

< 논 문 >

## 축-익 붙임 원판 계의 진동해석

### Vibration Analysis of Shaft-Bladed Disk Systems

전 상 복\*

Sang-Bok Chun

(1997년 8월 29일 접수 ; 1997년 10월 24일 심사완료)

**Key Words** : Rotor Vibration (회전체 진동), Shaft-Bladed Disk (축-익 붙임 원판), Assumed Modes Method (가정 모드법), Substructure Synthesis Method (부분구조합성법), Stagger Angle(엇각), Pretwist Angle(비틀림각)

#### ABSTRACT

An analytical method using the substructure synthesis and assumed modes method is developed to investigate the effect of flexibility of bladed disk assembly on vibrational modes of flexible rotor system. In modeling the system, Coriolis forces, gyroscopic moments, and centrifugal stiffening effects are taken into account. Then the coupled vibrations between the shaft and bladed disk are extensively investigated using simplistic models, as the shaft rotational speed and the pretwist and stagger angles of blade are varied.

#### 1. 서 론

축-익 붙임 원판 계는 가스터빈, 증기터빈, 압축기와 같은 회전기계의 성능을 결정짓는 매우 중요한 부분 중의 하나이다. 최근, 산업계에서 고성능 및 고효율의 회전기계 수요의 증대에 따라 축-익붙임 원판 계는 과거보다 더욱 혹독한 환경에서 사용될 수 있도록 엄격하게 설계되고 있다. 이러한 환경에서 익, 원판 또는 축 요소들을 과거와 같이 일부 강체로 가정하여 해석하면, 계의 동역학적 특성을 정확히 예측하지 못하는 경우가 자주 발생하게 된다. 이 경우에는 계를 구성하는 각 요소의 탄성적 거동을 고려하여 각 요소가 서로 연성하여 운동하는 계 전체의 진동모드를 구해야 한다.

그러나 계 전체의 연성 진동모드를 구하는 것이 매

우 복잡하기 때문에 과거의 연구는 익의 진동<sup>(1,2)</sup>, 원판의 진동<sup>(3~5)</sup>, 그리고 익 붙임 원판의 진동<sup>(6~8)</sup>과 같이 각 요소가 서로 연성이 없다고 가정한 해석에 한정되어 있다. 이러한 해석은 해석 대상인 요소의 고유 진동수가 다른 요소의 것과 크게 차이가 있을 때는 그 결과는 정확하다. 그러나 최근의 고성능 및 고효율을 지향한 설계 추세를 볼 때, 각 요소간의 고유 진동수의 차이가 줄어들어 각 요소의 단독 해석으로는 정확한 진동 특성의 해석이 불가능하다. 몇 저자들<sup>(9,10)</sup>은 익과 축의 연성효과가 계의 진동 특성에 미치는 영향을 검토했는데 축의 횡방향 운동이 익 붙임 축의 후진 또는 전진 선회운동(backward or forward whirling)을 야기시킬 수 있음을 보였다. 또한 Kushner<sup>(7)</sup>, 그리고 Wu 및 Flowers<sup>(11)</sup>는 원판의 탄성이 회전계의 동특성을 크게 변화시킬 수 있음을 보였다. 한편, 몇 저자들<sup>(12~15)</sup>은 축-익 붙임 원판 전체의 진동을 고려한 해석을 발표하였다. Sakata<sup>(12)</sup> 그리고 Okamoto<sup>(14)</sup>는 유

\* 정회원, 경인여자전문대학 환경공학과

한요소법을 이용하여 다수의 한 탄성 익이 달린 탄성 원판과 강성 지지된 탄성 축으로 구성된 경(輕) 회전체의 진동 특성을 연구하였다. 그들은 비행기가 선회할 때의 각속도 변화에 의한 자이로 모멘트의 효과와 외부 교란에 대한 반응을 연구하였다. Kader 및 Loewy<sup>(13)</sup>는 탄성 축-익 붙임 원판 계의 강제진동을 계산할 수 있도록 모드해석에 의한 해석적 방법을 제시하였다. Zhang<sup>(15)</sup>은 유한요소법과 모드해석을 이용하여 원심력 장에서 축-강성 원판 그리고 익 붙임 원판을 해석하였다. 여기서 그는 회전하는 익 붙임 원판의 비선형의 특성을 갖는 큰 변형을 고려하여 축-익 붙임 원판 계 전체의 운동방정식을 구하였다. 그러나 여기서는 단순히 연성모드만을 구했을 뿐이고 익의 엇각 및 비틀림각 등의 기하학적 인자가 계의 연성진동에 미치는 효과는 검토하지 않았다.

본 연구에서는 탄성 축-익 붙임 원판 계에 있어서 저차 고유진동수 및 해당 진동모드를 구하기 위해 부분구조합성법<sup>(16)</sup> 및 가정모드법<sup>(17)</sup>을 이용한 해석적 방법을 제시한다. 본 방법은 유한요소법과 비교하여 작은 자유도를 가지면서 계산이 효율적이며 사용하기 쉽다는 장점을 보여 주고 있다. 마지막으로 몇 가지 수치예제를 통해 익의 엇각 및 비틀림각이 탄성 축-익 붙임 원판 계의 진동특성에 미치는 영향을 검토하였다.

## 2. 이론 해석

Fig. 1에 보인 바와 같이 두 개의 강성 베어링으로

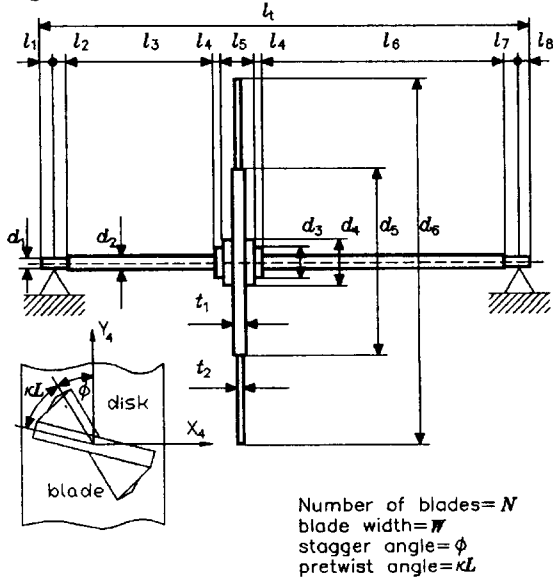


Fig. 1 Analysis model

로 지지된 축, 그리고 한 개의 익 붙임 원판으로 구성된 간단한 해석 모델을 고려한다. 여기서 축은 일정치 않은 단면을 가진 보, 원판은 일정 두께를 가진 원형 판 그리고 익은 두께가 일정한 사각 단면의 보이며 엇각(stagger angle)과 비틀림각(pretwist angle)을 가진 것으로 가정한다. 본 연구에서는 축과 익 붙임 원판 간의 동역학적 연성 해석이 주요 관심사이므로 베어링의 탄성은 고려하지 않는다. 또한 해석 전반에 걸쳐 변형은 극히 작은 범위에 있는 것으로 가정하여 선형적 해석 이론이 적용되는 것으로 한다. 여기서 다룬 해석 모델은 실제 모델보다 간단한 형상을 가졌지만 실제 모델의 기본적인 동역학 특성을 나타내도록 선정되었다. 이 해석 모델은 복잡한 형상을 고려할 수 있도록 일반화 시킬 수 있으나 해석 과정이 매우 복잡하게 될 것이다. 본 연구의 목적은 축과 익 붙임 원판 간의 연성 효과가 전체 계의 진동 특성에의 영향을 정성적으로 분석하는 것이다. 특히, 몇 개의 낮은 계의 진동 모드가 주요 관심사이므로 비틀림 및 축 방향 진동은 여기서는 다루지 않는다.

### 2.1 각 요소의 에너지 함수

전체 계의 운동 및 변형 에너지를 구하기 위해, 계를 여러 개의 부분구조들의 합으로 이루어진 것으로 간주하고, 여기에 각 부분구조의 강체 운동을 묘사하기 위해 각 부분구조에 고정된 국소 좌표계(local reference frame)를 지정한다. 그러면 각 부분구조의 탄성 변형은 지정된 국소 좌표계에 대한 상대 운동으로 정의된다. Fig. 2 및 Table 1에, 이러한 국소 좌표계 및 관련 단위 벡터 그리고 각 좌

Table 1 Description of coordinate systems

Coordinate system	Base vectors	Description
$O-X_0Y_0Z_0$	$i_0, j_0, k_0$	Inertial system
$O-X_1Y_1Z_1$	$i_1, j_1, k_1$	Local reference frame rotating at the constant speed of $W$ about $X_0$ axis
$P-X_2Y_2Z_2$	$i_2, j_2, k_2$	Local reference frame fixed to the disk $k_2$ points to the reference blade and
$P-X_{3i}Y_{3i}Z_{3i}$	$i_{3i}, j_{3i}, k_{3i}$	Local reference frame fixed to the disk $k_{3i}$ points to the $i$ -th blade and
$C-X_4Y_4Z_4$	$i_4, j_4, k_4$	Local reference frame fixed to the blade root
$B-X_5Y_5Z_5$	$i_5, j_5, k_5$	Local reference frame fixed to the blade at the distance of $l$ from the blade root

표계에 대해 정의된 병진 및 회전 변위를 설명하였다.

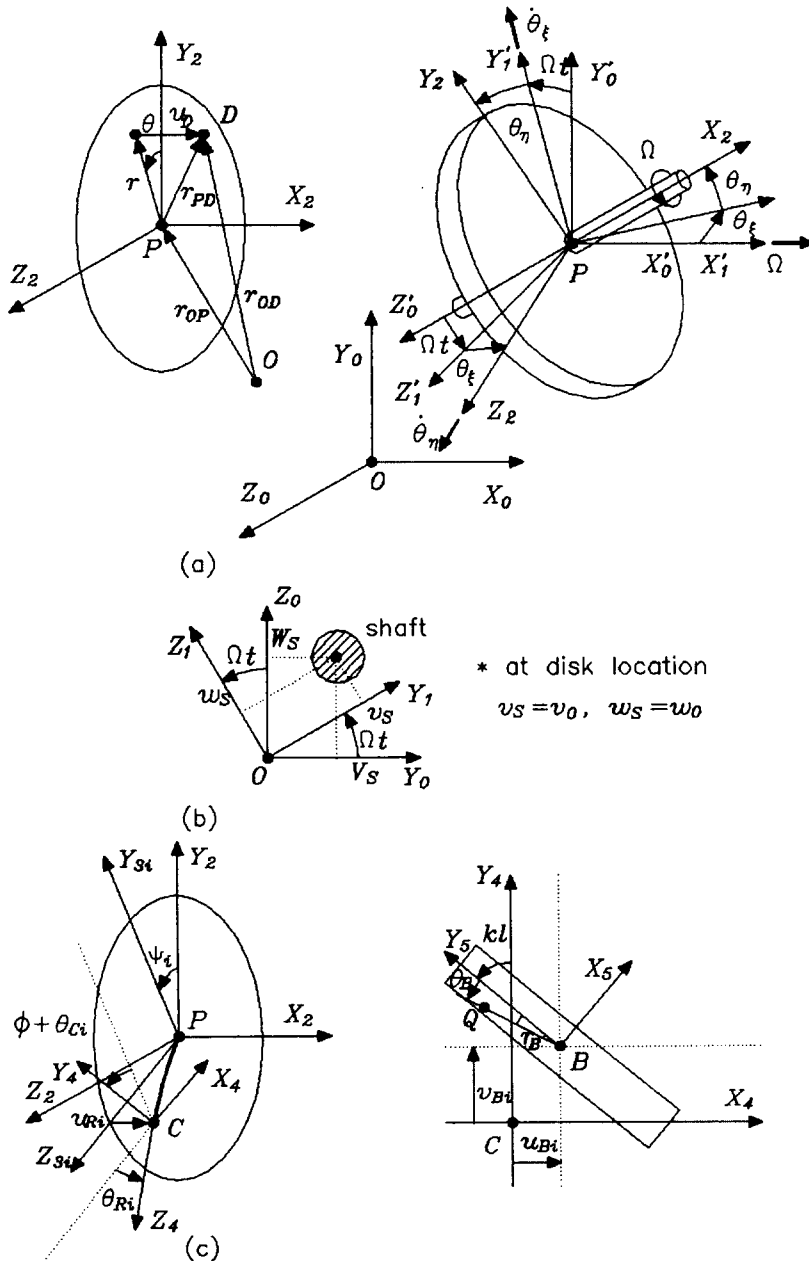
이제 Fig. 2(a)에 보인 바와 같이 원판에 고정된 국소 좌표계를 고려해 보자.  $O-X_0Y_0Z_0$  좌표계에 대한  $P-X_2Y_2Z_2$  좌표계의 순간 절대 각속도 벡터는

$$\omega_{20} = \left[ \Omega \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\theta_\eta^2 + \theta_\xi^2) \right\} + \theta_\eta \dot{\theta}_\xi \right] i_2 + (\dot{\theta}_\xi - \Omega \theta_\eta) j_2 + (\dot{\theta}_\eta + \Omega \theta_\xi) k_2. \quad (1)$$

그리고 움직이는 원판상의 임의의 점  $D$ 의 위치 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$r_{OD} = r_{OP} + r_{PD} = (\theta_\eta v_0 - \theta_\xi w_0 + u_D) j_2 + (v_0 + r \cos \theta) j_2 + (w_0 + r \sin \theta) k_2. \quad (2)$$

여기서  $v_0$  및  $w_0$  는 원판이 있는 곳에서의 축의 변위, 그리고  $(r, \theta)$  는  $Y_2-Z_2$  평면 상에서 정의된 점  $D$ 의 극좌표를 나타낸다. 따라서 점  $D$ 의 절대 속도는 다음과 같이 표시할 수 있다.



\* at disk location  
 $v_s = v_0, w_s = w_0$

Fig. 2 Coordinate system for (a) disk (b) shaft (c) blade

$$\dot{r}_{OD} \equiv \left[ \frac{dr_{OD}}{dt} \right]_0 = \left[ \frac{dr_{OD}}{dt} \right]_2 + \omega_{20} \times r_{OD} \quad (3a)$$

또는

$$\begin{aligned} \dot{r}_{OD} = & \left\{ \theta_{\eta} \dot{v}_0 - \theta_{\xi} \dot{w}_0 - \Omega \theta_{\eta} w_0 - \Omega \theta_{\xi} v_0 + \dot{u}_D \right. \\ & + r \sin \theta (\dot{\theta}_{\xi} - \Omega \theta_{\eta}) - r \cos \theta (\dot{\theta}_{\eta} + \Omega \theta_{\xi}) \left. \right\} i_2 \\ & + \left\{ (\dot{\theta}_{\eta} + \Omega \theta_{\xi}) \mu_D + \dot{v}_0 - \Omega w_0 + r \sin \theta \right. \\ & \times \left( \frac{\Omega}{2} (\theta_{\eta}^2 + \theta_{\xi}^2) - \theta_{\eta} \dot{\theta}_{\xi} - \Omega \right) \left. \right\} j_2 \\ & + \left\{ (\Omega \theta_{\eta} - \dot{\theta}_{\xi}) \mu_D + \dot{w}_0 + \Omega v_0 \right. \\ & \left. + r \cos \theta \left( -\frac{\Omega}{2} (\theta_{\eta}^2 + \theta_{\xi}^2) + \theta_{\eta} \dot{\theta}_{\xi} + \Omega \right) \right\} k_2. \end{aligned} \quad (3b)$$

여기서  $[dr_{OD}/dt]_2$  는  $P-X_2Y_2Z_2$  좌표계에 대한 점  $D$ 의 속도를 나타내며, 이 때  $\partial i_2/\partial t = \partial j_2/\partial t = \partial k_2/\partial t = 0$ 이다. 위의 수식에서  $u_D$  는 Fig. 2(a)에 보인 바와 같이  $X_2$  축 위의 점  $D$ 의 변위이다. 따라서 원판의 운동 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} T_D = & \frac{1}{2} \rho_D \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} h_D \dot{r}_{OD}^T \dot{r}_{OD} r dr d\theta \\ = & \frac{1}{2} M_D \left\{ \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2 + 2\Omega(\dot{w}_0 v_0 - \dot{v}_0 w_0) + \Omega^2(w_0^2 + v_0^2) \right\} \\ & + \frac{1}{2} J_{Dy} \left\{ (\dot{\theta}_{\xi} - \Omega \theta_{\eta})^2 + (\dot{\theta}_{\eta} + \Omega \theta_{\xi})^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2} J_{Dx} \left\{ 2\Omega \theta_{\eta} \dot{\theta}_{\xi} - \Omega^2(\theta_{\eta}^2 + \theta_{\xi}^2) + \Omega^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2} \rho_D \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} h_D \left[ \dot{u}_D^2 + 2r \left\{ \sin \theta (\dot{\theta}_{\xi} - \Omega \theta_{\eta}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos \theta (\dot{\theta}_{\eta} + \Omega \theta_{\xi}) \right\} \mu_D - 2\Omega r \left\{ (\dot{\theta}_{\eta} + \Omega \theta_{\xi}) \sin \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + (\dot{\theta}_{\xi} - \Omega \theta_{\eta}) \cos \theta \right\} u_D \right] r dr d\theta \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $R_1$  및  $R_2$ 는 각각 내측 및 외측 반경을 표시하며,  $h_D$  는 두께,  $M_D$  는 질량,  $J_{Dx}$  및  $J_{Dy}$  는 각각  $X_2$  및  $Y_2$  축에 대한 질량 관성 모멘트, 그리고  $\rho_D$  는 질량 밀도를 나타낸다. 식 (4)에서 밀출된 항목들은 한 개의 절직경 모드(nodal diameter mode)의 경우를 제외하고는 영이 되는 것을 알 수 있는데, 이는  $k$  개의 절직경 모드의 경우 다음 관계식이 만족하기 때문이다.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos k\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin k\theta d\theta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin k\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos k\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq 1 \\ \pi & \text{for } k = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

앞의 식은 오직 한 개의 절직경 모드를 가진 원판의 운동만이 축과 원판의 연성 진동에 기여함을 의미한다.

다. 회전하는 원판의 변형 에너지는 순수 굽힘 에너지와 원판의 평면 상에 존재하는 원심력에 의한 굽힘 에너지로 구성된다. 회전에 의해 발생하는 응력은 회전 축에 대하여 대칭적으로 분포하고 원판의 두께와 무관하다고 가정하면, 전단 응력은 영이 된다. 즉  $\tau_{r\theta} = 0$ . 따라서 원판의 변형 에너지 식은 다음과 같이 유도된다<sup>(17)</sup>.

$$\begin{aligned} U_D = & \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{D}{2} \left[ (\nabla^2 u_D)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 u_D}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_D}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_D}{\partial \theta^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_D}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_D}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \right] r dr d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{h_D}{2} \left\{ \sigma_r \left( \frac{\partial u_D}{\partial r} \right)^2 + \sigma_{\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_D}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\sigma_r$  및  $\sigma_{\theta}$  는 각각 반경 방향 및 원주 방향 응력이고,  $\nu$  는 푸아송비,  $\nabla^2$  는 라플라시안(Laplacian),  $D$ 는 굽힘 강성(flexural rigidity), 그리고  $E_D$ 는 종탄성계수(Young's modulus)를 나타낸다. 여기서 에너지의 각 항목에 대한 상세한 내용은 부록 A에 나타내었다. 일반적으로 축의 운동 에너지는 식 (4)의 연장으로부터 구할 수 있다. 축의 기하학적 변형을 Fig. 2(b)에 나타내었는데, 이 때 길이가  $S$ 인 축 요소의 운동 에너지는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} T_S = & \frac{1}{2} \rho_S \int_0^S A_S \left\{ \dot{v}_S^2 + \dot{w}_S^2 + 2\Omega(\dot{w}_S v_S - \dot{v}_S w_S) \right. \\ & \left. + \Omega^2(v_S^2 + w_S^2) \right\} ds + \frac{1}{2} \rho_S \int_0^S I_{Sy} \left\{ \dot{\theta}_{Sx}^2 + \dot{\theta}_{Sy}^2 \right. \\ & \left. + 2\Omega(\dot{\theta}_{Sx} \theta_{Sy} + \dot{\theta}_{Sy} \theta_{Sx}) - \Omega^2(\theta_{Sx}^2 + \theta_{Sy}^2) \right\} ds \\ & + \rho_S \int_0^S I_{Sy} \Omega^2 ds \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\rho_S$  는 질량 밀도,  $A_S$ 는 단면적,  $v_S$  및  $w_S$  는 각각  $Y_1$  및  $Z_1$  축에 대한 변위, 그리고  $I_{Sy}$  는  $Y_1$  축에 대한 축의 단면 관성 모멘트이다. 그리고 축의 변형 에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_S = \frac{E_S}{2} \int_0^S I_{Sy} \left\{ \left( \frac{\partial v_S}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_S}{\partial s} \right)^2 \right\} ds \quad (8)$$

여기서  $E_S$  는 축의 종탄성계수이다. Fig. 2(c)에 보인 바와 같이  $i$ 번째 익에서 임의의 점  $Q$ 를 고려해 보자. 국소좌표계의 단위벡터를 사용하여 점  $Q$ 의 위치벡터를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_{OQ} = r_{OP} + r_{PC} + r_{CB} + r_{BQ} = & (v_0 j_1 + w_0 k_1) + (u_{Ri} i_{3i} + R_2 k_{3i}) \\ & + (u_{Bi} i_4 + v_{Bi} j_4 + l k_4) + (-r_B \sin \theta_B i_5 + r_B \cos \theta_B j_5) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $(r_B, \theta_B)$  는  $X_5$ - $Y_5$ 평면에서 정의된 점  $Q$ 의 극좌표이고,  $u_{Bi}$  및  $v_{Bi}$  는 각각  $X_4$  및  $Y_4$ 축에 대한  $i$ 번째 익의 탄성변형 값이며,  $l$ 은 익근(翼根)에서 점  $B$ 까지의 익의 길이 방향의 거리를 나타낸다. 앞서와 마찬가지로 점  $Q$ 의 속도를 수식으로 표현할 수 있는데, 그 결과가 너무 복잡하여 여기서는 생략하기로 한다. 운동에너지 식에서 축과 익의 연성을 나타내는 항은 한 개의 절직경 모드의 경우를 제외하고는 영이 되는 것을 알 수 있는데, 이는  $k$ 개의 절직경 모드의 경우 다음 관계식이 만족하기 때문이다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sin \psi_i^{(k)} \sin \psi_i &= \sum_{i=1}^N \cos \psi_i^{(k)} \cos \psi_i = \sum_{i=1}^N \sin \psi_i^{(k)} \cos \psi_i \\ &= \sum_{i=1}^N \cos \psi_i^{(k)} \sin \psi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^N \sin^2 \psi_i^{(k)} \sin \psi_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 \psi_i^{(k)} \cos \psi_i = \sum_{i=1}^N \cos^2 \psi_i^{(k)} \sin \psi_i \\ &= \sum_{i=1}^N \cos^2 \psi_i^{(k)} \cos \psi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^N \cos \psi_i^{(k)} \sin \psi_i^{(k)} \cos \psi_i &= \sum_{i=1}^N \cos \psi_i^{(k)} \sin \psi_i^{(k)} \sin \psi_i = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $N$ 은 익의 개수이고,  $\psi_i^{(k)} = \frac{2\pi(i-1)k}{N}$  그리고  $\psi_i = \psi_i^{(1)}$ 이다. 익의 전체 운동 에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_B = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \rho_B \int_0^L \int_{A_B} \dot{r}_{OQ}^T \dot{r}_{OQ} dAdl, \quad (11)$$

여기서  $\rho_B$ 는 질량밀도,  $L$ 은 익장(翼長) 그리고  $A_B$ 는 익의 단면적을 나타낸다. 익의 변형에너지는 두 가지 형태의 에너지로 구성되어 있다. 첫번째는 두 직교 평면에서의 탄성 굽힘과 관계있는 변형에너지(12.14.18)로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_{Bb} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E_B \hat{I}_{By} \left( \frac{\partial^2 u_{Bi}}{\partial l^2} \right)^2 + E_B \hat{I}_{Bx} \left( \frac{\partial^2 v_{Bi}}{\partial l^2} \right)^2 \right. \\ \left. + 2E_B \hat{I}_{Bxy} \left( \frac{\partial^2 u_{Bi}}{\partial l^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v_{Bi}}{\partial l^2} \right) \right\} dl \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $E_B$ 는 종탄성계수,  $\hat{I}_{Bx}$  및  $\hat{I}_{By}$  는 각각  $X_4$

및  $Y_4$ 축에 대한 이차 단면 관성 모멘트(the second area moments of inertia), 그리고  $\hat{I}_{Bxy}$ 는  $X_4$  및  $Y_4$  축에 대한 단면 곱관성 모멘트(area product of inertia)를 나타낸다.  $B$ 에서의 단면 관성 모멘트와 주 단면 관성 모멘트의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{I}_{Bx} &= I_{By} \sin^2 \kappa l + I_{Bx} \cos^2 \kappa l \\ \hat{I}_{By} &= I_{By} \cos^2 \kappa l + I_{Bx} \sin^2 \kappa l \\ \hat{I}_{Bxy} &= \frac{1}{2} (I_{By} - I_{Bx}) \sin 2\kappa l \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $I_{Bx}$  및  $I_{By}$  는 각각  $X_5$  및  $Y_5$  축에 대한 주 단면관성모멘트이고,  $\kappa$ 는 익의 단위길이당 비틀림 각이다. 두 번째의 변형에너지로서 원심력에 의한 변형에너지를 생각할 수 있다. 익 방향의 원심력에 의해서 평면응력이 익에 작용한다고 가정하면, 원심력에 의한 변형에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다(12.14.18).

$$U_{Bc} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_0^L F_i \left\{ \left( \frac{\partial u_{Bi}}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{Bi}}{\partial l} \right)^2 \right\} dl \quad (14)$$

여기서  $F_i$ 은 익근에서  $l$ 만큼 떨어진 익상의 점에 작용하는 평면력을 나타낸다. 익의 전체 변형에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_B = U_{Bb} + U_{Bc} \quad (15)$$

## 2.2 가정모드법 및 부분구조합성법의 적용

모든 부분구조들의 운동은 허용함수(admissible function)들의 가중에 의한 중첩으로 근사화 할 수 있다. 이 때, 비 연성 및 비 회전을 가정한 해석에서 구한 각 부분구조의 모드 형상을 허용함수로 사용할 수 있다. 이러한 개념, 그리고 익 불임 원판의 한 개의 절직경 모드만이 축의 굽힘 진동 모드와 연성을 일으킨다는 사실로부터,  $i$ 번째 익 및 원판의 한 개의 절직경 모드와 관계된 연성 운동은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{Bi} &= \cos \psi_i \Phi_U Q_{U\xi} + \sin \psi_i \Phi_V Q_{U\eta} \\ v_{Bi} &= \cos \psi_i \Phi_V Q_{V\xi} + \sin \psi_i \Phi_U Q_{V\eta} \\ u_D &= \cos \theta \Phi_D Q_{D\xi} + \sin \theta \Phi_D Q_{D\eta} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,  $\Phi_U, \Phi_V$  및  $\Phi_D$ 는 각각 익면 방향, 익두께 방향 및 원판의 운동을 묘사하는 허용함수들로 구성되며 거리의 함수인 행벡터(row vector)이며;  $\Phi_{U\xi}, \Phi_{U\eta}, \Phi_{V\xi}, \Phi_{V\eta}, \Phi_{D\xi}$  및  $\Phi_{D\eta}$ 는 각 허용함수에 대응하는 일반화 좌표(generalized coordinate)로 구성되며 시간함수인 열벡터(column vector)이

다. 한편, 축의 운동은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_s &= \Phi_s Q_V \\ w_s &= \Phi_s Q_W \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $\Phi_s$  는 두 개의 서로 직각인 평면상에서 정의된 축의 운동을 묘사하는 허용함수들로 구성된 행 벡터, 그리고  $Q_V$  와  $Q_W$  는 이에 대응하는 시간의 함수인 일반화 좌표들로 구성된 열벡터이다. 식 (16) 및 (17)로 부터, Fig. 2(c)에 보인  $u_{R_1}$ ,  $\theta_{R_1}$ ,  $\theta_{C_1}$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta_{\xi}$  및  $\theta_{\eta}$  과 같은 변수들도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{R_1} &= u_D|_{R_2} = \cos\psi_i \Phi_D|_{R_2} Q_{D\xi} + \sin\psi_i \Phi_D|_{R_2} Q_{D\eta} \\ \theta_{R_1} &= \frac{\partial u_D}{\partial r} \Big|_{R_2} = \cos\psi_i \Phi_D|_{R_2} Q_{D\xi} + \sin\psi_i \Phi_D|_{R_2} Q_{D\eta} \\ \theta_{C_1} &= \frac{\partial u_D}{R_2 \partial \theta} \Big|_{R_2} = -\frac{1}{R_2} \sin\psi_i \Phi_D|_{R_2} Q_{D\xi} + \frac{1}{R_2} \cos\psi_i \Phi_D|_{R_2} Q_{D\eta} \\ v_0 &= v_s|_o = \Phi_s|_o Q_V, \dot{v}_0 = \Phi_s|_o \dot{Q}_V, \\ w_0 &= w_s|_o = \Phi_s|_o Q_W, \dot{w}_0 = \Phi_s|_o \dot{Q}_W, \\ \theta_{\xi} &= \theta_{s_i}|_o = -w'_s|_o = -\Phi'_s Q_W, \\ \dot{\theta}_{\xi} &= -\Phi'_s|_o \dot{Q}_W, \theta_{s_{\xi}} = -\Phi'_s Q_W, \\ \theta_{\eta} &= \theta_{s_n}|_o = v'_s|_o = \Phi'_s|_o Q_V, \\ \dot{\theta}_{\eta} &= \Phi'_s|_o \dot{Q}_V, \theta_{s_{\eta}} = \Phi'_s Q_V \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 아래첨자  $R_2$  및  $O$  은 각각 원판의 외경 및 중심점에서 구한 값을 의미한다. 식 (16)~(18)을 식 (4), (6), (7), (8), (11) 및 (15)에 대입하면, 다음과 같이 이산화된 전체 에너지 함수를 구할 수 있다.

$$T = T_S + T_D + T_B \quad (19)$$

그리고

$$U = U_S + U_D + U_B. \quad (20)$$

여기서 에너지의 각 항목에 대한 상세한 내용은 부록 B에 기술하였다.

### 2.3 운동방정식

앞 절에서 구한 전체의 운동 및 변형 에너지에 다음과 같이 라그랑지 식을 적용하면, 축-익 붙임 원판 계의 운동 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (21)$$

여기서  $q_r (= Q_V, Q_W, Q_{D\xi}, Q_{D\eta}, Q_{U\xi}, Q_{U\eta}, Q_{V\xi}, Q_{V\eta})$  및  $L (= T - U)$

는 각각 일반화 독립 좌표로 구성된 벡터 및 계의 라그랑지안(system Lagrangian)을 나타낸다. 그러면 앞의 에너지 식 (19) 및 (20)을 라그랑지 식 (21)에 대입하면 8개의 운동 방정식을 얻을 수 있다. 그리고 다음의 복소수에 의한 표현 방법을 도입한다.

$$\begin{aligned} Z_S &= Q_V + jQ_W, & Z_D &= Q_{D\xi} + jQ_{D\eta}, \\ Z_U &= Q_{U\xi} + jQ_{U\eta}, & Z_V &= Q_{V\xi} + jQ_{V\eta}, \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 서로 직각 방향에서 정의된 두 개의 일반화 좌표를 일반화 복소수 좌표의 실수 및 허수 부분으로 취했다. 복소수 표기법을 사용함으로써 복잡한 연성 운동 방정식을 다음과 같이 간단한 행렬 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_S & -M_{SD} - j(C_{SD}^{(2)} + C_{SD}^{(3)T}) \\ -M_{SD}^T + j(C_{SD}^{(2)T} + C_{SD}^{(3)}) & \frac{1}{2}(M_D + M_D^T) \\ \sin\phi M_{SU} + j\cos\phi C_{SU}^T & \cos\phi M_{DU}^T \\ \cos\phi M_{SV} - j\sin\phi C_{SV}^T & -\sin\phi M_{DV}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_S \\ \dot{Z}_D \\ \dot{Z}_U \\ \dot{Z}_V \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} j\Omega(K_S^{(1)} + M_S) & \Omega(-C_{SD}^{(1)} + C_{SD}^{(2)} + C_{SD}^{(3)T}) \\ \Omega(C_{SD}^T - C_{SD}^{(2)T} - C_{SD}^{(3)}) & j\Omega(C_D + C_D^T) \\ 2j\Omega\sin\phi M_{SU} & 0 \\ 2j\Omega\cos\phi M_{SV} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_S \\ \dot{Z}_D \\ \dot{Z}_U \\ \dot{Z}_V \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 2j\Omega\sin\phi M_{SU}^T & 2j\Omega\cos\phi M_{SV}^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_S \\ \dot{Z}_D \\ \dot{Z}_U \\ \dot{Z}_V \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_S^{(2)} - \Omega^2 K_S^{(1)} + j\Omega C_S & \Omega^2(-M_{SD1} - jC_{SD}) \\ \Omega^2(-M_{SD}^T + jC_{SD}^T) & \frac{1}{2}(K_D^{(2)} + K_D^{(2)T}) + \Omega^2 K_D^{(1)} \\ \Omega^2(-\sin\phi M_{SU} + j\cos\phi C_{SU}^T) & \Omega^2 \cos\phi C_{DU}^T \\ \Omega^2(-\cos\phi M_{SV} - j\sin\phi C_{SV}^T) & \Omega^2(-M_{SD1} - jC_{SD}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_S \\ Z_D \\ Z_U \\ Z_V \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \Omega^2(-\sin\phi M_{SU}^T - j\cos\phi C_{SU}) & \Omega^2(-\cos\phi M_{SV}^T + j\sin\phi C_{SV}) \\ \Omega^2 \cos\phi C_{DU} & -\Omega^2 \sin\phi C_{DV} \\ K_U - \Omega^2 \sin^2\phi M_U & -\Omega^2 \sin 2\phi C_{UV} + K_{UV} \\ -\Omega^2 \sin 2\phi C_{UV}^T + K_{UV}^T & K_V - \Omega^2 \cos^2\phi M_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_S \\ Z_D \\ Z_U \\ Z_V \end{bmatrix} \\ & = \{0, 0, 0, 0\}^T \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $\phi$ 는 엇각을 나타내며 행렬의 각 요소는 부록 C에 자세히 나타내었다. 식 (23)과 관련된 계의 고유치는 여러 가지 방법으로 구할 수 있다<sup>(19)</sup>.

### 3. 수치해석의 예

제안한 방법을 예시하기 위해 두 개의 회전체 모델을 해석하였다. 특히 첫번째 모델은 본 방법의 정확도를 검증하기 위해 참고문헌(15)에서 인용하였다. 두 번째 모델은 한 개의 익 붙임 원판이 축의 중간에 위치한 것으로서, 절직경 모드를 갖는 익 붙임 원판의 운동과 축의 탄성 굽힘 운동과의 동역학적 연성을 검토하기 위한 것이다.

수치 해석에서는 계를 구성하는 각 요소의 국소 변형을 표현하기 위해 총 30개의 서로 다른 허용 함수(축의 운동 : 10개, 원판의 운동 : 10개, 익의 운동 : 10개)를 사용하였다. 허용 함수로서, 축의 경우에는 강제 모드 형상 및 양단 자유의 경계 조건을 가진 비회전 균일 보의 모드 형상을 이용하였고, 원판의 경우에는 내경 고정-외경 자유의 경계 조건을 가진 비회전 균일 원판의 반경 방향의 모드 형상을

이용하였으며, 익의 경우에는 고정-자유의 경계조건을 가진 비회전 균일 보의 모드 형상을 이용하였다.

#### 3.1 수치해석의 예

Fig. 1에 보인 바와 같이 각 수치해석의 모델은 회전하는 한 개의 축과  $N$  개의 익으로 구성되어 있는 익 붙임 원판으로 구성되어 있으며 축 양단은 단 순 지지되어 있다. Fig. 1에 따른 각 부위의 치수는 다음과 같다. 첫번째 모델<sup>(15)</sup>:  $l_1=65$  mm,  $l_2=5$  mm,  $l_3=196$  mm,  $l_4=19$  mm,  $l_5=40$  mm,  $l_6=666$  mm,  $l_7=5$  mm,  $l_8=20$  mm,  $l_t=1035$  mm,  $d_1=25$  mm,  $d_2=27$  mm,  $d_3=67$  mm,  $d_4=80$  mm,  $d_5=270$  mm,  $d_6=486$  mm,  $t_1=t_2=2$  mm,  $W=40$  mm 그리고  $N=8$ . 두 번째 모델:  $l_1=l_2=l_4=l_5=l_7=l_8=d_1=d_3=d_4=0$ ,  $l_3=l_6=250$  mm,  $l_t=500$  mm,  $d_2=10$  mm,  $d_5=60$  mm,  $d_6=400$  mm,  $t_1=20$  mm,  $t_2=2$  mm,  $W=20$  mm 그리고  $N=8$ . 또한 재질 상수는 다음과 같이 선택하였다.  $E_S=E_D=E_B=2.10 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu=2.28$ ,  $\rho_S=\rho_D=\rho_B=7850$  N · sec<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>.

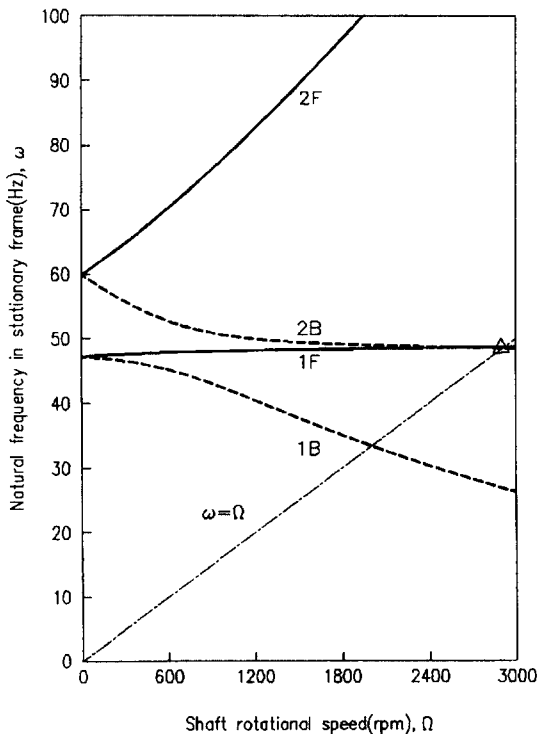


Fig. 3 Natural frequencies of model #1: —, forward; - - - -, backward

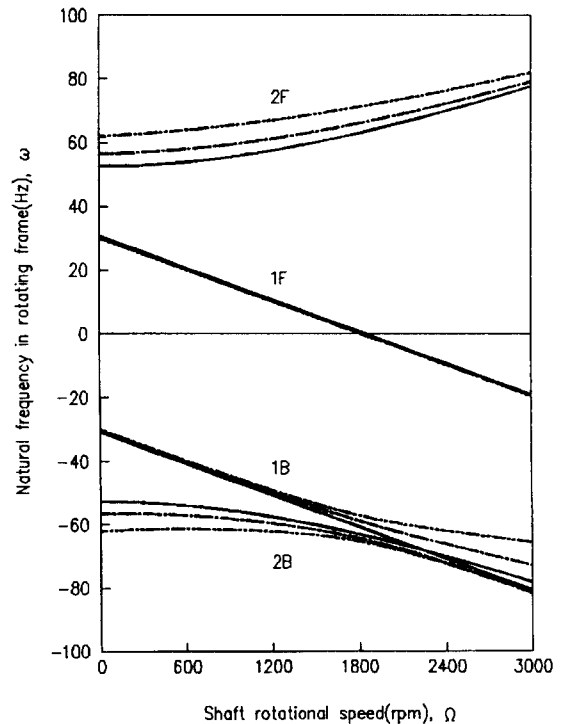


Fig. 4 Natural frequencies of model #2 with flexible bladed disk for stage angles: —,  $\phi=0^\circ$ ; - - - -,  $\phi=45^\circ$ ; - · - · -,  $\phi=90^\circ$

3.2 결과 및 토론

Fig. 3은 공간상에 고정된 좌표계에 대한 2개의 저차 연성모드를 구했는데, 여기서  $\omega = \Omega$  직선은 전진 동기가진(forward synchronous excitation)을 의미한다. 첫번째 고유진동수는 익 붙임 원판의 강체 자이로 운동과 관계있으며, 두 번째 고유진동

수는 익 붙임 원판의 국소 탄성 운동과 관계있음을 유의해야 한다.  $\omega = \Omega$  직선과 첫번째 전진 고유진동 곡선(forward(1F) natural frequency curve)이 만나는 곳인 첫번째 위험속도(critical speed)는 47.78 Hz(2867 rpm)이다. Table 2에 요약한 바와 같이 계산 결과와 참고문헌(15)의 것이 잘 일치하고 있으므로 제안한 방법이 검증됨을 알 수 있다.

두 번째 모델의 경우, 축이 상대적으로 우세한 1차 모드를 갖기 때문에 익 붙임 원판은 주로 횡방향 운동을 하게 된다. Fig. 4는 회전 좌표계에서 구한

Table 2 Natural frequencies and the first critical speed of shaft-bladed disk system (model #1) (Hz)

Method	Natural frequency at $\Omega=0$		Critical speed
	$\omega_{1,2}$	$\omega_{3,4}$	
Proposed method	47.17	59.92	47.78
FEM <sup>(15)</sup>	46.00	60.15	46.11
Experiment <sup>(15)</sup>	48.0	-	45.5

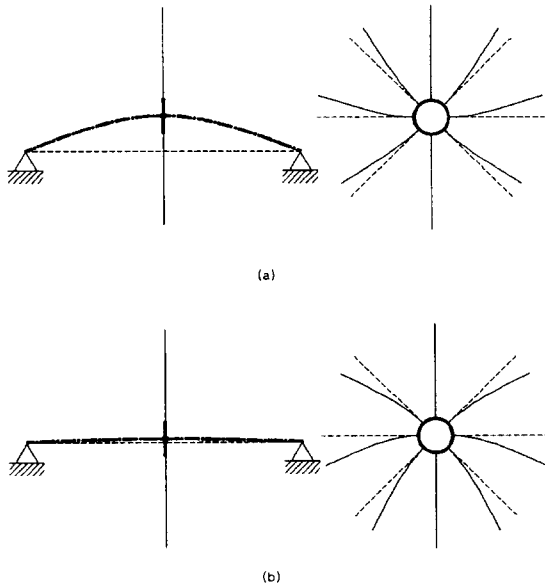


Fig. 5 (a) First and (b) second mode shape of model #2:  $\Omega = \phi = \alpha L = 0$

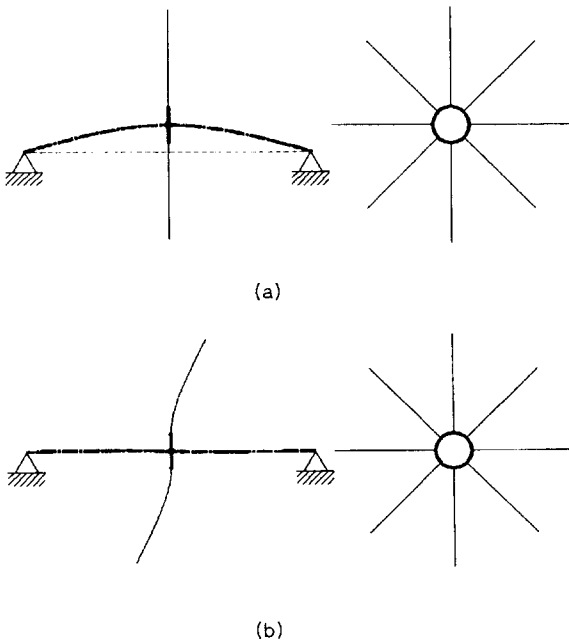


Fig. 6 (a) First and (b) second mode shape of model #2:  $\Omega = \alpha L = 0, \phi = 90^\circ$

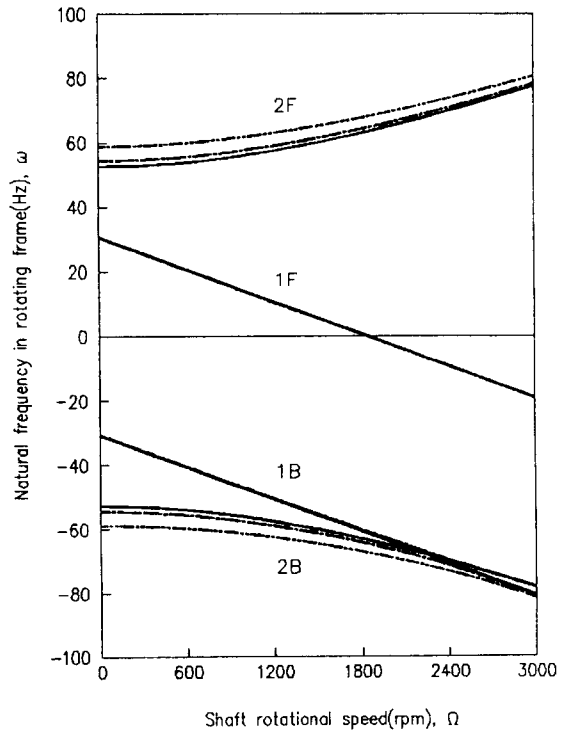


Fig. 7 Natural frequencies of model #2 with flexible bladed disk for pretwist angles of :  
 —,  $\alpha L = 0^\circ$  ; - - -,  $\alpha L = 90^\circ$  ···,  $\alpha L = 180^\circ$



여러 가지 엇각에 대한 첫번째 및 두 번째 고유진동수를, 그리고 Fig. 5, 6은  $\phi=0^\circ, 90^\circ$  에 대한 해당 전진 모드 형태를 나타낸다. 일반적으로 전진 및 후진 모드 형태는, 심각하진 않더라도, 차이가 있으나, 여기서는 구별이 되지않을 정도로 작기 때문에 후진 모드 형태는 생략했다.  $\phi=0^\circ$ 일 때는 Fig. 5에 보인 바와 같이 첫번째 고유진동수는 우세한 축 모드와, 그리고 두 번째 고유진동수는 우세한 익 붙임 원판 모드와 관계있다. 이러한 모드는 축 또는 익 붙임 원판을 강체로 가정한 해석에서도 정확히 예측할 수 있다. 그러나  $\phi$ 가  $0^\circ$ 에서  $90^\circ$  까지 증가하면, 축과 익 붙임 원판 모드는 Fig. 6에 보인 바와 같이 연성 효과가 무시할 수 없을 정도로 커지게 된다. 이 연성 효과는 익 붙임 원판의 한 개의 절결경모드에 의해 발생하여 축에 작용하는 모멘트에 기인한다<sup>(20)</sup>. Fig. 7은 회전 좌표계에서 계산한 여러 가지 비틀림각( $xL$ )에 대한 고유진동수를 나타낸다. 여기서 회전수가 증가함에 따라 비틀림각이 고유진동수에 미치는 효과는 엇각의 경우와 유사함을 알 수 있다. 그러나 비틀림각의 계의 동특성에 미치는 효과는 엇각의 경우보다 작음을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

부분구조합성법 및 가정 모드법을 이용하여 축-익 붙임 원판을 가진 탄성 회전체의 운동을 지배하는 선형 2차 편미분 방정식을 유도하였다. 제안한 방법은 작은 자유도로서 높은 계산의 효율성을 보여 주었다. 수치 예제로서 두 개의 회전체 모델을 선정하였으며, 여기서 스판들의 회전 속도를 변화시켜 가면서 저차의 2개 연성 모드의 고유 진동수를 계산하였다. 여기서 제안한 방법을 검증하였으며, 축과 익 붙임 원판 사이의 동역학적 연성 효과는 계의 진동 거동을 예측함에 있어서 매우 중요한 인자임을 보였다.

#### 참 고 문 헌

(1) M. Swaminathan and J.S. Rao 1977 *Mechanism and Machine Theory* 12, 331~337. Vibration of Rotating, Pretwisted and Tapered Blades.  
 (2) A.W. Leissa, J.C. Macbain and R.E. Kielb 1984 *Journal of Sound and Vibration* 96(2), 159~173. Vibrations of Twisted Cantilevered Plates-Summary of Previous

and Current Studies.  
 (3) R.V Southwell 1921 *Proceedings of Royal Society of London* 101, 133~153. On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc Clamped at its Center; and on the Effects of Rotation.  
 (4) S.M. Vogel and D.W. Skinner 1965 *ASME Journal of Applied Mechanics*, 926~931. Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates.  
 (5) A.C. Ugural and S.K. Fenster 1981 *Advanced Strength and Applied Elasticity*. Elsevier, Newyork. pp. 234~267.  
 (6) D.J. Ewins 1973 *Journal Mechanical Engineering Science* 15(3), 165-185. Vibration Characteristics of Bladed Disc Assemblies.  
 (7) F. Kushner 1980 *Journal of Mechanical Design* 102, 579-584. Disc Vibration-Rotating Blade and Stationary Vane Interaction.  
 (8) V. Omprakash and V. Ramamurti 1988 *Journal of Sound and Vibration* 125(2), 357~366. Natural Frequencies of Bladed Disks by a Combined Cyclic Symmetry and Rayleigh-Ritz Method.  
 (9) S.H. Crandall and J. Dugundji 1980 *IMEchE*, C290/80 265~270. Forced Backward Whirling of Aircraft Propeller-Engine Systems.  
 (10) N. Hagawara, Y. Ono and H. Iizima 1985 *JSME* 51(463), 555~564. Forward and Backward Whirling Natural Frequencies of Blade Group.  
 (11) F. Wu and G.T. Flowers 1992 *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 114, 242~248. A Transfer Matrix Technique for Evaluating the Natural Frequencies and Critical Speeds of a Rotor with Multiple Flexible Disks.  
 (12) M. Sakata, K. Kimura and S.K. Park 1989 *Journal of Sound and Vibration* 131(3), 417~430. Vibration of Bladed Flexible Rotor Due to Gyroscopic Moment.  
 (13) N. Khader and R.G. Loewy 1990 *Journal of Sound and Vibration* 139(3), 469~485. Shaft Flexibility Effects on the Forced Response of a Bladed-Disk Assembly.

- (14) S. Okamoto, M. Sakata, K. Kimura and H. Ohnabe 1992 *JSME* 58(548), 1004~1011. Finite Element Vibration Analysis of a Flexible Rotor Subjected to Base Excitation.
- (15) W. Zhang et al. 1994 *Proceedings of the Fourth International Conference on Rotor Dynamics*, 63~68. Analytical and Experimental Investigation of Bladed-Disk/Shaft Coupled System.
- (16) A.L. Hale and L. Meirovitch 1980 *Journal of Sound and Vibration* 69(2), 309-326. A General Substructure Synthesis Method for the Dynamic Simulation of Complex Structures.
- (17) L. Meirovitch 1967 *Analytical Methods in Vibrations*. The Macmillan Company Collier-Macmillan Limited, London. pp. 233~235.
- (18) W.R. Chen and L.M. Keer 1993 *Journal of Vibration and Acoustics* 115, 285~294. Transverse Vibrations of a Rotating Twisted Timoshenko Beam Under Axial Loading.
- (19) C.W. Lee 1993 *Vibration Analysis of Rotors*. Kluwer Academic Publishers. pp. 156~159.
- (20) 전상복, 1996, "가정모드 및 부분 구조 합성법을 이용한 탄성 회전체의 연성 굽힘 진동 해석", 박사학위 논문, 기계공학과, 한국과학기술원.

**Appendix A : Radial And Circumferential Stress; Laplacian; And Flexural Rigidity**

$$\sigma_r = \frac{\rho_D \Omega^2}{8} \left[ -(3+\nu)r^2 + \frac{(1+\nu) \left\{ \frac{8f_0 R_2^2}{\rho_D \Omega^2} + (3+\nu)R_2^4 + (1-\nu)R_1^4 \right\}}{\{(1+\nu)R_2^2 + (1-\nu)R_1^2\}} - \frac{R_2^2 R_1^2 (1-\nu) \left\{ \frac{-8f_0}{\rho_D \Omega^2} + (1+\nu)R_1^2 - (3+\nu)R_2^2 \right\}}{r^2 \{(1+\nu)R_2^2 + (1-\nu)R_1^2\}} \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho_D \Omega^2}{8} \left[ -(1+3\nu)r^2 + \frac{(1+\nu) \left\{ \frac{8f_0 R_2^2}{\rho_D \Omega^2} + R_2^4(3+\nu) + R_1^4(1-\nu) \right\}}{\{(1+\nu)R_2^2 + (1-\nu)R_1^2\}} + \frac{R_2^2 R_1^2 (1-\nu) \left\{ \frac{-8f_0}{\rho_D \Omega^2} + (1+\nu)R_1^2 - (3+\nu)R_2^2 \right\}}{r^2 \{(1+\nu)R_2^2 + (1-\nu)R_1^2\}} \right]$$

where ,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$  ,  $D = \frac{E_D h_D^3}{12(1-\nu^2)}$  ,  $f_0 = \frac{\rho_B A_B \Omega^2 \left( R_2 L + \frac{L^2}{2} \right) N}{2\pi R_2 h_D}$

and  $E_D$  is the Young's modulus.

**Appendix B : Discretized Total Kinetic And Potential Energy Functions**

$T = T_S + T_D + T_B$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \dot{Q}_V^T M_S \dot{Q}_V + \frac{1}{2} \dot{Q}_W^T M_S \dot{Q}_W + \frac{1}{2} \Omega^2 \dot{Q}_V^T K_S^{(1)} \dot{Q}_V + \frac{1}{2} \Omega^2 \dot{Q}_W^T K_S^{(1)} \dot{Q}_W + \Omega \dot{Q}_V^T K_S^{(1)} \dot{Q}_V - \Omega \dot{Q}_V^T M_S \dot{Q}_W + \frac{1}{2} \dot{Q}_{D\zeta}^T M_D \dot{Q}_{D\zeta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{D\eta}^T M_D \dot{Q}_{D\eta} \\ &- \dot{Q}_W^T M_{SD} \dot{Q}_{D\eta} - \Omega \dot{Q}_V^T M_{SD} \dot{Q}_{D\eta} - \Omega \dot{Q}_V^T M_{SD} \dot{Q}_{D\zeta} + \dot{Q}_W^T M_{SD} \dot{Q}_{D\zeta} - \Omega \dot{Q}_V^T M_{SD} \dot{Q}_{D\eta} + \Omega^2 \dot{Q}_W^T M_{SD} \dot{Q}_{D\eta} + \Omega \dot{Q}_W^T M_{SD} \dot{Q}_{D\zeta} + \Omega^2 \dot{Q}_V^T M_{SD} \dot{Q}_{D\zeta} \\ &+ \frac{1}{2} \dot{Q}_{U\zeta}^T M_U \dot{Q}_{U\zeta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{U\eta}^T M_U \dot{Q}_{U\eta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{V\zeta}^T M_V \dot{Q}_{V\zeta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{V\eta}^T M_V \dot{Q}_{V\eta} + \frac{1}{2} \Omega^2 \sin^2 \phi \dot{Q}_{U\zeta}^T M_U \dot{Q}_{U\zeta} + \frac{1}{2} \Omega^2 \sin^2 \phi \dot{Q}_{U\eta}^T M_U \dot{Q}_{U\eta} + \Omega^2 \dot{Q}_{U\zeta}^T C_{UV} \dot{Q}_{V\zeta} \\ &+ \Omega^2 \sin 2\phi \dot{Q}_{U\eta}^T C_{UV} \dot{Q}_{V\eta} + \frac{1}{2} \Omega^2 \cos^2 \phi \dot{Q}_{V\zeta}^T M_V \dot{Q}_{V\zeta} + \frac{1}{2} \Omega^2 \cos^2 \phi \dot{Q}_{V\eta}^T M_V \dot{Q}_{V\eta} + \Omega^2 \sin \phi \dot{Q}_{D\zeta}^T C_{DV} \dot{Q}_{V\zeta} + \Omega^2 \sin \phi \dot{Q}_{D\eta}^T C_{DV1} \dot{Q}_{V\eta} \\ &+ \Omega^2 \cos \phi \dot{Q}_{D\zeta}^T C_{DU} \dot{Q}_{U\zeta} - \Omega^2 \cos \phi \dot{Q}_{D\eta}^T C_{DU} \dot{Q}_{U\eta} - \frac{1}{2} \Omega^2 \dot{Q}_{D\zeta}^T K_D^{(1)} \dot{Q}_{D\zeta} - \frac{1}{2} \Omega^2 \dot{Q}_{D\eta}^T K_D^{(1)} \dot{Q}_{D\eta} + \cos \phi \dot{Q}_{D\zeta}^T M_{DU} \dot{Q}_{U\zeta} + \cos \phi \dot{Q}_{D\eta}^T M_{DU} \dot{Q}_{U\eta} \\ &- \sin \phi \dot{Q}_{D\zeta}^T M_{DV} \dot{Q}_{V\zeta} - \sin \phi \dot{Q}_{D\eta}^T M_{DV} \dot{Q}_{V\eta} + \Omega \sin \phi \dot{Q}_{D\eta}^T C_{DV}^{(2)} \dot{Q}_{V\zeta} - \Omega \sin \phi \dot{Q}_{D\zeta}^T C_{DV}^{(2)} \dot{Q}_{V\eta} + \Omega \sin \phi \dot{Q}_{D\eta}^T C_{DV}^{(2)} \dot{Q}_{V\zeta} - \Omega \sin \phi \dot{Q}_{D\zeta}^T C_{DV}^{(2)} \dot{Q}_{V\eta} \\ &- \Omega \cos \phi \dot{Q}_{D\eta}^T C_{DU}^{(2)} \dot{Q}_{U\zeta} + \Omega \cos \phi \dot{Q}_{D\zeta}^T C_{DU}^{(2)} \dot{Q}_{U\eta} - \Omega \cos \phi \dot{Q}_{D\eta}^T C_{DU}^{(2)} \dot{Q}_{U\zeta} + \Omega \cos \phi \dot{Q}_{D\zeta}^T C_{DU}^{(2)} \dot{Q}_{U\eta} + \sin \phi \dot{Q}_{U\eta}^T M_{SU} \dot{Q}_W + \Omega \sin \phi \dot{Q}_{U\eta}^T M_{SU} \dot{Q}_V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos\phi \dot{Q}_{V\eta}^T M_{SV} \dot{Q}_W + \Omega \cos\phi \dot{Q}_{V\eta}^T M_{SV} \dot{Q}_V + \sin\phi \dot{Q}_{U\eta}^T M_{SU} \dot{Q}_V + \Omega \sin\phi \dot{Q}_{U\eta}^T M_{SU} \dot{Q}_W + \cos\phi \dot{Q}_{V\zeta}^T M_{SV} \dot{Q}_V - \Omega \phi \dot{Q}_{V\zeta}^T M_{SV} \dot{Q}_W \\
 & - \Omega \sin\phi \dot{Q}_{U\eta}^T M_{SU} \dot{Q}_V + \Omega^2 \sin\phi \dot{Q}_{U\eta}^T M_{SU} \dot{Q}_W - \Omega \cos\phi \dot{Q}_{V\eta}^T M_{SV} \dot{Q}_V + \Omega^2 \cos\phi \dot{Q}_{V\eta}^T M_{SV} \dot{Q}_W + \Omega \sin\phi \dot{Q}_{U\zeta}^T M_{SU} \dot{Q}_W \\
 & + \Omega^2 \sin\phi \dot{Q}_{U\zeta}^T M_{SU} \dot{Q}_V + \Omega \cos\phi \dot{Q}_{V\zeta}^T M_{SV} \dot{Q}_W + \Omega^2 \cos\phi \dot{Q}_{V\zeta}^T M_{SV} \dot{Q}_V + \dot{Q}_V^T C_{SD}^{(2)} \dot{Q}_{D\eta} + \cos\phi \dot{Q}_V^T C_{SU}^{(2)} \dot{Q}_{U\eta} - \sin\phi \dot{Q}_V^T C_{SV}^{(2)} \dot{Q}_{V\eta} \\
 & - \Omega \dot{Q}_W^T C_{SD}^{(2)} \dot{Q}_{D\eta} - \Omega \cos\phi \dot{Q}_W^T C_{SU} \dot{Q}_{U\eta} + \Omega \sin\phi \dot{Q}_W^T C_{SV} \dot{Q}_{V\eta} - \Omega \dot{Q}_W^T C_{SD}^{(1)} \dot{Q}_{D\eta} - \Omega \cos\phi \dot{Q}_W^T C_{SU} \dot{Q}_{U\eta} + \Omega \sin\phi \dot{Q}_W^T C_{SV} \dot{Q}_{V\eta} \\
 & - \Omega^2 \dot{Q}_V^T C_{SD}^{(1)} \dot{Q}_{D\eta} - \Omega^2 \cos\phi \dot{Q}_V^T C_{SU} \dot{Q}_{U\eta} + \Omega^2 \sin\phi \dot{Q}_V^T C_{SV} \dot{Q}_{V\eta} - \dot{Q}_W^T C_{SD}^{(2)} \dot{Q}_{D\zeta} - \cos\phi \dot{Q}_W^T C_{SU} \dot{Q}_{U\zeta} + \sin\phi \dot{Q}_W^T C_{SV} \dot{Q}_{V\zeta} \\
 & - \Omega \dot{Q}_V^T C_{SD}^{(2)} \dot{Q}_{D\zeta} - \Omega \cos\phi \dot{Q}_V^T C_{SU} \dot{Q}_{U\zeta} + \Omega \sin\phi \dot{Q}_V^T C_{SV} \dot{Q}_{V\zeta} - \Omega \dot{Q}_W^T C_{SD}^{(1)} \dot{Q}_{D\zeta} - \Omega \cos\phi \dot{Q}_W^T C_{SU} \dot{Q}_{U\zeta} \\
 & + \Omega \sin\phi \dot{Q}_W^T C_{SV} \dot{Q}_{V\zeta} + \Omega^2 \dot{Q}_W^T C_{SD}^{(1)} \dot{Q}_{D\zeta} + \Omega^2 \cos\phi \dot{Q}_W^T C_{SU} \dot{Q}_{U\zeta} - \Omega^2 \sin\phi \dot{Q}_W^T C_{SV} \dot{Q}_{V\zeta} - \dot{Q}_{D\zeta}^T C_{SD}^{(3)} \dot{Q}_W \\
 & - \Omega \dot{Q}_{D\zeta}^T C_{SD}^{(3)} \dot{Q}_V + \dot{Q}_{D\eta}^T C_{SD}^{(3)} \dot{Q}_V - \Omega \dot{Q}_{D\eta}^T C_{SD}^{(3)} \dot{Q}_W - \Omega \dot{Q}_{D\zeta}^T C_D \dot{Q}_{D\eta} + \Omega \dot{Q}_{D\eta}^T C_D \dot{Q}_{D\zeta},
 \end{aligned}$$

$$U = U_S + U_D + U_B$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{1}{2} \dot{Q}_V^T K_S^{(2)} \dot{Q}_V + \frac{1}{2} \dot{Q}_W^T K_S^{(2)} \dot{Q}_W + \frac{1}{2} \dot{Q}_{D\zeta}^T K_D^{(2)} \dot{Q}_{D\zeta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{D\eta}^T K_D^{(2)} \dot{Q}_{D\eta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{U\zeta}^T K_U \dot{Q}_{U\zeta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{U\eta}^T K_U \dot{Q}_{U\eta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{V\zeta}^T K_V \dot{Q}_{V\zeta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{V\eta}^T K_V \dot{Q}_{V\eta} \\
 & + \frac{1}{2} \dot{Q}_{U\zeta}^T K_{UV} \dot{Q}_{V\zeta} + \frac{1}{2} \dot{Q}_{U\eta}^T K_{UV} \dot{Q}_{V\eta}
 \end{aligned}$$

Appendix C : Element Matrices Used In The Equations Of Motion

$$\begin{aligned}
 C_D & = \frac{\rho_B N}{2R_2} \left[ \int_0^L \mathbf{1}_{Bz} dl \right] \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2}^T \boldsymbol{\Phi}'_D \Big|_{R_2} - \left\{ \int_0^L (\mathbf{1}_{Bx} - \mathbf{1}_{By}) \cos 2(\phi + \kappa l) dl \right\} \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2}^T \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2} \Big] \\
 C_{DU} & = \frac{\rho_B N}{2} \boldsymbol{\Phi}'_D \Big|_{R_2}^T \int_0^L A_B (R_2 + l) \boldsymbol{\Phi}_U dl \\
 C_{DU2} & = \frac{\rho_B N}{2} \int_0^L A_B \frac{R_2 + l}{R_2} \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2}^T \boldsymbol{\Phi}_U dl \\
 C_{DV} & = \frac{\rho_B N}{2} \boldsymbol{\Phi}'_D \Big|_{R_2}^T \int_0^L A_B (R_2 + l) \boldsymbol{\Phi}_V dl \\
 C_{DV2} & = \frac{\rho_B N}{2} \int_0^L A_B \frac{R_2 + l}{R_2} \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2}^T \boldsymbol{\Phi}_V dl \\
 C_{SD}^{(1)} & = \frac{\rho_B N}{2} \left[ \boldsymbol{\Phi}'_S \Big|_0^T \boldsymbol{\Phi}'_D \Big|_{R_2} \int_0^L \left\{ A_B (R_2 + l) l - (\mathbf{1}_{By} \cos^2(\phi + \kappa l) + \mathbf{1}_{Bx} \sin^2(\phi + \kappa l)) \right\} dl \right. \\
 & \quad \left. + \boldsymbol{\Phi}'_S \Big|_0^T \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2} \int_0^L \left\{ \frac{1}{R_2} (\mathbf{1}_{Bx} - \mathbf{1}_{By}) \cos 2(\phi + \kappa l) + A_B (R_2 + l) \right\} dl \right] \\
 C_{SD}^{(2)} & = \frac{\rho_B N}{2} \left[ \boldsymbol{\Phi}'_S \Big|_0^T \boldsymbol{\Phi}'_D \Big|_{R_2} \int_0^L \left\{ A_B (R_2 + l) l + (\mathbf{1}_{By} \cos^2(\phi + \kappa l) + \mathbf{1}_{Bx} \sin^2(\phi + \kappa l)) \right\} dl + \boldsymbol{\Phi}'_S \Big|_0^T \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2} \int_0^L \left\{ A_B (R_2 + l) \right\} dl \right] \\
 C_{SD}^{(3)} & = \frac{\rho_B N}{2R_2} \left\{ \int_0^L \mathbf{1}_{Bz} dl \right\} \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2}^T \boldsymbol{\Phi}'_S \Big|_0 \\
 C_{SU} & = \frac{\rho_B N}{2} \boldsymbol{\Phi}'_S \Big|_0^T \int_0^L \left\{ A_B (R_2 + l) \boldsymbol{\Phi}_U \right\} dl \\
 C_{SV} & = \frac{\rho_B N}{2} \boldsymbol{\Phi}'_S \Big|_0^T \int_0^L \left\{ A_B (R_2 + l) \boldsymbol{\Phi}_V \right\} dl \\
 C_{UV} & = \frac{\rho_B N}{4} \int_0^L A_B \boldsymbol{\Phi}_U^T \boldsymbol{\Phi}_V dl \\
 K_D^{(1)} & = \frac{\rho_B N}{2} \left[ \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2}^T \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2} \int_0^L \left\{ A_B (R_2 + l) l - (\mathbf{1}_{By} \cos^2(\phi + \kappa l) + \mathbf{1}_{Bx} \sin^2(\phi + \kappa l)) \right\} dl + \frac{1}{R_2^2} \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2}^T \boldsymbol{\Phi}_D \Big|_{R_2} \int_0^L \left\{ (\mathbf{1}_{Bx} - \mathbf{1}_{By}) \cos 2(\phi + \kappa l) \right\} dl \right]
 \end{aligned}$$

$$K_D^{(2)} = \pi \int_{R_1}^{R_2} \left[ Dr \Phi_D^T \Phi_D + \left\{ \frac{D(3-2\nu)}{r} + h_D r \sigma_r \right\} \Phi_D^T \Phi_D + \left\{ \frac{D(3-2\nu)}{r^3} + \frac{h_D \sigma_\theta}{r} \right\} \Phi_D^T \Phi_D + 2D\nu \Phi_D^{*T} \Phi_D' - \frac{2D\nu}{r} \Phi_D^{*T} \Phi_D - \frac{2D(3-2\nu)}{r^2} \Phi_D^{*T} \Phi_D \right] dr$$

$$K_{S1} = \rho \int_0^S \left( A_S \Phi_S^T \Phi_S - I_{Sy} \Phi_S^T \Phi_S \right) dS + \left( M_D + \rho N \int_0^L A_B dl \right) \Phi_S \Big|_{s_3}^T \Phi_S \Big|_{s_3} + \left[ -J_{Dy} - \frac{1}{2} \rho N \int_0^L \left\{ A_B (R_2 + l)^2 + I_{Bz} - 3(I_{By} C_{\phi+kl}^2 + I_{Bx} S_{\phi+kl}^2) \right\} dl \right] \Phi_S \Big|_{s_3}^T \Phi_S \Big|_{s_3}$$

$$K_S^{(2)} = E_S \int_0^S \left( I_{Sy} \Phi_S^{*T} \Phi_S' \right) dS$$

$$K_U = \frac{N}{2} \int_0^L \left( E_B I_{By} \Phi_U^{*T} \Phi_U' + F_l \Phi_U^{*T} \Phi_U' \right) dl$$

$$K_{UV} = \frac{NE_B}{2} \int_0^L \left\{ I_{Bcy} \Phi_U^{*T} \Phi_V' dl \right\}$$

$$K_V = \frac{N}{2} \int_0^L \left( E_B I_{Bx} \Phi_V^{*T} \Phi_V' + F_l \Phi_V^{*T} \Phi_V' \right) dl$$

$$M_D = \pi \rho_D \int_{R_1}^{R_2} \left( h_D r \Phi_D^T \Phi_D \right) dr + \frac{\rho_B N}{2} \int_0^L \left( A_B + \frac{I_{Bz}}{R_2^2} \right) dl \Phi_D \Big|_{R_2}^T \Phi_D \Big|_{R_2} + \frac{\rho_B N}{2} \int_0^L \left( A_B l^2 + I_{By} \cos^2(\phi + \kappa l) + I_{Bx} \sin^2(\phi + \kappa l) \right) dl \Phi_D \Big|_{R_2}^T \Phi_D \Big|_{R_2} + \rho_B N \int_0^L (A_B l) dl \Phi_D \Big|_{R_2}^T \Phi_D \Big|_{R_2}$$

$$M_{DU} = \frac{\rho_B N}{2} \left( \Phi_D \Big|_{R_2}^T \int_0^L A_B \Phi_U dl + \Phi_D \Big|_{R_2}^T \int_0^L A_B l \Phi_U dl \right)$$

$$M_{DV} = \frac{\rho_B N}{2} \left( \Phi_D \Big|_{R_2}^T \int_0^L A_B \Phi_V dl + \Phi_D \Big|_{R_2}^T \int_0^L A_B l \Phi_V dl \right)$$

$$M_S = \rho \int_0^S \left( A_S \Phi_S^T \Phi_S + I_{Sy} \Phi_S^T \Phi_S \right) dS + \left( M_D + \rho N \int_0^L A_B dl \right) \Phi_S \Big|_{s_3}^T \Phi_S \Big|_{s_3} + \left[ J_{Dy} + \frac{1}{2} \rho N \int_0^L \left\{ A_B (R_2 + l)^2 + I_{Bz} + (I_{By} C_{\phi+kl}^2 + I_{Bx} S_{\phi+kl}^2) \right\} dl \right] \Phi_S \Big|_{s_3}^T \Phi_S \Big|_{s_3}$$

$$M_{SD} = \pi \rho_D \Phi_S \Big|_0^T \int_{R_1}^{R_2} h_D r^2 \Phi_D dr$$

$$M_{SU} = \frac{\rho_B N}{2} \left( \int_0^L A_B \Phi_U^T dl \right) \Phi_S \Big|_0$$

$$M_{SV} = \frac{\rho_B N}{2} \left( \int_0^L A_B \Phi_V^T dl \right) \Phi_S \Big|_0$$

$$M_U = \frac{\rho_B N}{2} \int_0^L A_B \Phi_U^T \Phi_U dl$$

$$M_V = \frac{\rho_B N}{2} \int_0^L A_B \Phi_V^T \Phi_V dl$$

Appendix D : Nomenclature

- $A_B, A_S$  : Cross-sectional areas
- $D$  : Flexural rigidity
- $E_B, E_D, E_S$  : Young's moduli
- $F_l$  : In-plane centrifugal force acting on the blade at a distance of  $l$  from the blade root
- $f_0$  : Centrifugal stress induced by the rotation of blades at the edge of disk

- $h_D$  : Thickness  
 $I_{Bx}, I_{By}$  : Principal area moments of inertia about the  $X_5$  and  $Y_5$  axes respectively  
 $I_{Sy}$  : Area moment of inertia about the  $Y_1$  axis  
 $\hat{I}_{Bx}, \hat{I}_{By}$  : Second area moments of inertia about the  $X_4$  and  $Y_4$  axes  
 $\hat{I}_{Bxy}$  : Area product of inertia about the  $X_4$  and  $Y_4$  axes  
 $J_{Dx}, J_{Dy}$  : Mass moments of inertia about the  $X_2$  and  $Y_2$  axes  
 $L$  : Blade length  
 $l$  : Linear coordinate for the blade  
 $\mathcal{L}$  : System Lagrangian  
 $M_D$  : Mass  
 $N$  : Number of blades  
 $Q_{Dx}, Q_{Dh}, Q_{Lx}, Q_{Lh}, Q_r, Q_v, Q_x, Q_h$  : Vectors consisting of generalized coordinates  
 $q_r$  : Generalized independent coordinates  
 $R_1, R_2$  : Inner and outer radii of the disk  
 $(r, \theta)$  : Polar coordinate for the disk  
 $(r_B, \theta_B)$  : Polar coordinate for the blade  
 $S$  : Length of the shaft  
 $T, T_B, T_D, T_S$  : Kinetic energies  
 $U, U_B, U_{Bb}, U_{Bc}, U_D, U_S$  : Strain energies  
 $u_{Bi}, v_{Bi}$  : Displacements of the  $i$ -th blade along the  $X_4$  and  $Y_4$  axes  
 $u_D$  : Displacement with respect to the  $X_2$  axis  
 $v_0, w_0$  : Displacements of the shaft at disk location with respect to the  $Y_1$  and  $Z_1$  axes  
 $v_S, w_S$  : Displacements of the shaft with respect to the  $Y_1$  and  $Z_1$  axes  
 $W$  : Blade width  
 $Z_D, Z_U, Z_V, Z_S$  : Generalized coordinates of complex form  
 $F_D, F_S, F_U, F_V$  : Vectors consisting of admissible functions  
 $\nabla^2$  : Laplacian  
 $\kappa$  : Twist angle per unit blade length  
 $\kappa L$  : Total pretwist angle  
 $\nu$  : Poisson's ratio  
 $\rho_B, \rho_D, \rho_S$  : Is the mass density  
 $\sigma_B, \sigma_\theta$  : Radial and circumferential stresses  
 $\Omega$  : Rotational speed of the shaft  
 $\phi$  : Stagger angle  
 $\Psi_i$  : Angle between the reference blade and the  $i$ -th blade  
 $\Psi_i^{(k)}$  : Angle between the  $(k)$ -th and the  $(k-1)$ -th nodal lines  
**Subscripts**  
 $B$  : Blade  
 $D$  : Disk  
 $S$  : Shaft  
 $R_2, 0$  : Values evaluated at the disk outer radius and the disk center