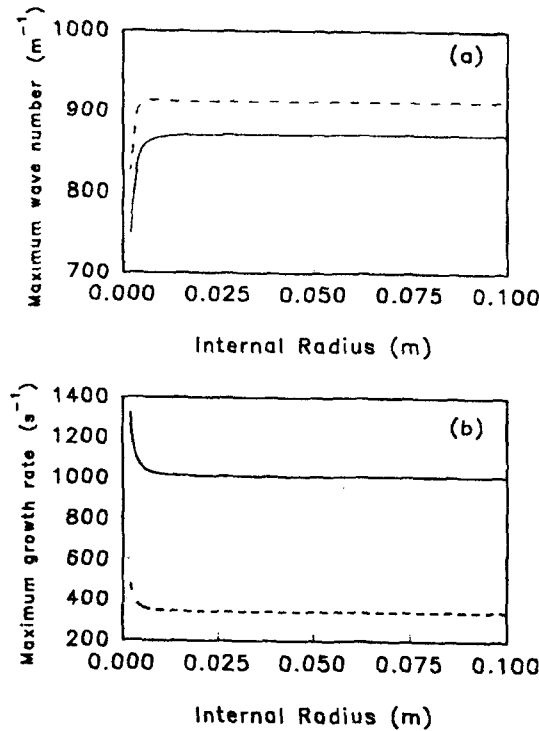


Fig. 3 (a) Variation of maximum wave number with internal radius
(b) Variation of maximum growth rate with internal radius
($U=10m/s$, $V=0$, --- $h=0.1mm$, - - - $h=1.0mm$)

Fig. 3은 반경변화에 따른 최대성장률 ω_{max} 와 최대파수 k_{max} 의 변화를 각각 나타낸

것이다. 그림에서 반경이 증가함에 따라 ω_{max} 은 감소하고 k_{max} 는 증가하는 것을 볼 수 있다. 그러나 일정 반경을 초과하면 두 값들이 일정한 값에 수렴함을 알 수 있다. 예를 들어 $h = 0.1mm$ 인 경우 공기코어 반경이 대략 $1cm$ 이상이 되면 ω_{max} , k_{max} 는 일정한 값을 보인다. 이것은 공기코어가 $1cm$ 이상일 경우 원통형 액막이 평판형 액막처럼 거동함을 암시한다.

Fig. 4는 공기코어의 반경변화에 따른 불안정한 교란의 범위와 성장률을 보여주고 있다. 반경이 증가함에 따라 불안정한 파의 범위는 감소하며 이와 더불어 성장률 또한 감소하는 것을 알 수 있다. 또 두께가 얇을수록 최대성장률은 크게 나타나나 불안정한 교란의 범위는 작아진다.

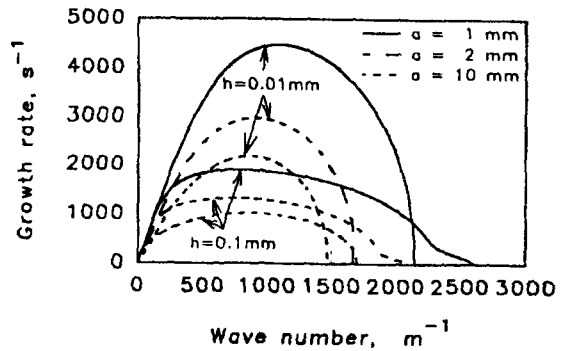


Fig.4 Characteristics of antisymmetric waves
($U=10m/s$)

Fig. 5은 축방향 속도가 일정할 때 접선속도 V 의 변화에 따른 성장률의 변화를 보여주고 있다. $V=0$ 일 때 최대성장률을 갖는 교란은 $n=0$ 일 때, 즉 축방향 교란만이 작용할 때이다. 그러나 V 가 증가함에 따라 최대성장률 ω_{max} 은 증가하며 ω_{max} 의 최대값 $(\omega_{max})_{max}$ 이 나타나는 접선방향 교란의 파수 n_{max} 가 0이 아님을 알 수 있다. 따라서 두 가지 속도성분을 가진 액막에 대해 최대성장률을 가지며 액막의 분열을 주도할 수 있는 교란은 두 형태의

교란이 증폭되어 나타난다고 할 수 있다.

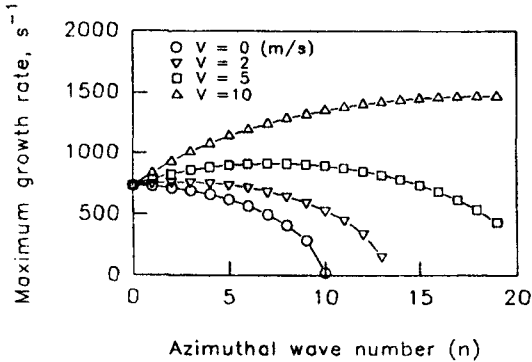


Fig. 5 Influence of azimuthal velocity on the wave growth

3. 원추형 액막의 해석

압력식 스프레이 노즐에서 분출된 원추형 액막은 하류로 발전함에 따라 액막과 주위공기와의 상대운동으로 인하여 기액접촉면에서 불안정파가 성장하게 되어 공기 코어 반경은 증가하며 액막 두께와 점선속도는 감소한다. 결국은 액주나 액적으로 떨어져 나가게 된다.⁽⁶⁾ 원추형 액막의 거동은 직접적으로 해석하는 것은 수학적으로 매우 난해하므로 본 연구에서는 원통형 액막의 해석을 기초로 이 원추형 액막을 Fig. 6과 같이 원통형 액막의 옆로 가정하고 각 위치에서의 최대 성장률과 그에 상응하는 교란의 파수를 해석하였다.

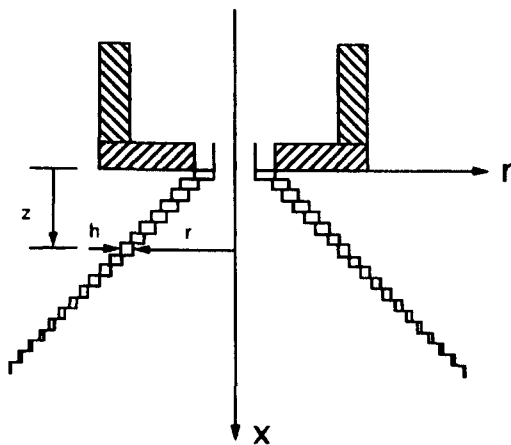


Fig. 6 Conical liquid sheet system

각 액막에서 액막두께와 점선속도는 질량보존식과 각운동량 보존식을 만족하도록 결정한다. Chigier⁽¹⁰⁾에 의하면 압력식 스프레이 노즐에서 평균액적 크기는 분사압력 증가에 따라 감소하고 점성이 증가함에 따라 증가한다. 그러나 분출된 원추형 액막은 속도가 충분히 크고 두께가 극히 얇다면 비정상유동으로 가정할 수 있으며 점성의 영향은 노즐내부에서의 점성마찰이다. Table 1은 본 연구에서 고려한 노즐의 사양을 나타낸 것이다. 여기서 노즐 출구의 액막 속도는 노즐 내부유동해석을 통해 구해진 결과⁽¹¹⁾이며, 액막 두께는 Doumas등⁽¹²⁾의 논문을 참조하여 계산되었다.

Table. 1 Initial conditions for nozzles

단위 : mm

노즐 No.	D_o	D_i	D_c	R_{ex}	H_o	P (bar)	U (m/s)	V (m/s)
J1	1.0	1.0	7.0	0.31	0.19	10	34.2	20.5
J2	1.2	1.0	7.0	0.40	0.20	10	31.6	19.3
J3	1.5	1.0	7.0	0.52	0.23	10	28.2	18.7
J4	2.0	1.0	7.0	0.75	0.25	10	24.0	17.3

3.1 원추형 액막의 분열지점

Fig. 7은 J4 노즐에 있어서, 공기코어 반경 r 에 따른 최대성장률 및 교란의 파수를 보여주고 있다. 반경이 증가함에 따라 $(\omega_{max})_{max}$ 는 계속해서 증가하며 그림에 나타나 있지 않은 $r \approx 10\text{ cm}$ 이상에서는 다시 감소하는 경향을 보인다. 그러나 $(k_{max})_{max}$ 는 반경이 증가함에 따라 계속 감소하다가 일정한 값에 수렴해 가는 것을 알 수 있다. 따라서 이 지점 이후로는 다른 변수들에는 영향을 받지 않고 오직 액막의 두께에만 영향을 받는다고 추측할 수 있다. 즉 평판형 액막의 성질을 가지게 되며 성장률에 영향을 끼치는 변수는 액막 두께임을 알 수 있다.

Cousin 등⁽⁶⁾은 $(\omega_{max})_{max}$ 의 최대값이 나타나는 지점에서 분열이 일어난다고 가정하여 액적 크기 예측모델을 제시하였다. 그러나 그

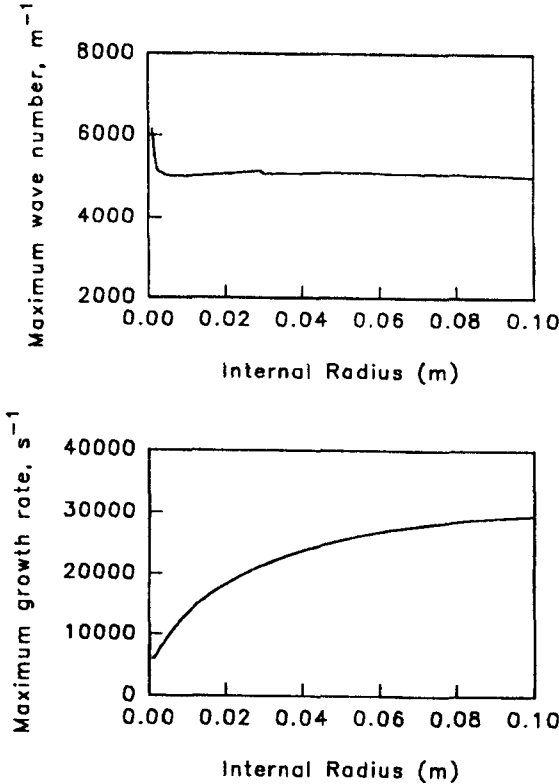


Fig. 7 Wave characteristics for injector J4

림에서 보는 바와같이 경험적으로 분열이 일어나는 지점 이상에서도 $(\omega_{\max})_{\max}$ 가 계속해서 증가함을 알 수 있다. 따라서 이들이 가정한 분열모델은 문제점이 있다고 볼 수 있다. Weber⁽¹³⁾(원통형 제트), Dombrowski 등⁽⁶⁾(평판형 액막)의 연구에 따르면 노즐출구에서 수력반지름에 기초한 Reynold수가 9000이상일 경우 초기진폭에 대한 진폭비가 exp(12)를 넘어설 때 액막이 분열함을 알 수 있으며, 본 연구에 적용한 모든 경우가 Reynold수가 9000이상이었으므로 교란의 진폭비 η/η_0 가 exp(12)를 넘어서는 지점에서 분열이 일어난다고 가정하였다.

그런데 원통형 액막의 기하학적 정보가 주어지면 그 액막에서의 최대성장률과 그에 상응하는 파수를 산출할 수 있다. 원추형 액막이 초기의 축방향 속도와 접선방향속도의 합성속도의 방향으로 분출된다고 가정하고(실제로는

다르게 나타나 분열시간이 지극히 짧으므로 원추막 모선의 곡률 변화를 무시한다) 질량보존과 각운동량 보존법칙을 적용하면 시간에 따른 액막의 위치와 두께, 접선속도를 구할 수 있다.

$$\theta_T = \tan^{-1} \frac{V_0}{U} \quad (19)$$

$$z_i = U \cdot \Delta t \cdot i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

$$r_i = R_{oc} + z_i \tan \theta \quad (21)$$

$$h_i = R_{oc} \cdot h_0 / r_i \quad (22)$$

$$V(r_i) = R_{oc} \cdot V_0 / r_i \quad (23)$$

여기서 첨자 i 는 액막이 취해진 지점을 나타내며 Δt 는 $3\mu s$ 정도로 취하였다(시간간격은 수치해석 측면에서 보면 격자의 간격과 같은 개념이며, Δt 를 $1-10\mu s$ 사이에서 변화시킬 때 결과의 차이는 무시할만큼 작았다). 따라서 각 위치의 액막에 대해 $(\omega_{\max})_{\max}$, $(k_{\max})_{\max}$ 를 구할 수 있다. 노즐 출구 지점에서 초기 교란의 진폭을 η_0 라 하면 Δt 동안 성장한 $(\omega_{\max})_{\max}$ 을 가진 교란 $(k_{\max})_{\max}$ 가 성장한다면 후의 교란의 진폭은

$$T_1 = \frac{\eta_1}{\eta_0} = \exp[(\omega_{\max \max})_1 \cdot \Delta t] \quad (24)$$

다음의 원통형 액막, 즉 $r = r_2$, $h = h_2$ 은

$$T_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \exp[(\omega_{\max \max})_2 \cdot \Delta t] \quad (25)$$

의 진폭을 가지게 된다. 마찬가지로 $i \cdot \Delta t$ 시간 후에는

$$T_i = \frac{\eta_i}{\eta_{i-1}} = \exp[(\omega_{\max \max})_i \cdot \Delta t] \quad (26)$$

이와 같은 과정을 반복하여 다음의 조건을 만족하는 순간에 분열이 일어난다고 가정하자.

$$\frac{\eta_i}{\eta_0} = \frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{\eta_2}{\eta_1} \dots \frac{\eta_{i-1}}{\eta_{i-2}} \frac{\eta_i}{\eta_{i-1}} = T_1 T_2 \dots T_{i-1} T_i > \exp(12) \quad (27)$$

3.2. 액적 크기 계산

분열 당시 교란의 파장은 λ_{max} 이므로 액막이 반파장의 길이의 액막따로 떨어져 나간다고 가정하면⁽⁶⁾(Fig. 8, Fig. 9 참조) 액막 따의 체적은

$$V = \int_0^{\lambda_{max}/2} \pi [(a+h+\eta_r)^2 - (a+\eta_r)^2] dx \quad (28)$$

이므로 정리하면

$$V = \frac{\pi}{2} h(2a+h)\lambda_{max} + \int_0^{\lambda_{max}/2} 2h\eta_r dx \quad (29)$$

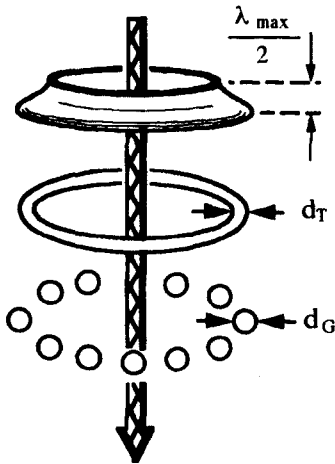


Fig. 8 Idealized disintegration process

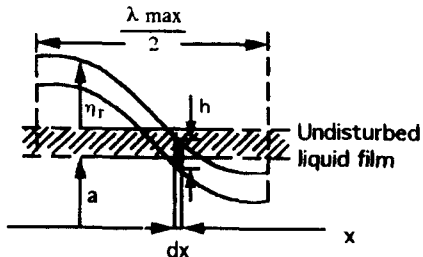


Fig. 9 Scheme of sheet at breakup point

η_r 이 다음과 같은 형태라면

$$\eta_r = \eta \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (30)$$

$$2h \int_0^{\lambda_{max}/2} h\eta_r dx = 0 \text{ 이 되고 이 액막 따}$$

가 표면장력으로 인하여 직경 d_T 의 액주로 수축한다고 가정하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$V = 2\pi a \cdot \frac{\pi d_T^2}{4} \quad (31)$$

식 (29)과 (31)를 조합하면 액주의 직경 d_T 를 얻을 수 있다.

$$d_T = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{h}{a} (2a+h)\lambda_{max}} \quad (32)$$

이 액주가 Rayleigh분열기구에 따라 액적으로 분열된다면 그 때의 액적은

$$d_G = 1.89d_T = 1.89\sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{h}{a} (2a+h)\lambda_{max}} \quad (33)$$

이며 $2a \gg h$ 이므로 식 (33)는 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d_G = 3.78\sqrt{\frac{h}{k_{max}}} \quad (34)$$

Table 2 Comparison of calculated d_G with measured SMD

(단위 : μm)

노즐 No.	J1	J2	J3	J4
Calculated d_G	99.93	116.1	139.1	174.3
Measured SMD	102	118	126	135

Table 2는 각 노즐에 대해 본 모델을 적용하여 얻은 액적 크기와 측정된 평균 액적 크기(SMD)를 비교한 것이다. 측정된 SMD와 d_G 사이에는 다음과 같은 관계가 존재한다.

$$0.77d_G < D_{32} < 1.02d_G \quad (35)$$

4. 결 론

본 연구에서는 원통형 액막에서 발생하는 선형불안정 이론을 원추형 액막에 확대 적용하여 액막의 불안정성을 해석하고 분열모델을 제시하여 액적 크기를 예측할 수 있는 모델을 개발하였다. 그리고 실제 압력 스웰 노즐을 사용하여 재측된 실험값과 모델에 의해 예측된 값을 비교해 본 결과 $0.77 d_G < D_d < 1.02 d_G$ 임을 알 수 있었다. 따라서 본 모델은 압력식 스웰노즐의 액적크기 예측에 유용한 자료를 제시할 수 있을 것이다. 그러나 본 연구에서 적용한 분열모델은 주류로부터 분리된 액주와 주위기체와의 상대운동을 무시한 상태에서 이루어졌으나 실제 분열된 액막피는 상당한 속도로 움직이기 때문에 이를 고려한 세부적인 분열모델이 요구된다.

참 고 문 헌

1. York, J. L., Stubbs, H. F. and Tek, M. R., "The Mechanism of Disintegration of Liquid Sheets", Trans. ASME, Vol. 75, pp. 1279-1286, 1953
2. Squire, H. B., "Investigation of the Instability of a Moving Liquid Film", Brit. J. of Appl. Mech., Vol. 4, pp. 167-169, 1953
3. Lamb, "Hydrodynamics", 5th ed. Chapter 9, 1932
4. Dombrowski, N., and Hooper, P. C., "The Effect of Ambient Density on Drop Formation in Sprays", Chem. Eng. Sci., Vol. 17, pp. 291-305, 1962
5. Hagerty, W. W., and Shea, J. F., "A Study of the Stability of Plane Fluid Sheets", J. Appl. Mech., Vol. 22, No. 4, pp. 509-514, 1955
6. Dombrowski, N., and Johns, W. R., "The Aerodynamic Instability and Disintegration of Viscous Liquid Sheets", Chem. Eng. Sci., Vol. 18, pp. 203-214, 1963
7. Crapper, G. D., Dombrowski, N. and Pyott, G. A., "Kelvin-Helmholtz Wave Growth on Cylindrical Sheets", J. Fluid Mech, Vol. 68, Part 3, pp. 497-502, 1975
8. Dumouchel, C., and Ledoux, M., "Atomisation of Flat and Annular Liquid Sheets: Practical Use of Linear Theories", ICLASS-91, Paper 12, 1991
9. Cousin, J., Yoon, S., Dumouchel C., and Ledoux, M., "Theoretical Determination of the Characteristics of Sprays Produced by Swirl Atomizers", ILASS-Europe, pp. 87-96, 1995
10. Chigier, N. A., "The Physics of Atomization", ICLASS-91, Paper A, 1991
11. 윤석주, 조대진, "압력식 스웰노즐의 내부유동 해석", 한국항공우주학회 투고중, 1997.
12. Dumas, M., and Laster, R., "Liquid-Film Properties for Centrifugal Spray Nozzles", Chem. Eng. Prog., p. 518, 1953
13. Weber, C., "Disintegration of Liquid Jets", Z. Angew. Math. Mech., Vol. 11, No. 2, pp. 136-159, 1931
14. Weihs, D., and Frankel, I., "Equilibrium Shape and Stability of a Liquid Cylinder in Cross Flow at Low Weber Numbers", J. Fluid Mech., Vol. 116, pp. 393-409, 1982