

# 매개변수 변동을 갖는 2관성 시스템의 강건제어

## Robust Control of Two Mass Spring System with Parameter Variations

조도현, 이종용, 이상효  
(Do-Hyeoun Cho, Jong-Young Lee and Sang-Hyo Lee)

**Abstract** : In this paper, using  $\mu$  synthesis algorithm with structured uncertainty, we design controller and apply it for the Two-Inertia resonance(TMS: Two Mass Spring) system. The TMS system is one of the simplest models which generate a torsional vibration. In this system, it is required to design a controller achieving the control performance while suppressing the torsional vibration. Furthermore, when vibration frequency for the system is varying by reason of parameter variations, we should consider parameter variations in controller design. Then, we design two other controller schemes of the PI controller and the standard  $H_\infty$  controller and compare these controllers with the controller designed by the  $\mu$  synthesis robust control method by using simulations and experiments.

**Keywords** : two mass spring system, robust control, PI control, resonance control,  $H_\infty$  control,  $\mu$  synthesis

### I. 서론

전동기와 부하전동기가 어느 정도 유연성이 있는 축으로 결합된 역학 시스템은 축의 비틀림 진동의 문제가 발생한다. 이러한 비틀림 진동을 다루기 위한 가장 간단한 모델로 2관성 공진(TMS : Two Mass Spring) 시스템을 고려할 수 있다. 이러한 2관성 시스템의 제어는, Morimoto와 Hori 등에 의하여 공진비 제어[1,2], PI제어기에 1차 지연 여파기(lag filter)를 포함시킨 제어[3],  $H_\infty$  제어[4] 등 다수의 제어방식이 연구되어 왔다. 특히, 외란 관측기로 추정된 축 회전력을 피드백 하여 공진 주파수를 조정하고, 이것에 PI 또는 I-P제어를 적용하는 공진비 제어 방식은 간단한 구성에도 불구하고 우수한 진동억제 효과가 얻어진다. 이것은, 종래의 일반적인 제어방법인 PI제어 보다, 공진비 제어 방식이 외란 추정기가 추가되어 PID제어 구조를 갖게 되기 때문이다[1]. 또한, 저차원화된  $H_\infty$  제어 방식은 간단한 보상요소를 추가하여 실현되기 때문에, 두 방법 모두 실용적인 제어방법이라 할 수 있다[2,4,5].

그러나, 2관성 공진 시스템에 불확실성이 존재하는 경우 공진을 발생시키는 주파수 등이 변동하게 되며, 최악의 경우 공진을 보상하는 제어가 오히려 공진을 가중시킬 수 있게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 Morimoto와 Takeda등이 제안한 것처럼,  $H_\infty$  방법에 의하여, 불확실성에 대하여 강건 안정한 제어가 설계가 가능하다. 이들의 방법은 불확실성의 구조를 모르는 경우에 대하여 이루어졌는데, 일반적으로 2관성 공진 시스템의 공진요소는 스프링 상수의 변동이나 부하모터의 변동

으로부터 발생하므로, 매개변수 불확실성의 문제로 다루는 것이 더욱 타당하다. 더욱이 불확실성의 구조를 고려하지 않은  $H_\infty$  제어기 설계 방법은 안정성에 대하여 보수적으로 설계되므로, 다른 성능조건을 양보해야 한다[6,7].

이 논문에서는 특히, 2관성 공진 시스템의 불확실성을 매개변수(구조적) 불확실성으로 다루어, Doyle, Packard 등이 제안한  $\mu$  방법[6,8]에 의하여 제어기를 설계하고, 불확실성의 구조를 고려하지 않은  $H_\infty$  제어기와 제어성능을 비교한다. 이러한 설계를 위하여, 먼저, 매개변수 변동에 따른 2관성 공진 시스템의 주파수 특성을 관찰하고, 실험측정에 의하여 얻어진 시스템 모델을 수학적 모델과 비교한다. 또한, 설계명세를 세우고, 이 설계명세를 달성하기 위한, PI제어기와 불확실성의 구조를 고려하지 않은  $H_\infty$  제어기 그리고  $\mu$  방법에 의한 제어기를 각각 설계한다. 각각 설계된 제어기를 실험 제작한 2관성 공진 시스템에 적용한다. 실험을 통하여 2관성 공진 시스템에서 매개변수 변동이 있는 경우, 불확실성을 고려한  $\mu$  방법의 제어가 다른 제어기 보다 진동억제 효과가 좋음을 보인다.

### II. 제어대상과 설계목적

그림 1에 나타난 2관성 공진 시스템이 입력 회전력  $\tau_M$ 으로 부터 전동기가 각속도  $\omega_M$ 으로 회전하여, 비틀림 상수  $k_S$ 의 축에 의하여, 부하가 각속도  $\omega_L$ 로 회전

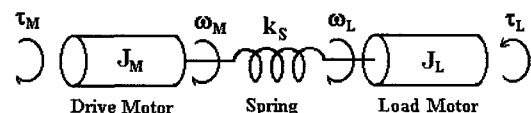


그림 1. 2관성 공진 시스템.  
Fig. 1. Two mass spring system.

접수일자 : 1997. 12. 3., 수정완료 : 1998. 7. 29

조도현 : 삼성종합기술원 의료전자Lab. 전문연구원

이종용 : 광운대학교 전산사회교육원 대우 교수

이상효 : 광운대학교 제어계측공학과 교수

※ 이 논문은 1998년도 교내 연구비로 조성되었습니다.

한다고 고려하자.

수학적으로 모델링한 동력학 방정식을 나타내면 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} J_M \dot{\omega}_M + k_S \theta_S &= \tau_M \\ \theta_S &= \theta_M - \theta_L \\ J_L \dot{\omega}_L - k_S \theta_S &= \tau_L \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $\omega_M, \omega_L, \theta_M, \theta_L$ 은 각각 전동기와 부하전동기의 각속도와 회전각이고,  $J_M, J_L, \tau_M$ 은 각각 전동기와 부하전동기의 관성과 전동기의 구동회전력이고,  $\theta_S, k_S, \tau_L$ 은 각각 스프링의 비틀림 각도, 스프링정수와 부하에 가해지는 외란 회전력이다.

2관성 공진 시스템은 그림 3에 나타낸 것처럼, 공진 주파수와 반공진 주파수에 의하여, 입력 구동 회전력에 대한 출력 각속도 특성이 공진 특성을 갖게되어, 구동 전동기의 각속도가 부하 전동기에 전달될 때에 진동이 발생된다. 더욱이, 스프링 상수의 변동이나 부하의 변동 같은 불확실성 변동이 존재하게 되면, 시스템응답은 더욱 불안정하게 된다.

이러한 제어대상에 대하여 제어목적달성을 위하여 설계명세 S1~S5를 다음과 같이 고려하자.

- S1 : 외란 회전력  $\tau_L$ 이 부하의 각속도  $\omega_L$ 에 미치는 영향을 최소화한다.
- S2 : 제어시스템이  $J_L$ 과  $k_S$ 의 변동에 대하여 강건 안정하다.
- S3 : 축의 비틀림 각, 제어입력이 크지 않도록 한다.
- S4 : 기준입력을 각속도  $\omega_L$ 가 진동하지 않고, 빠르게 추종한다.
- S5 : 각속도 기준입력과 각속도  $\omega_L$ 의 정상편차는 영이다.

(1)을 전압방정식으로 바꾸어 상태 방정식으로 나타내자[9,10].

$$\begin{aligned} \frac{J_M R_{aM}}{K_{iM}} \dot{\omega}_M + \frac{k_S R_{aM}}{K_{iM}} \theta_S + K_{bM} \omega_M &= V_M \\ \theta_S &= \theta_M - \theta_L \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{J_L R_{aL}}{K_{iL}} \dot{\omega}_L - \frac{k_S R_{aL}}{K_{iL}} \theta_S + K_{bL} \omega_L = V_D$$

여기서,  $K_{iM}, K_{bM}$ 와  $R_{aM}$ 는 각각 전동기의 관성모멘트, 회전력정수와 전압정수이고,  $K_{iL}, K_{bL}$ 와  $R_{aL}$ 는 각각 부하전동기의 관성모멘트, 회전력정수와 전압정수이다. 상태와 출력을 (3)과 (4)로 정의한다.

$$[x_1 \ x_2 \ x_3]^T \triangleq [\omega_M \ \theta_S \ \omega_L]^T \quad (3)$$

$$y = r - \omega_M \quad (4)$$

여기서,  $r$ 은 전동기에 대한 기준입력이다. 또한, 설계명세를 만족하는 제어 시스템을 구현하기 위하여 (5)와 같은 출력오차 방정식을 정의한다.

$$z_e = \begin{bmatrix} r - \omega_M \\ \omega_M - \omega_L \\ u \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$w = [V_D \ r]^T \quad (6)$$

여기서,  $w$ 는 외란입력으로 부하전동기에 인가되는 외란 전압  $V_D$ 와 기준입력  $r$ 로 (6)과 같고,  $u$ 는 전동기에 대한 제어입력이다.

(2)의 전압-속도 방정식과, 앞의 설계명세를 만족하는 제어 시스템을 구현하기 위한, 묘사형 방정식(descriptor form equation)을 표현하면 (7)과 같다. 묘사형 방정식에 의한 시스템 표현은 불확실성의 구조를 고려하지 않은 제어기 설계와 구조를 고려한 제어기 설계 결과를 비교하기 위하여 필요하다.

$$\begin{aligned} E \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_e &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$E = \begin{bmatrix} J_M & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & J_L \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{K_{iM} K_{bM}}{R_{aM}} & -k_S & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & k_S & -\frac{K_{iL} K_{bL}}{R_{aL}} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{K_{iL}}{R_{aL}} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \frac{K_{iM}}{R_{aM}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [1 \ 0 \ 0],$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$D_{21} = [0 \ 1], \ D_{22} = 0$$

여기서,  $u$ 는 전동기에 가해지는 구동전압으로 (9)과 같다.

$$u = [V_M] \quad (9)$$

이 시스템을 블록선도로 나타내면, 그림 2와 같고 K는 제어기를 나타낸다.

구체적인 시스템의 특성을 분석하고, 이것에 따른 제어기 설계를 위하여, 제어대상을 실험제작 하였다. 전동기와 부하전동기로 Tamagawa사의 TRE-30W DC 서보

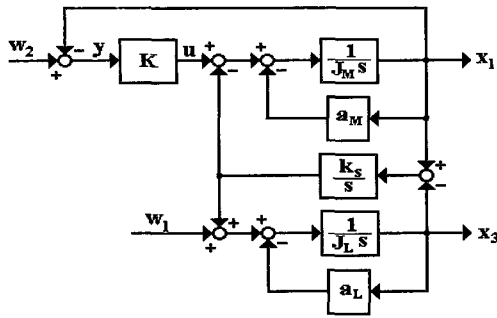


그림 2. 2관성 시스템의 블록 선도.  
Fig. 2. Block diagram for TMS system.

전동기를 사용하였고, 세부명세는 부록의 표 1과 같다. 단일 전동기와 TMS의 입력  $u$ 에 대한 전동기출력  $y$ 의 전달함수는 각각 (10)과 (11)과 같다. (12)은 Hewlett Packard 3563A Control System Analyzer를 이용하여 얻은 주파수응답을 극영점 수의 지정에 의한 곡선 맞춤법으로 구한 실측된 전달함수이다. 전달함수 표현과 매개변수 환산을 위하여 Mathematica 툴을 사용하였다 [11].

· 부하 전동기가 없는 경우의 구동전동기 입력  $u$ 에 대한 구동 전동기 속도  $\omega_M$ 의 전달함수 :

$$T_{x_1 u(\text{loadless})} = \frac{3352}{s + 179.3} \quad (10)$$

· 수학적 모델에 의한 구동전동기 입력  $u$ 에 대한 구동 전동기 속도  $\omega_M$ 의 전달함수 :

$$T_{x_1 u(TMS)} = \frac{3352(s + 89.6 \pm j2820.9)}{(s + 89.6 \pm j3990.3)(s + 179.3)} \quad (11)$$

· 실험측정에 의한 구동전동기 입력  $u$ 에 대한 구동 전동기 속도  $\omega_M$ 의 전달함수 :

$$T_{x_1 u(TMS)} = \frac{1742(s + 30.84 \pm j2562.0)}{(s + 47.17 \pm j3539.7)(s + 91.93)} \quad (12)$$

이 시스템은, 수학적 모델의 대표극점이  $-89.6 \pm j3.9903$ 과  $-179.3$ 에 있는 안정한 3차 시스템이지만, 진동이 있다. 이들 전달함수에 대한 주파수 특성은 그림 3과 같다. 그림 3의 주파수 특성은  $2000[\text{rad/s}]$  부근에서 반공진 주파수와  $4000[\text{rad/s}]$  부근의 공진 주파수가 시스템의 공진을 유발시키는 것을 알 수 있다.

그림 3에서 수학적 모델과 실험 측정된 모델사이에는 이득의 차이가 다소 있기는 하지만, 공진과 반공진 주파수가 거의 일치하므로, 시스템응답 특성은 같다고 볼 수 있다. 그러나 매개변수의 변동에 의한 불확실성이 생기게 되면, 공진과 반공진 주파수가 변하게되어, 응답특성이 달라지게 된다. 이러한 불확실성에 의한 강건 안정성을 평가하기 위하여, 대표적인 시스템 매개변수  $J_L$ 과  $k_s$ 에 변동을 고려한다. 각각의 변동비율에 따른 주파수 특성의 변동을 나타내면 그림 4(a), (b)와 같다. 여기서  $\Delta = 0$ 은  $J_L$ 과  $k_s$ 의 공칭값인 경우,  $\Delta > 0$ 은  $J_L$ 과  $k_s$ 의 실제값이 공칭값보다 큰 경우,  $\Delta < 0$ 은  $J_L$ 과  $k_s$ 의

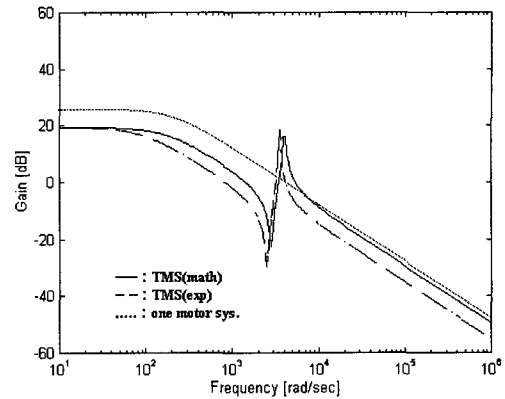
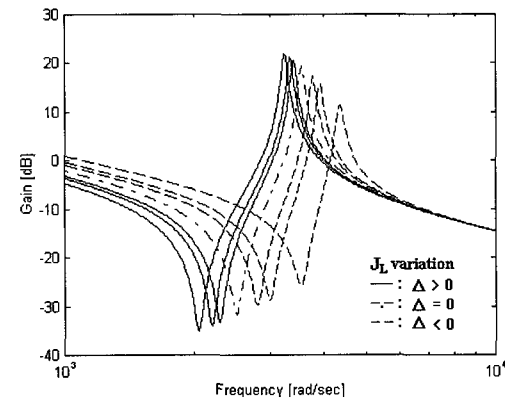
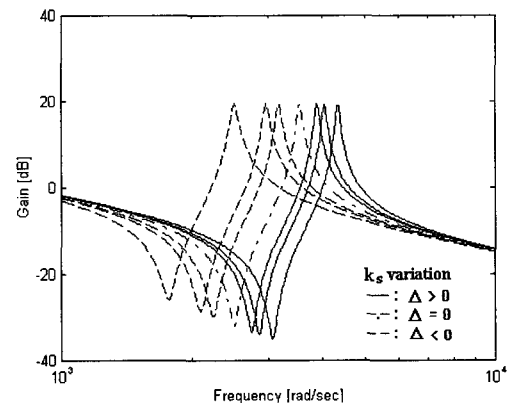


그림 3. 입력  $u$ 에 대한 출력  $y$ 의 주파수 특성.  
Fig. 3. Frequency response for  $u$  to  $y$ .



(a)  $J_L$  변동



(b)  $k_s$  변동

그림 4. 매개변수 변동에 대한 주파수 특성.  
Fig. 4. Frequency responses for parameters.

실제값이 공칭값보다 적은 경우를 의미한다. 즉,  $\Delta$ 의 가변,  $J_L$ 과  $k_s$ 의 가변을 통한 공진 주파수의 변화는, 부하관성  $J_L$ 은 감소할 수록,  $k_s$ 는 증가할 수록 높은 주파수영역으로 이동하며, 반대로  $J_L$ 은 증가할 수록,  $k_s$ 는 감소할 수록 낮은 주파수영역으로 이동하는 것을 알 수 있다.

즉, 매개변수  $J_L$ 과  $k_s$ 의 변동은 시스템 응답에서 진

동을 일으킬 수 있는 공진과 반공진 주파수를 변화시킨다. 그러므로, 기존의 제어기 설계[2-5]와 같이 실측하여 얻어진 모델처럼 상당히 정확한 시스템 모델을 사용하여 제어기를 설계하면, 공진 성분을 제거하여 진동을 억제할 수 있지만, 매개변수 변동으로 인한 불확실성 문제에는 공진과 반공진 주파수의 변화로 기존의 제어기 설계에서는 공진 성분을 제거시키지 못하므로, 시스템의 강건 안정성을 보장할 수 없다.

III. 비구조적 불확실성을 고려한 TMS 모델

그림 3의 주파수특성을 갖는 제어대상의 공진을 억제하기 위하여, Morimoto와 Hori 등에 의하여 공진비 제어[1][2], PI제어기에 1차 지연 여파기(lag filter)를 포함시킨 제어[3],  $H_\infty$  제어[1][4] 등 다수의 제어방식이 연구되어 왔다. 이러한 제어 방법은 그림 3의 제어대상에 대한 수학적 모델의 주파수 특성을 이용하여, 공진을 억제하도록 제어기를 설계하였다. 그러나 불확실성이 존재하게 되면, 수학적 모델에 대한 기존 방법에 의한 제어기 설계방법은 적절하지 못하다.

이 절에서는 진동성분을 제거하고, 불확실성에 대하여 강건안정한  $H_\infty$  제어를 설계하자[6][12]. 먼저, 설계명세 S1, S2, S3, S5를 만족시키기 위하여, (5)에서  $e_1 = r - \omega_M$  은 기준입력에 대한  $\omega_M$ 의 추종오차를 나타내고,  $e_2 = \omega_M - \omega_L$  은 구동부와 부하사이의 진동응답을 나타낸다. 원하는 주파수 대역에서 추종오차를 줄이고 진동을 감소시키기 위하여, 주파수 하중함수  $W_{pl}$ ,  $W_{rl}$ 를 고려하고, 입력  $u$ 을 제한하기 위한  $W_s$ 를 추가한다. 더욱이 입력  $u$ 에 대한 하중은 가법변동을 갖는 비구조적 불확실성을 고려하는 역할을 한다. 그러면, (5)의 출력오차 방정식은 (13)으로 다시 표현될 수 있고, 그림 5와 같은 확대된 제어대상이 된다.

$$z_e = \begin{bmatrix} W_{pl}(r - \omega_M) \\ W_{rl}(\omega_M - \omega_L) \\ W_s u \end{bmatrix} \quad (13)$$

성능에 관한 하중함수는 단위계단 입력에 대한 정상상태 추종오차가 0.5로 되고, 입력외란이 정상상태에서 50:1의 비율로 제거 되도록 선택하였고, 강건 안정에 관한 하중함수는 모델링 오차를 저주파 영역에서 50% 허용할 수 있도록 선택한다.

하중함수를 선택하기 위하여 그림 3의 모델 주파수 특성(그림 6의 공진과 반공진을 나타내는 실선)에 대하여, 그림 6과 같이 (14)로 하중함수를 선택하면, 그림 7과 같은 제어기가 노치(notch) 여파기 형태의 특성을 갖게 되고, 구하여진 제어기  $K_{H_\infty}$ 는 부록에 나타냈다. 노치 여파기는 진동이 일어나는 주파수를 상쇄시키도록 제어기가 구해지므로 제어기 설계를 위해서는 수학적 모델보다는 실험적으로 구해진 제어대상을 사용해야 정확한 제어기설계가 가능하다. 즉, 수학적 모델과 실험적 모델 사이의 주파수 특성의 차이는 오히려 시스템의 제어 특성을

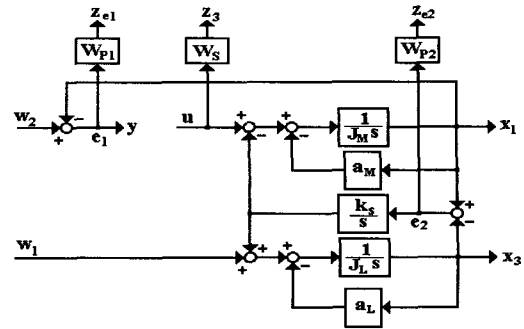


그림 5. 하중함수가 포함된 제어대상. Fig. 5. Plant with weighting.

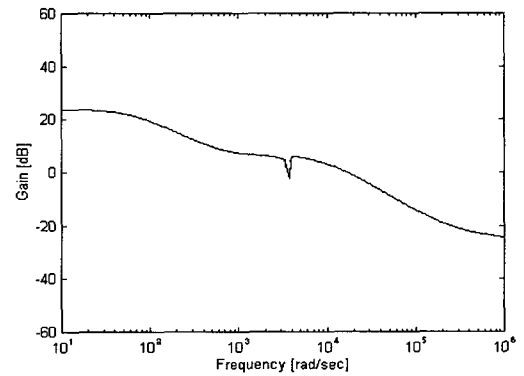


그림 6. 하중함수 선택. Fig. 6. Weighting function.

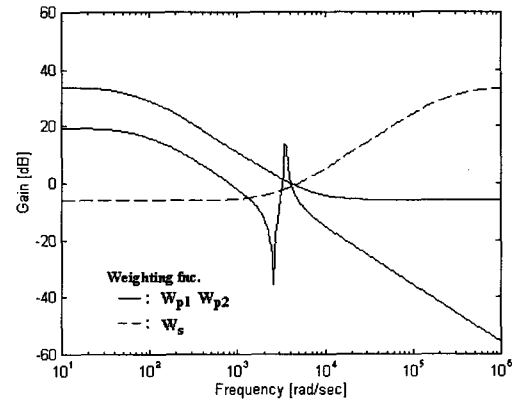


그림 7. 제어기의 주파수응답. Fig. 7. Frequency response for controller.

을 악화시킬 수 있기 때문이다.

$$W_{pl} = W_{rl} = \frac{0.5s + 3465}{s + 69.3} \quad (14a)$$

$$W_s = \frac{50s + 144300}{s + 288600} \quad (14b)$$

IV. 구조적 불확실성을 고려한 TMS 모델

III절에서 설계한 노치형  $H_\infty$  제어기는 기존의 공진비 제어나 PI제어기에 지연 보상을 한 제어방법보다는 비교적 불확실성에 대하여 강건하고, 진동 억제효과도 좋다.

그러나 강건 안정에 대하여 보수적인 제어특성을 갖도록 설계되어 성능 향상을 위한 조건이 제한을 받게되어 있다.

이 절에서는 구조적 불확실성을 고려하여 제어를 설계하자. 먼저, 구조적 불확실성을 갖는 제어대상에 대하여 모델링하는 방법을 기술한다. 그리고 TMS에 구조적 불확실성을 고려하여, 참고문헌[8]의 방법에 따른  $\mu$  방법에 의하여  $H_\infty$  제어를 설계한다[3][6][7][8].

1. TMS의 구조적 불확실성의 모델링

$n$ 차원의  $k$ 개의 불확실 매개변수 변동이 있는 경우, 매개변수  $\delta_1, \dots, \delta_k$ 를 갖는 묘사형 방정식은  $E_0$ 가 정칙이라면, 다음 (15)와 같이 표현된다.

$$(I + \sum_{i=1}^k \delta_i E_0^{-1} E_i) \dot{x} = (E_0^{-1} A_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i E_0^{-1} A_i) x + E_0^{-1} B_1 d + (E_0^{-1} B_2 + \sum_{i=1}^k \delta_i E_0^{-1} B_{2i}) u \quad (15)$$

(15)를 다시 정리하면,

$$\dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}_1 d + \hat{B}_2 u - (\sum_{i=1}^k \delta_i E_0^{-1} E_i) \dot{x} + (\sum_{i=1}^k \delta_i E_0^{-1} A_i) x + (\sum_{i=1}^k \delta_i E_0^{-1} B_{2i}) u \quad (16)$$

여기서,  $\hat{A} = E_0^{-1} A_0$ ,  $\hat{B}_1 = E_0^{-1} B_1$ ,  $\hat{B}_2 = E_0^{-1} B_2$ 으로 알고 있는 시스템 행렬이다.

$E_0^{-1} [E_i \ A_i \ B_i] = L_i [R_i \ W_i \ Z_i]$ 로 분해하자. 그러면 (16)은 (17)과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}_1 d + \hat{B}_2 u + L \Delta [-R \ W \ Z] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \\ u \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서,  $\Delta = \text{diag}[\delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_k I_{q_k}]$ 이다.

그러면, (17)의 구조적 불확실성  $\Delta$ 가 고려된 제어대상  $G_d$ 는 (19)와 같이 내부 피드백 (18)을 갖는 시스템으로 고려할 수 있고, (20)과 같이 구조적 불확실 변수를 분리하여, (18)과 같이 입출력 변수  $z_d$ 와  $q$ 에 대한 전달함수로 제어대상을 표현할 수 있다.

$$q = \Delta z_d \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} z_e \\ y \end{bmatrix} = F_u(G_p, \Delta) \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}x + Lq + \hat{B}_1 d + \hat{B}_2 u \\ z_d &= (W - R\hat{A})x + RLq + (Z - R\hat{B})u \\ z_e &= C_1 x + D_{11} d + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} d \end{aligned} \quad (20)$$

(20)을 (21)과 같은 확대된 제어대상  $G_p$ 로 표현하자.

$$G_p = \begin{bmatrix} \hat{A} & L & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ W - R\hat{A} & -RL & 0 & Z - R\hat{B} \\ C_1 & 0 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (21)$$

이러한 제어대상  $G_d$ 에 대하여,  $|\delta_i| < 1$  ( $\delta_i \in \mathbf{R}$ )인 제어대상  $G_d$ 를 내부안정화 하고, 외란  $d$ 에서 제어된 출력  $z_e$ 까지의 전달함수  $T_{z_e, d}$ 가  $\|T_{z_e, d}\|_\infty < 1$ 를 만족하는 피드백 제어 시스템을 설계한다.

이 문제는 하나의 강건 제어 성능문제가 되고, 이들 조건을 만족시키기 위한 필요충분조건을  $\mu$ 설계 방법을 이용하여 도출하자.

2. 구조적 불확실성을 갖는 TMS의 제어

TMS에 대하여 부하관성  $J_L$ 과 비틀림 상수  $k_S$ 가 다음과 같은 범위에서 매개변수의 변동이 있다고 고려하자.

$$J_{Lmin} \leq J_L \leq J_{Lmax}$$

$$k_{Smin} \leq k_S \leq k_{Smax}$$

즉,  $J_L = J_{L0} + \delta_1 \Delta_{J_L}$ ,  $k_S = k_{S0} + \delta_2 \Delta_{k_S}$ 로 표현할 수 있다.

여기서, 첨자 0은 변동이 없을 때의 값을 의미하며,  $|\delta_i| < 1$ ,  $\delta_i \in \mathbf{R}$ 이고,  $\Delta_{J_L}$ 과  $\Delta_{k_S}$ 는 각각에 대한 변동 폭을 나타낸다.

IV. 1절에서 설명한 묘사형 모델표현과 구조적 변동표현을 이용하면,  $J_L$ 과  $k_S$ 의 변동을 더욱 정확히 표현할 수 있다. (17)에서  $k=2$ 인 경우이므로, 구조적 변동은 (22)와 같다.

$$q = \Delta z_d, \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{J_L} & 0 \\ 0 & \delta_{k_S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{d1} \\ z_{d2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

(17)의 분해를 위한 변수 선택은 다음과 같다. 이러한 분해는 임의로 결정될 수 있다.

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_M} \frac{\sqrt{\Delta_{k_S}}}{a_2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_L} \frac{\sqrt{\Delta_{J_L}}}{a_1} & \frac{1}{J_L} \frac{\sqrt{\Delta_{J_L}}}{a_2} \end{bmatrix}, \\ R &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \sqrt{\Delta_{J_L}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ W &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \sqrt{\Delta_{k_S}} & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,  $\alpha_1, \alpha_2$ 는 구조적 불확실성을 나타내는 성분의 상대적 크기를 조정하여 주는 매개변수를 나타내며,  $L$ 과  $R$ 의 곱에 의하여 불확실성의 구조를 나타내는 겉보기 크기는 불변한다.

또한, 구조적 불확실성을 고려한 제어대상에 하중함수를 포함시키기 위하여 제어된 변수  $z_e$ 와  $z_d$ 를 하중함수를 포함시켜 (24)로 나타내면 그림 8로 나타낼 수 있다.

$$z_d = W_d z_d, \quad z_e = W_e z_e \quad (24)$$

3.  $\mu$  방법에 의한 제어기 설계

TMS 시스템과 같은 불확실성 부분에 대한 강건안정이 제어기 설계에서 중요한 부분으로 고려되게 되면,

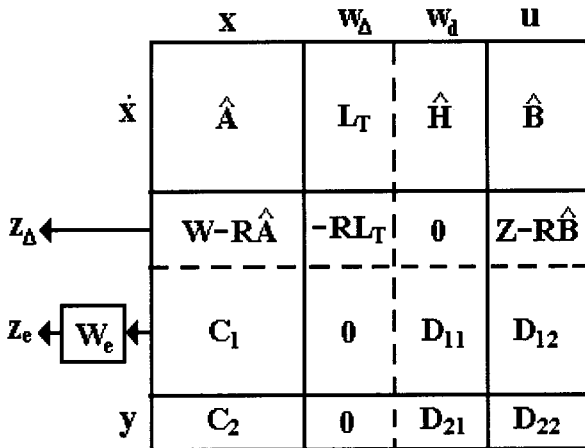


그림 8. 구조적 불확실성을 포함한 하중함수가 있는 제어대상.

Fig. 8. Plant including structured uncertainty with weighting function.

$H_\infty$  방법에 의한 제어기는 다른 제어성능은 제한되게 된다. 더욱이 IV. 2절과 같이 불확실성의 구조를 파악할 수 있는 경우에는 강건안정에 대한  $H_\infty$  제어기는 불필요하게 많이 다른 제어성능을 제한하게 된다. 그러므로 이러한 경우에 대한 제어기 설계에  $\mu$  방법을 사용하면, 강건안정을 확보하면서 상대적으로 제어성능을 더 고려할 수 있게된다.

이러한 설계를 위하여, 변동  $\Delta_{J_c}$  과  $\Delta_{k_s}$  을 각각 10%변동으로 고려하고, 성능개선을 위한 하중함수를 (25)와 같이 선택하여, 참고문헌[7,8]에서 설명한 절차에 의하여 제어기를 구한다.

$$W_{\mu 1}(s) = \frac{0.5s + 346.5}{s + 6.93}, W_{\mu 2} = 0.001, W_{\mu 3} = 0.001 \quad (25)$$

참고문헌[6,8]에서 설명한 D-K 반복법을 처리하기 위하여, 곡선맞춤(curve fitting)을 사용하여 구한 척도구성 행렬을 구한다. 척도구성 행렬은  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox의 dkit.m 내부에서 fitmag.m을 사용하여 구한다[8]. 그림 9에는 사용한 하중함수를 제어대상의 주파수 특성과 함께 나타냈고, 그림 10에는 각 D-K 반복 단계에서 얻어진 제어기를 나타냈다. 또한, 부록의 표 2에는 D-K 반복의 횟수에 따른 제어기의 차수와 척도구성행렬의 차수와 각 제어기를 구하기 위한 최적  $\gamma$ 와 최대  $\mu$  값을 나타냈다. 이렇게 구하여진,  $\mu$  방법에 의한  $H_\infty$  제어기가 D-K 반복법 횟수에 따른  $K_{\mu 1}$ ,  $K_{\mu 2}$  를 부록에 기술하였다. 그림 10의 주파수 응답에 따라서  $K_{\mu 2}$  제어기를 선택하고, 이 제어기는 8차의 높은 차수를 갖지만, 극영점에 대하여, 최소실현되어 극영점 소거된 모델 축소하면[6,8], 6차의 제어기  $K_\mu$  를 얻을 수 있으며, 구조를 고려하지 않고 설계한  $H_\infty$  제어기와 같은 차수를 얻는다. 모델 축소 과정으로 얻어진 제어기  $K_\mu$  가 부록에 기술되어 있다.

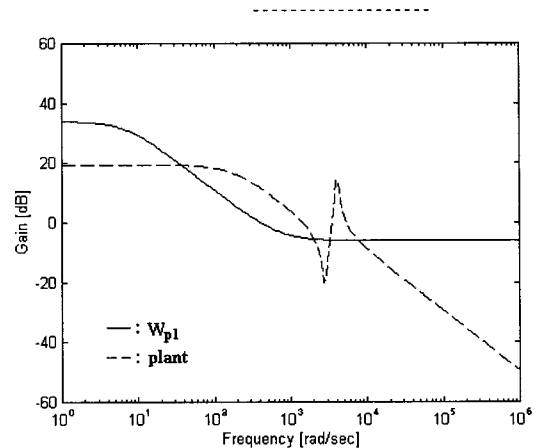


그림 9. 하중함수.  
Fig. 9. Weighting function.

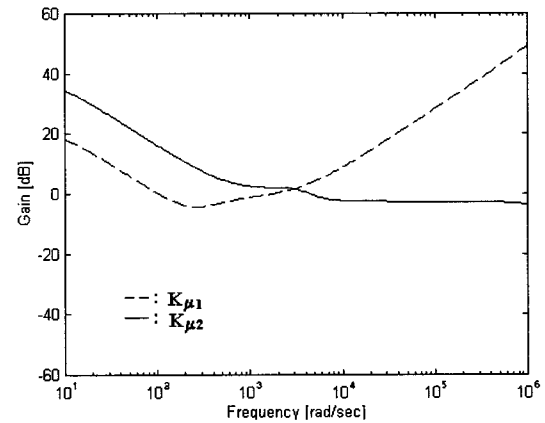


그림 10. 제어기의 주파수 응답.  
Fig. 10. Frequency response for controller.

V. TMS 시스템의 실험

이 절에서는 시뮬레이션과 실험을 통해 III절과 IV절에서 설계된 제어기를 실물 시스템에 적용하고자 한다. 제어기의 성능을 비교하기 위하여, 비례-적분(PI) 제어기를 (26)과 같이 선정하였다. PI 제어기의 계수는, 강건 안정성을 검토하기 위하여 III절의  $H_\infty$  제어기와 유사한 특성을 갖도록 선택되었다.

$$K_{PI}(s) = 1.2 + \frac{120}{s} \quad (26)$$

먼저, 각 제어기의 추종특성과 외란에 대한 특성을 관찰하기 위하여, 기준속도를 40[rad/sec]로 하고, 0.01[sec]에 기준신호를 인가하고 0.05[sec]후에 부하 전동기에 외란 전압이 가해진 경우를 시뮬레이션 하였다. 그림 11의 (a), (b)와 (c)는, 각각 (26)의 PI 제어기, III절의  $H_\infty$  제어기 및 IV절에서 설계한  $\mu$  방법의  $H_\infty$  제어기에 의한 추종오차를 보여준다. 초기의 오차는 모두 40[rad/sec]를 나타내고 있으나 초기의 오차가 중요한 것이 아니므로 오차 구간을  $\pm 10$ [rad/sec]로 절삭하여 과도 상태를 살펴 보면,  $\mu$  방법에 의한  $H_\infty$  제어가 초기 응답에 대한 진동

이 적고, 외란에 대하여 PI 제어기 또는 표준  $H_\infty$  제어기보다 더 좋은 추종특성과 진동이 없이 수렴함을 알 수 있다.

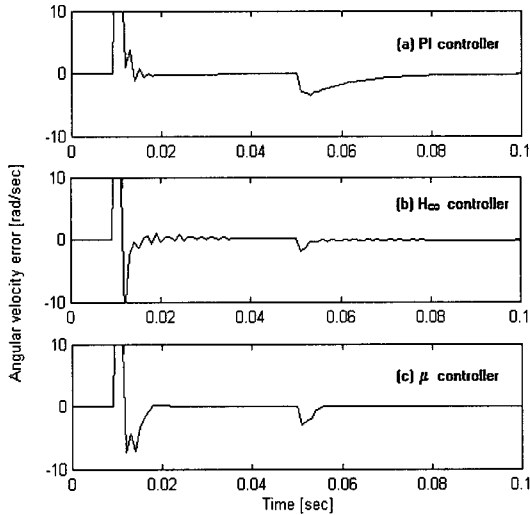


그림 11. 시간응답 : 추종오차  $r - \omega_M$ .  
Fig. 11. Time response : tracking error  $r - \omega_M$ .

다음으로 불확실성의 영향과 실제모델에 대한 제어효과를 관찰하기 위하여, 그림 12와 같이 구성하였다. 실험을 위해 부록의 표 1에 기술한 구동 전동기와 부하 전동기는 Tamagawa사의 TRE-30W DC 서보전동기를 사용하였고, 전동기 구동을 위한 회로는 펄스 레귤레이팅 IC인 SG3524와 FET IRFP450을 이용하여 PWM (Pulse Width Modulator) 방식에 의한 전동기 구동회로를 설계/구성하였다.

또한, 이 회로에 HP 6N137에 의한 접지분리회로와 HP 6274B 직류 전원장치를 결합하여 구동장치를 구성하였다. TMS 시스템의 제어입력은 IBM-PC인 Pentium 100MHz에 Boland C 프로그램을 이용하여 계산하였고, 계산된 제어입력은 12bit AD-DA 변환 장치인 다림시스템의 ACL-812PG를 통하여 PWM 전동기 구동장치에 전달된다. 또한, TMS 시스템의 출력인 구동 전동기의 타코 측정기 출력 전압도 같은 AD-DA 변환 장치에 의하여 컴퓨터에 입력되도록 하였다.

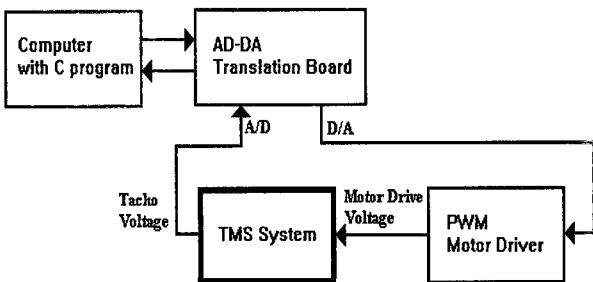


그림 12. 실험 구성도.  
Fig. 12. Experimental block diagram.

그림 13, 14과 15는 각각 PI제어기, 노치 형태의  $H_\infty$  제어기와  $\mu$  방법의 제어에 의한 구동 전동기의 속도를 나타낸다. 기준속도 40[rad/sec]에 대하여, 각각의 (a)는 시뮬레이션, (b)는 실험 결과를 나타낸다. 또한 각각의 (c)는 구동 전동기와 부하 전동기의 연결 장치인 스프링 상수 47의 NBK사의 결합기 MST-16, 2개를 직렬로 연결하였을 경우의 결과이다. 한편, (d)는 진동모드를 갖는 불확실성을 고려하고자 결합기 MST-16과 스프링 상수 120의 결합기 MST-20을 직렬로 연결하였을 경우의 결과이다.

그림 13, 14과 15의 각각의 (a)와 (b), (c)로부터 시뮬레이션과 실험의 결과가 거의 유사함을 알 수 있고, 노치 형태의  $H_\infty$  제어기가 PI나  $\mu$  제어기보다 진동 모드에 대하여 응답이 좋음을 볼 수 있다. 또한  $\mu$  제어기가  $H_\infty$  제어기보다 오버슈트가 큰 것은 설계 요구 조건 S4에서 응답의 수렴 시간을 빠르게 하고자 하였기 때문에 발생할 것이다.

그리고, (d)와 같이 스프링 상수가 임의로 변하는 경우 PI제어기는 진동현상이 커져서 불안정하여지며, 노치 형태의  $H_\infty$  제어기도 PI제어기보다 상당히 안정하지만 미소하게 진동현상이 나타남을 볼 수 있고,  $\mu$  제어기는  $H_\infty$  제어기보다 응답 상승 시간도 빠르며, 스프링 상수 변동에 안정함을 볼 수 있다. 한편, 이들에 대한 제어입력은 전동기에 대하여 전압입력으로 반영되며, 구동 전동기의 속도에 비례적인 특성으로 나타나게 되는데, 공진을 무시할 수 있는 경우에는 각 제어기의 제어입력은 서로 큰 차이가 나타나지 않으나, 공진이 발생할 경우 제어 입력도 급격한 변동을 나타내게 되므로, 각 그림 13, 14, 15의 (d)를 보면, PI보다  $H_\infty$  제어기가,  $H_\infty$  제어기보다  $\mu$  제어기에 대한 제어입력의 변동이 적다.

결론적으로,  $\mu$  방법에 의한 제어기 설계가 2관성 공진 시스템을 매개변수 변동에 대하여 강건 안정하게 하며, 설계명세도 만족함을 알 수 있다.

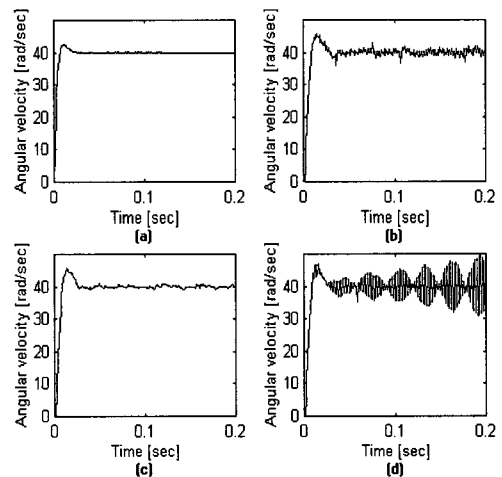


그림 13. PI 제어기를 이용한 TMS 제어.  
Fig. 13. TMS control with PI controller.

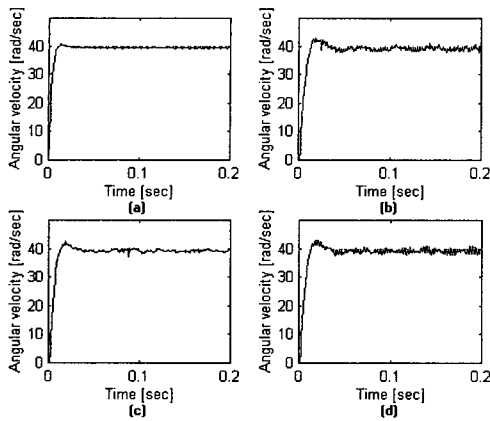


그림 14.  $H_{\infty}$  제어를 이용한 TMS 제어.  
Fig. 14. TMS control with  $H_{\infty}$  controller.

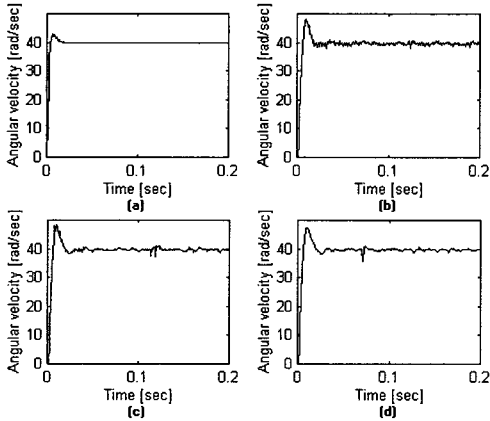


그림 15.  $\mu$  방법의 제어를 이용한 TMS 제어.  
Fig. 15. TMS control with  $\mu$  controller.

**VI. 결론**

이 논문에서는 비틀림 진동이 있는 2관성 공진 시스템에 대한 강건 제어를 다루었다. 기존에 제안된 공진비 제어나, PI제어기에 1차 지연 여파기(lag filter)를 포함시킨 제어의 방법들은 제어기 설계를 위하여, 그 설계 방법의 특성상 제어대상에 대한 정확한 모델 표현식이 요구된다. 그러므로 시스템 매개변수 변동 등으로 발생되는 불확실성에 대하여 강건 안정하지 못했다. 또한, 일반적인  $H_{\infty}$  제어의 경우 하중함수의 설정에 따라 제어 목적이 달라질 수 있지만, 제어대상에 요구되는 성능 조건을 양보하게 되며, 성능조건을 강화하면, 불확실성에 대한 여유가 감소하게 된다.

이러한 문제를 해결하기 위하여, 불확실성의 구조를 제어기 설계 과정에 반영할 수 있는  $\mu$  방법에 의한  $H_{\infty}$  제어를 설계하고, 2관성 공진 시스템에 적용하였다. 이를 위하여, 2관성 공진 시스템에 대하여, 실험 측정하여 얻어진 시스템 모델과 수학적 모델을 비교하고, 시스템 매개변수의 변동에 따른 주파수 특성을 고찰하였다. 그리고, 이러한 2관성 시스템의 공진 특성과 매개변수 변

동을 제어기 설계에 반영하여 진동을 억제하며, 제시한 설계명세를 만족하는 제어기를 설계하였다.

또한, PI제어기, 불확실성의 구조를 고려하지 않은  $H_{\infty}$  제어기와  $\mu$  방법에 의한  $H_{\infty}$  제어기를 실제 제작한 시스템에 적용하여 시뮬레이션하고 실험하였다. 그 결과  $\mu$  방법에 의한  $H_{\infty}$  제어기가 성능 조건을 만족하며, 안정함을 보였다.

**참고문헌**

- [1] S. Morimoto, H. Kameyama, Y. Takeda, "Comparison of resonance ratio control and  $H_{\infty}$  control on speed control of two-mass system," *Trans. IEE-Jpn.*, vol. 116-D, no. 6, pp. 678-684, 1996.
- [2] Y. Hori, "2-inertia system control using resonance ratio control and manabe polynomials," *Trans. IEE-Jpn.*, vol. 114-D, no. 10, pp. 1038-1045, 1994.
- [3] M. Takano, K. Kurotani, K. Takeda, A. Tanisaka, S. Kusumoto and K. Yano, "Application of  $H_{\infty}$  control to motor speed control system," *IEEE IECON, Conf.*, pp. 839-842, 1991.
- [4] S. Morimoto, M. Sanada, Y. Takeda, "Vibration control of mechanical resonance system based on  $H_{\infty}$  control theory," *IPEC 95 Conf.*, pp. 1446-1451, 1995.
- [5] W. H. Yao, M. Tomizuka, "Servo system design based on LQ and  $H_{\infty}$  approaches," *American Control Conf.*, pp. 2780-2784, 1993.
- [6] K. Zhou, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [7] 美多 勉,  $H_{\infty}$  制御, 昭晃堂, 1994.
- [8] A. Packard, G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, R. Smith,  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide, MathWorks Inc., 1994.
- [9] 이상효, 이종용, 조도현, 박종우, 신선권, " $H_{\infty}$  강건 제어 이론을 이용한 2관성 공진계의 속도 제어," 10차 한국자동제어 학술회의 논문집, pp. 304-312, 1995.
- [10] 이상효, 이상철, 황영민, "2관성 시스템의 속도 제어를 위한 강건 제어기의 설계," 11차 한국자동제어 학술회의 논문집, pp. 767-770, 1996.
- [11] S. Wolfram, *The Mathematica Book 3rd Ed.*, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [12] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_{\infty}$  control problems," *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 34, no 8, pp. 831-847, 1989.



부록

표 1. 시스템 매개변수.

Table 1. System parameters.

기 호	명 칭	실험적용 값과 단위
$J_M, J_L$	모터와 부하의 관성모멘트	$4.9 \times 10^{-6} [kg m^2]$
$K_{IM}, K_{IL}$	모터와 부하의 토크상수	$5.34 \times 10^{-2} [Nm/A]$
$K_{\omega M}, K_{\omega L}$	모터와 부하의 전압상수	$5.35 \times 10^{-2} [Vs/rad]$
$R_{\omega M}, R_{\omega L}$	모터와 부하의 아마추어 저항	$2.7 [\Omega]$
$k_S$	스프링 상수	$47 [Nm/rad]$
$J_{cup}$	결합기 관성 모멘트	$8.526 \times 10^{-7} [kg m^2]$
$J_{tach}$	타코 발생기 관성 모멘트	$3.0 \times 10^{-7} [kg m^2]$

표 2. D-K 반복법.

Table 2. D-K iteration.

Iteration #	1	2
제어기 차수	4	8
전체 D-척도구성 행렬의 차수	0	4
최적 $\gamma$ 값	4.382	1.031
최대 $\mu$ 값	4.115	0.995

· 불확실성의 구조를 고려하지 않은 표준  $H_\infty$  방법에 의한 제어기 :

$$K_{H_\infty}(s) = \frac{332.5s^5 + 9.899 \times 10^7 s^4 + 8.734 \times 10^{11} s^3 + 7.274 \times 10^{14} s^2 + 1.941 \times 10^{17} s + 1.025 \times 10^{19}}{s^6 + 2.167 \times 10^4 s^5 + 2.219 \times 10^8 s^4 + 8.635 \times 10^{11} s^3 + 2.28 \times 10^{14} s^2 + 1.576 \times 10^{16} s + 2.091 \times 10^{17}}$$

· 불확실성의 구조를 고려한  $\mu$  방법에 의한  $H_\infty$  제어기:

$$K_{\mu 1} = \frac{1.052 \times 10^9 s^3 - 3.359 \times 10^{12} s^2 - 1.314 \times 10^{15} s - 2.024 \times 10^{17}}{s^4 + 1.953 \times 10^6 s^3 + 4.028 \times 10^{12} s^2 - 2.015 \times 10^{15} s - 1.415 \times 10^{16}}$$

$$K_{\mu 2}(s) = \frac{-1.425 \times 10^6 s^7 - 2.086 \times 10^{10} s^6 - 1.32 \times 10^{14} s^5 - 4.437 \times 10^{17} s^4 - 7.549 \times 10^{20} s^3 - 5.704 \times 10^{23} s^2 - 1.844 \times 10^{26} s - 2.003 \times 10^{28}}{s^8 + 1.932 \times 10^6 s^7 + 2.365 \times 10^{10} s^6 + 1.217 \times 10^{14} s^5 + 3.44 \times 10^{17} s^4 + 4.849 \times 10^{20} s^3 + 2.378 \times 10^{23} s^2 + 3.32 \times 10^{25} s + 2.188 \times 10^{26}}$$

$$K_{\mu} = \frac{-1.425 \times 10^6 s^5 - 1.982 \times 10^{10} s^4 - 1.174 \times 10^{14} s^3 - 3.555 \times 10^{17} s^2 - 4.815 \times 10^{20} s - 1.779 \times 10^{23}}{s^6 + 1.932 \times 10^6 s^5 + 2.221 \times 10^{10} s^4 + 1.05 \times 10^{14} s^3 + 2.637 \times 10^{17} s^2 + 2.776 \times 10^{20} s + 1.911 \times 10^{21}}$$

조도현



1987년 광운대 공대 전자공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사) 1991-1993년 LG전자 중앙연구소 근무. 1998년 광운대 대학원 제어계측공학과 졸업(공학박). 현재 삼성종합기술원 전문연구원. 관심분야는 강건성제어, PLC응용, 로봇 제어.

이종용



1983년 한양대 공대 원자력공학과 졸업. 1988년 광운대 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학박). 현재 광운대학 전산사회교육원 대우 교수. 관심분야는 비선형제어 설계, PLC응용.

이상효



1981년 연세대 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1980년 광운대 공대 전자공학과 조교수. 1983년-1984년 캘리포니아대학(버클리) 객원 연구원. 현재 광운대 공대 제어계측공학과 교수. 관심분야는 강건성제어 설계, PLC

응용.