

STWS를 이용한 최적제어의 대수적 접근에 관한 연구

An Algebraic Approach to Optimal Control using STWS

오 현 철, 김 윤 상, 안 두 수

(Hyun-Cheol Oh, Yoon-Sang Kim and Doo-Soo Ahn)

Abstract : This paper presents an algebraic approach to optimal control for time invariant continuous system using STWS(single term Walsh series). In optimal control, it is well known that the design problem with quadratic performance criteria often involves the determination of time-varying feedback gain matrix by solving the matrix nonlinear Riccati equation and of command signal by solving the integral equation, which makes design procedure quite difficult. Therefore, in order to resolve this problem, this paper is introduced to STWS. In this paper, the time-varying feedback gains and command signals are determined by piecewise constant gains which can be easily obtained from algebraic equation using STWS.

Keywords : an algebraic approach, STWS, optimal control

I. 서론

상태공간 영역에서 제어시스템 설계는 페루프계의 안정화를 목적으로 하는 레귤레이터 설계와 플랜트의 출력이 기준입력을 잘 추종하도록 하는 설계 방법이 있다. 레귤레이터는 플랜트의 상태변수를 가능한 빨리 평형점에 근접시키는 것을 설계 목적으로 하는 반면 추종문제는 전체 페루프 시스템이 안정해야 할뿐만 아니라, 플랜트의 출력이 기준입력을 잘 추종하도록 설계되어야 한다.

이와 같은 추종문제는 실제로 온도제어, 자동차의 속도제어, 레이더를 이용한 비행 물체의 추적, 등의 다양한 분야에서 응용되고 있다[1].

일반적으로 최적제어에서 플랜트가 선형인 경우 2차 평가지표를 정의하고 이를 최소화함으로써 선형제어기를 설계할 수 있다. 이러한 추종문제의 선형제어기에서 최적 제어입력은 상태궤환 이득행렬과 기준입력의 예측값인 명령신호로 구성된다. 그런데, 유한시간 최적추종제어기를 설계하는 과정에서 상태궤환 이득행렬을 구하기 위해서는 비선형 행렬 미분방정식인 리카티 방정식을 풀어야 할뿐만 아니라, 명령신호를 예측하기 위한 적분형태의 방정식의 해를 구해야 하는 어려움이 있다[2].

이러한 문제를 해결하기 위하여 C. F. Chen과 C. H. Hsiao는 2차 평가 지표를 갖는 선형시스템에 대하여 월쉬함수를 적용함으로써 대수방정식으로부터 간편하게 궤환이득을 결정할 수 있는 방법을 제시하였다[3-5]. 그러나 이 방법은 n차 시스템의 최적 제어입력을 결정하는데 있어서 전개항수가 m인 경우 크로네커 곱과 $nm \times nm$ 차의 역변환으로 인하여 반올림 또는 절삭 오차가 발생하는 문제점을 내포하고 있다.

따라서 본 논문에서는 STWS를 이용한 최적 제어의 대수적 접근방법을 제시하고자 한다. 제안된 방법은 최적 제어기를 설계하는 과정에서 비선형 리카티 미분방정

식으로 나타나는 기존의 방법으로 해를 직접 구하지 않고 해밀토니안 상태방정식으로 알려진 2점 경계치 문제(TPBVP : Two Point Boundary Value Problem)에 STWS를 적용하여 보다 쉽게 해를 얻을 수 있는 반복된 형태의 대수방정식으로부터 상태궤환 이득을 결정하며, 추종 과정에 나타나는 적분방정식에 STWS를 이용함으로써 반복적인 대수방정식으로 변환하여 명령신호를 구하는 간단한 알고리즘을 제시한다.

따라서, 제안된 방법은 연속시간 시스템에서 최적제어입력을 구하는 과정에 있어서 반복적 형태의 변환된 대수방정식으로부터 직접 제어입력을 결정할 수 있는 장점이 있다. 또한, STWS를 이용한 제안한 방법은 연속계로 표현되는 시스템의 제어입력을 각 구간 이산화 된 값으로 직접 얻을 수 있기 때문에 컴퓨터의 적용이 쉽고, 실제 제어기 구현이 간편할 것으로 사료된다.

II. 월쉬함수 단일항 전개(STWS)

월쉬함수 유한급수 전개시 발생하는 문제점[3-5]을 해결하기 위해 Palanisamy등은 미소 구간에 월쉬함수 단일항만을 반복적으로 적용하므로 유한급수 전개와 같은 결과를 얻을 수 있는 STWS를 제안하였다. 이는 전개항수 제약과 연산 부담 문제를 해결함으로써 디지털 컴퓨터의 적용을 용이하게 하였고 널리 응용되고 있다[6].

n차 선형 시불변 시스템의 해를 결정하기 위한 STWS 접근방법은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

여기서, \mathbf{x} 와 \mathbf{u} 는 상태벡터(state vector)와 입력벡터(input vector)이고, 각각 $\mathbf{x} \in R^{n \times 1}$, $\mathbf{u} \in R^{r \times 1}$ 이다. 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 STWS를 적용하기 위해 $t = (t_f/m)\tau$ 로 치환하면 다음과 같고, m은 전개항수로서 임의의 정수이다.

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{t_f}{m} \mathbf{A} \mathbf{x}(\tau) + \frac{t_f}{m} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) \quad (2)$$

정규화된 구간 $\tau \in [0, 1]$ 에서 $\dot{\mathbf{x}}(\tau)$, $\mathbf{x}(\tau)$, $\mathbf{u}(\tau)$ 를

각각 STWS를 이용하여 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{H}_1 \phi_0(\tau) \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{X}_1 \phi_0(\tau) \quad (4)$$

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{U}_1 \phi_0(\tau) \quad (5)$$

여기서, $\phi_0(\tau)$ 는 월쉬함수 전개시의 기저 함수가 되는 $\phi(\tau) = [\phi_0(\tau), \dots, \phi_{m-1}(\tau)]^T$ 인 월쉬함수 벡터의 첫번째에 해당되는 월쉬함수 단일항이며, STWS 전개시의 기저함수로 $\phi_0(\tau) = 1$ 이다. 또한, $\mathbf{H}_1, \mathbf{X}_1, \mathbf{U}_1$ 은 각각 구간 $\tau \in [0, 1)$ ($t \in [0, t_f/m)$)에서 $\dot{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)$ 의 STWS 전개시 $\phi_0(\tau)$ 에 대응되는 STWS 계수값들이다. 정규화된 구간 $\tau \in [0, 1)$ 에서 (3)의 양변에 적분을 취하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{H}_1 \int_0^\tau \phi_0(\alpha) d\alpha \quad (6)$$

(6) 우변의 적분은 다음과 같이 월쉬함수 단일항 $\phi_0(\tau)$ 만으로 다시 표현할 수 있다.

$$\int_0^\tau \phi_0(\alpha) d\alpha = \mathbf{E}_{(1 \times 1)} \phi_0(\tau) = \frac{1}{2} \phi_0(\tau) \quad (7)$$

단, $\mathbf{E}_{(1 \times 1)} = \frac{1}{2}$ 이며, $\mathbf{E}_{(1 \times 1)}$ 은 적분연산행렬 \mathbf{E} 의 첫번째 요소로 $\phi_0(\tau)$ 에 대응되는 값이다[6-7]. (6)의 좌변을 STWS를 이용하여 나타낸 후, 양변의 $\phi_0(\tau)$ 를 소거하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{H}_1 + \mathbf{X}(0) \quad (8)$$

또한, (3)에 최소자승법과 $\phi_0(\tau) = 1$ 을 이용하면 다음의 관계가 성립된다.

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{H}_1 + \mathbf{x}(0) \quad (9)$$

(2)에 (3), (4), (5)를 대입하고 양변의 $\phi_0(\tau)$ 를 소거하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\mathbf{H}_1 = \frac{t_f}{m} \mathbf{A} \mathbf{X}_1 + \frac{t_f}{m} \mathbf{B} \mathbf{U}_1 \quad (10)$$

(10)에 (8)을 대입하여 \mathbf{H}_1 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_1 = \left[\mathbf{I} - \frac{t_f}{2m} \mathbf{A} \right]^{-1} \left[\frac{t_f}{m} \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \frac{t_f}{m} \mathbf{B} \mathbf{U}_1 \right] \quad (11)$$

결국, (11)로부터 \mathbf{H}_1 을 결정할 수 있고, 이를 이용하여 (8)과 (9)에서 \mathbf{X}_1 과 다음 구간에서의 초기조건 $\mathbf{x}(1)$ 을 결정할 수 있다. 이러한 과정을 반복하면 임의의 i 구간에서도 성립하는 반복적인 알고리즘을 구할 수 있다.

III. STWS를 이용한 최적제어의 대수적 접근

1. 최적제어

선형 시불변 연속계 시스템이 다음과 같이 표현하자.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

다음과 같이 정의된 평가함수

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)]^T \mathbf{H} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)] \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ [\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \} dt \end{aligned} \quad (13)$$

단, \mathbf{H}, \mathbf{Q} : real symmetric positive semi-definite matrix
 \mathbf{R} : real symmetric positive definite matrix을 최소화하는 최적 제어입력 $\mathbf{u}^*(t)$ 를 구하는 과정은 다음과 같다.

최대원리에 의해 해밀토니안 \mathbf{H} 는

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)] \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \mathbf{P}^T(t) [\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)] \end{aligned} \quad (14)$$

로 주어진다.

상호상태방정식(costate equation)은

$$\dot{\mathbf{P}}^*(t) = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q} \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}^T \mathbf{P}^*(t) + \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) \quad (15)$$

과 같이 나타난다. 또한 다음과 같은 관계를 만족하여야 한다.

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R} \mathbf{u}^*(t) + \mathbf{B}^T \mathbf{P}^*(t) \quad (16)$$

따라서, (15), (16)의 구속조건을 만족되도록 최적 제어입력 $\mathbf{u}^*(t)$ 는 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^*(t) \quad (17)$$

(12)에 (17)을 대입하고 (15)로부터 다음과 같은 해밀토니안 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^*(t) \\ \dot{\mathbf{P}}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \mathbf{P}^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서 $\mathbf{Q} \mathbf{r}(t)$ 는 강제함수(forcing function)이다.

(18)은 선형 시불변이며 해는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t_f) \\ \mathbf{P}^*(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \mathbf{P}^*(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \mathbf{r}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (19)$$

$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{0}$ 의 조건을 이용하면 $\mathbf{P}^*(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(t) &= [\Phi_{22}(t_f, t) - \mathbf{H} \Phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [\mathbf{H} \Phi_{11}(t_f, t) - \Phi_{21}(t_f, t)] \mathbf{x}^*(t) \\ &+ [\Phi_{22}(t_f, t) - \mathbf{H} \Phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [\mathbf{H} \mathbf{f}_1(t) - \mathbf{H} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{f}_2(t)] \\ &\triangleq \mathbf{K}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{s}(t) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, 식의 우변의 적분항을 $\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}$ 으로 나타내었다.

따라서, 추종문제의 최적제어벡터는

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{s}(t) \\ &\triangleq \mathbf{F}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

이다. $\mathbf{F}(t)$ 는 궤환이득행렬, $\mathbf{v}(t)$ 는 명령신호이며 시스템의 파라미터와 기준입력 $\mathbf{r}(t)$ 의 영향을 받는다. 그리고 기준신호의 예측값이다[2]. 궤환이득행렬을 구하기 위해서는 비선형 리카티 행렬 미분방정식 $\mathbf{K}(t)$ 를 구하고, 명령신호 $\mathbf{v}(t)$ 를 구하기 위하여 적분항을 갖고 있는 $\mathbf{s}(t)$ 를 구하여야 한다.

본 연구에서는 위와 같은 최적제어입력을 결정하기 위하여 월쉬함수 단일항 전개(STWS)를 이용한 간단한 대수적 접근방법을 제시하고자 한다. 제어의 목적은 시스템 상태 $\mathbf{x}(t)$ 가 기준입력 $\mathbf{r}(t)$ 를 추종하도록 설계한다.

2. STWS를 이용한 최적제어의 대수적 접근

최적제어입력을 결정하기 위하여 월쉬함수 단일항 전개(STWS)를 이용한 간단한 대수적 접근방법을 제시하기 위하여 (18)을 이용하면, (18)의 표준형 방정식의 상태전이 행렬과 최종조건은 다음과 같다.

$$\Phi(t_f, t_f) = \mathbf{I} \tag{21}$$

$$\dot{\Phi}(t_f, t) = -\mathbf{M}\Phi(t_f, t) \tag{22}$$

$$\text{단, } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}$$

II절에서 언급한 것처럼 STWS는 $t \in [0, 1]$ 에서 정의되므로 $\tau = (m/t_f)t = (1/\Delta t)t$ 로 스케일링하여 치환한다. 여기서 Δt 는 샘플링 구간이며, m 은 전개항수이다.

$$\dot{\Phi}(t_f, \tau) = -\frac{t_f}{m}\mathbf{M}\Phi(t_f, \tau) \tag{23}$$

$\dot{\Phi}(t_f, \tau)$ 와 $\Phi(t_f, \tau)$ 를 STWS로 각각 변환하면,

$$\dot{\Phi}(t_f, \tau) = \mathbf{H}_k\phi_o(\tau) \tag{24}$$

$$\Phi(t_f, \tau) = \Phi_k\phi_o(\tau) \tag{25}$$

단, $\Phi_k(t_f, \tau) = \begin{bmatrix} \Phi_{11k}(t_f, \tau) & \Phi_{12k}(t_f, \tau) \\ \Phi_{21k}(t_f, \tau) & \Phi_{22k}(t_f, \tau) \end{bmatrix}$ 이다.

k 는 임의의 k 번째 세부구간을 의미한다.

II절의 STWS를 이용한 순환식인 (8), (9), (11)을 이용하여 (23)의 해를 구한다. II절의 순환식은 초기조건을 이용하여 계수를 구하지만 상태전이 행렬의 계수는 (21)의 조건을 이용해야 하기 때문에, 역방향으로 해를 구해야 한다. 따라서, 다음과 같은 반복적인 연산에 의해 각 구간마다 (23)의 상태전이 행렬의 계수를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{M}]^{-1}[\Delta t\mathbf{M}\Phi(t_f, \Delta tk)] \tag{26a}$$

$$\Phi_k = \Phi(t_f, \Delta tk) - \frac{1}{2}\mathbf{H}_k \tag{26b}$$

$$\Phi(t_f, \Delta t(k-1)) = \Phi(t_f, \Delta tk) - \mathbf{H}_k \tag{26c}$$

여기서 $k = m, m-1, \dots, 1$ 이며 Φ_k 는 상태전이행렬의 k 번째 구간의 이산값이다.

따라서, 최적 제어를 설계하는 과정에서 나타나는 비선형 리카티 미분방정식의 해를 직접 구하지 않고 STWS를 적용하여 보다 쉽게 해를 얻을 수 있는 반복된 형태의 대수방정식으로부터 상태궤환 이득을 결정하는데 필요한 상태전이행렬을 (26)으로부터 구할 수 있다.

명령신호의 적분형태를 포함하는 $\mathbf{s}(t)$ 를 구하기 위하여 (19)에 나타났는 적분항의 해를 구한다. (20)의 우변에 있는 적분항 $\mathbf{H}\mathbf{f}_1(t) - \mathbf{f}_2(t)$ 를 (26)에서 제안한 방법으로 구한 상태전이 행렬을 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\mathbf{w}(t) = [\mathbf{H}\mathbf{f}_1(t) - \mathbf{f}_2(t)]$$

$$= \int_t^{t_f} [\mathbf{H}\Phi_{12}(t_f, \tau) - \Phi_{22}(t_f, \tau)]\mathbf{Q}\mathbf{r}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{w}(t_f) = \mathbf{0} \tag{27}$$

(27)의 적분을 각각의 세부구간의 적분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{w}(t) = \int_{(m-1)\Delta t}^{t_f} \beta(t_f, \tau) d\tau + \int_{(m-2)\Delta t}^{(m-1)\Delta t} \beta(t_f, \tau) d\tau + \dots + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \beta(t_f, \tau) d\tau + \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \beta(t_f, \tau) d\tau + \dots \tag{28}$$

여기서, $\beta(t_f, \tau) = [\mathbf{H}\Phi_{12}(t_f, \tau) - \Phi_{22}(t_f, \tau)]\mathbf{Q}\mathbf{r}(\tau)$,

$\Delta t = t_f/m$ (샘플링구간), m (전개항수).

STWS를 적용하여 $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_k\phi_o(t)$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_k\phi_o(t)$ 로 전개하고 $\int_0^1 \phi_o(t)dt = \frac{1}{2}$ 를 이용하면 다음과 같으며, \mathbf{w}_k , \mathbf{r}_k 는 STWS의 계수를 나타낸다.

$$\mathbf{w}_m = \frac{t_f}{2m} [\mathbf{H}\Phi_{12m} - \Phi_{22m}] \mathbf{Q}\mathbf{r}_m \tag{29}$$

여기서, m 은 마지막 세부구간 ($k=m$)이다.

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k+1} + \frac{t_f}{2m} [(\mathbf{H}\Phi_{12k} - \Phi_{22k}) \mathbf{Q}\mathbf{r}_k + (\mathbf{H}\Phi_{12k+1} - \Phi_{22k+1}) \mathbf{Q}\mathbf{r}_{k+1}] \tag{30}$$

단, $k = (m-1, m-2, \dots, 2, 1)$

임의의 구간 k 에서의 적분값은 역방향으로 적분값을 더하므로써 구할 수 있다. 따라서, (20)으로부터 (26), (29), (30)을 사용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}_k = [\Phi_{22k} - \mathbf{H}\Phi_{12k}]^{-1}[\mathbf{H}\Phi_{11k} - \Phi_{21k}] \tag{31}$$

$$\mathbf{s}_k = [\Phi_{22k} - \mathbf{H}\Phi_{12k}]^{-1}[\mathbf{w}_k - \mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)] \tag{32}$$

그러므로, 전체 시스템의 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{33}$$

$$\text{단, } \tilde{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}(t)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{s}(t)$$

$\mathbf{K}(t)$ 와 $\mathbf{s}(t)$ 의 샘플링 구간에서 이산값 \mathbf{K}_k , \mathbf{s}_k 를 각각의 구간마다 대입하면 월쉬함수 단일항 전개에 의 상태방정식의 해를 구하는 반복적인 연산과정에 의해서 임의의 k 번째 구간에서 최적상태벡터인 \mathbf{x}_k 를 구할 수 있다.

m 항 전개할 경우 전체 시스템의 k 번째 구간에서 일반화된 반복 알고리즘을 적용할 경우 다음과 같다

$$\mathbf{c}_k = [\mathbf{I} - \frac{1}{2m}\tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \frac{1}{m} [\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k-1) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k] \tag{34a}$$

$$\mathbf{x}_k = \frac{1}{2}\mathbf{c}_k + \mathbf{x}(k-1) \tag{34b}$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{c}_k + \mathbf{x}(k-1) \tag{34c}$$

여기서, $k = 1, 2, 3, \dots, m$ 이며, \mathbf{x}_k 는 $\mathbf{x}(t)$ 의 k 번째 구간의 이산값이다.

따라서, STWS를 이용한 최적상태 벡터는 제안된 알고리즘인 (34)로부터 얻어진다. (33)의 연속시간계 전체 시스템의 미분방정식은 반복적인 대수적 접근방법에 의

하여 (34)에 의하여 일반화되었다. 제안된 방법은 연속시간계 시스템에서 미분방정식을 통해 수행되는 방법보다 더욱 쉽게 변환된 반복적 형태의 대수 방정식에서 해를 구할 수 있는 장점이 있다[9-10]. 제안된 방법의 흐름도를 그림1에 나타내었다.

IV. 적용예

1. 적용예

1) 적용예 1

다음과 같은 2차시스템을 이용하여 본 연구 방법의 타당성을 보이고자 한다. 시스템은 선형시불변으로 가정하면 상수행렬 **A**, **B** 는 다음과 같다[2].

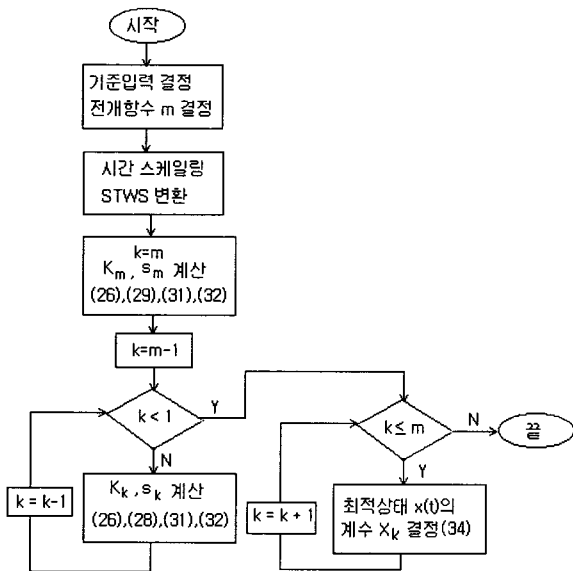


그림 1. 제안된 방법의 흐름도.
Fig. 1. Flowchart of the proposed method.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

III.1절의 평가함수를 최소화하는 제어입력을 구한다. 가중행렬은 컴퓨터 모의실험을 통하여 결정하였다.

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 0.005, H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$t_f = 15 \text{ sec}, r(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, m = 200$$

또한, 경계조건은 다음과 같다.

$$k(t_f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, s(t_f) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

모의 실험 결과 리카티 방정식의 해, 명령신호의 $s_1(t)$ 과 $s_2(t)$ 의 궤적, 최적 상태 벡터와 최적제어 입력은 다음과 같다.

2) 적용예 2

적용예 1의 시스템을 이용하여 기준입력이 $0.2t$ 인 경우에 상태 추종(tracking)문제를 고려하자. 시스템은 선

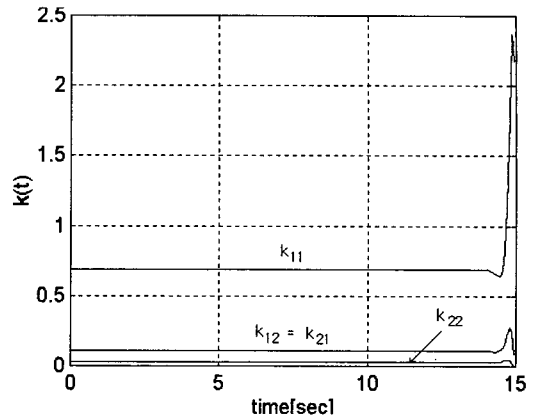


그림 2. 적용예 1에 대한 리카티 방정식의 해.
Fig. 2. Solutions of the Riccati equation for example 1.

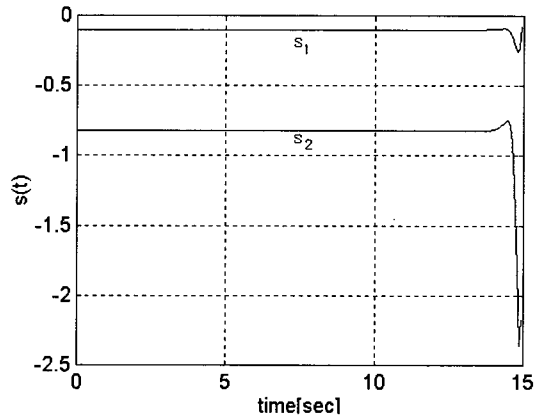


그림 3. 적용예 1에 대한 $s_1(t), s_2(t)$ 의 궤적.
Fig. 3. Trajectories of $s_1(t), s_2(t)$ for example 1.

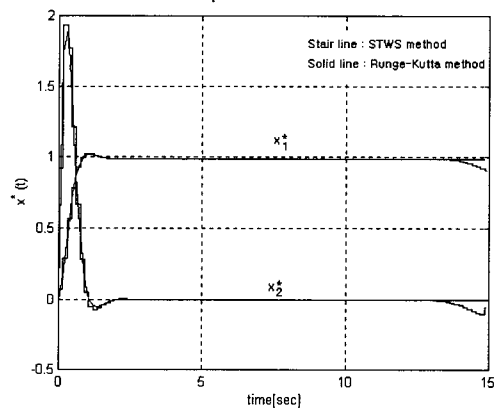


그림 4. 선형추종 문제에 대한 최적 상태 궤적.
Fig. 4. Optimal state trajectories for linear tracking problem.

형 시불변 시스템이며 모의 실험에 사용된 행렬은 다음과 같다.

$$x(0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.05, t_f = 15 \text{ sec}, r(t) = \begin{bmatrix} 0.2t \\ 0 \end{bmatrix}, m = 200$$

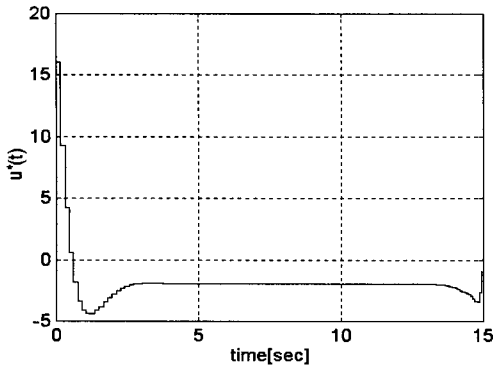


그림 5. 적용예 1에 대한 최적 제어 입력.
Fig. 5. Optimal control input for example 1.

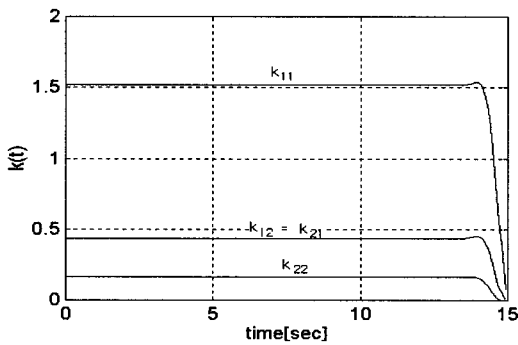


그림 6. 적용예 2에 대한 리카티 방정식의 해.
Fig. 6. Solutions of the Riccati equation for example 1.

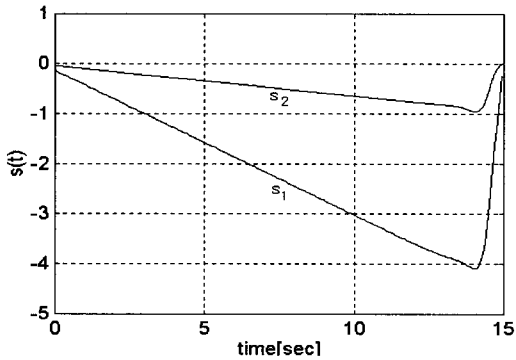


그림 7. 적용예 2에 대한 $s_1(t), s_2(t)$ 의 궤적.
Fig. 7. Trajectories of $s_1(t), s_2(t)$ for example 2.

또한 경계조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{k}(t_f) = \mathbf{0}, \mathbf{s}(t_f) = \mathbf{0}$$

모의 실험 결과 리카티 방정식의 해, 명령신호의 $s_1(t)$ 과 $s_2(t)$ 의 궤적, 최적 상태(states) 벡터와 최적제어 입력은 다음과 같다. 그림 8로 부터 잘 추종함을 알 수 있다.

2. 검토 및 고찰

적용예를 통하여 제안된 방법의 타당성을 검증하였다. 제어입력을 가하지 않았을때 보다 빠르게 기준입력을 잘 추종하였다. 적용예에서 기준입력으로 단위계단입력과 0.2t를 사용하였다. STWS를 이용한 리카티 방정식의

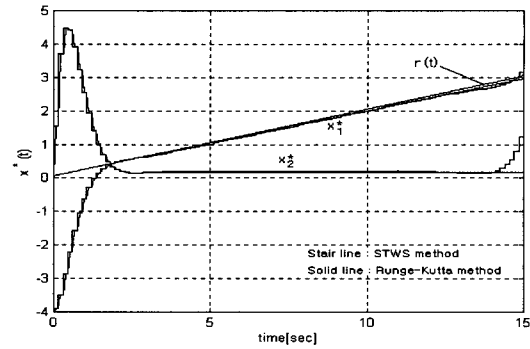


그림 8. 선형 추종 문제에 대한 기준입력과 최적 상태 궤적.

Fig. 8. Reference input and optimal state trajectories for linear tracking problem.

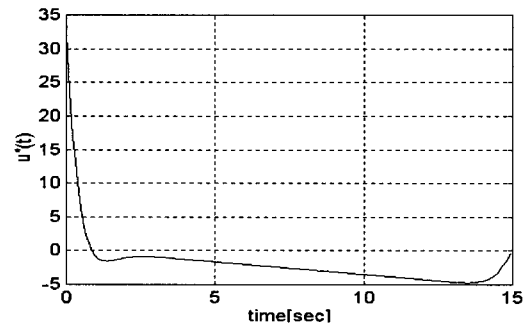


그림 9. 적용예 2에 대한 최적 제어 입력.
Fig. 9. Optimal control input for example 2.

새로운 해법을 제시하였으며, 명령신호의 계산과정에 필요한 적분방정식의 해법 또한 제시하였다.

최종시간 t_f 근방에서는 제어구간의 끝부분의 제어입력을 예측하기 때문에 그림과 같이 나타난다.

V. 결론

본 논문에서는 STWS를 적용하여 최적제어의 대수적 접근방법을 제시하였다. 최적제어기를 설계하는 과정에서 비선형 리카티 미분방정식의 해를 직접 구하지 않고 해밀토니안 상태방정식(Hamiltonian state equation)으로 알려진 2점 경계치 문제(TPBVP : Two Point Boundary Value Problem)에 STWS를 적용하여 보다 쉽게 해를 구할 수 있는 대수방정식으로 변환하여 상태레환이득을 결정하는 알고리즘과 명령신호(command signal)를 구하는 과정에 나타나는 적분방정식의 해를 STWS를 적용하여 대수적으로 반복 연산하여 구할 수 있는 알고리즘을 제시하므로써 전체 시스템의 제어입력을 STWS를 이용하여 대수방정식으로 변환한 후 제어입력을 결정하였다.

따라서, 제안된 방법은 연속시간 시스템에서 최적제어 입력을 구하는 과정에 있어서 비선형 미분방정식과 적분방정식을 통해 수행되는 기존방법보다 더욱 쉽게 해를 구할 수 있는 반복적 형태의 변환된 대수방정식으로부터 직접 제어입력을 결정할 수 있는 장점이 있다. 따라서, STWS를 이용한 제안한 방법은 연속계로 표현되는 시스

템의 제어입력을 각 구간 이산화 된 값으로 바로 얻을 수 있기 때문에 컴퓨터의 적용이 쉽고, 실제 제어기 구현이 간편할 것으로 사료된다.

참고문헌

- [1] F. L. Lewis, *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice-Hall Inc., 1992.
- [2] D. E. Kirk, *Optima Control Theory - An Introduction*, Prentice-Hall Inc., pp. 219-227, 1970.
- [3] N. J. Fine, "The generalized Walsh function," *Trans. Am. Math. Society*. vol. 69, pp. 66-77, 1950.
- [4] G. P. Rao and K. R. Palanisamy, "Improved algorithms for parameter identification in continuous systems via Walsh function," *Proc. IEE*, vol. 130, pp. 9-16, 1983.
- [5] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh function," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 20, pp. 596-602, 1975.
- [6] K. R. Palanisamy, "Analysis of nonlinear system via single term Walsh series approach," *INT. J. system. sci.*, vol. 13, no. 8, pp. 929-935, 1982.
- [7] C. -T. Chen, *Linear System Theory and Design* Holt-Saunders international Editions, pp. 354-371, 1984.
- [8] 오현철, "직교함수를 이용한 직류전동기 속도제어," 성균관대학교 석사학위 논문, 1995.
- [9] 오현철, 안두수, "월쉬함수를 이용한 추적최적제어기 설계," 성균관대학교논문집, 제46권, 제1호, pp. 5-9, 1995.
- [10] 안두수, "직교함수와 응용," 북두출판사, 1997



오 현 철

1992년 성균관대학교 전기공학과 졸업(공학학사). 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학석사), 1998년 동 대학원 전기공학과 박사과정 수료.



김 윤 상

1993년 성균관대학교 전기공학과 졸업(공학학사). 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학석사), 1998년 동 대학원 전기공학과 박사과정 수료.



안 두 수

1960년 서울대학교 전기공학과 졸업
1991년~1992년 대한전기학회 부회장 역임. 1997년~1998년 Univ. of British Columbia 교환교수. 현재 성균관대학교 전기·전자·컴퓨터공학부 교수.