

〈논 문〉

## 터보압축기의 진동 특성에 관한 해석적 연구

An Analytical Investigation on Vibrational Characteristics of Turbo Compressor

이 형 우\* · 이 동 환\*\* · 박 노 길\*\*\*

Hyoung-Woo Lee, Dong-Hwan Lee and No-Gill Park

(1998년 6월 25일 접수 ; 1998년 11월 6일 심사완료)

**Key Words :** Helical Gear(헬리컬기어), Force Coupling(연성된 힘), Transfer Matrix(전달 행렬), Turbo Compressor(터보압축기), Transmitted Error(치합 전달오차), Unbalance(불평형), Perturbation Method(섭동법)

### ABSTRACT

A dynamic model of turbo compressor having helical gear pairs is developed. The model accounts for the shaft and bearing flexibilities, gyroscopic effects and the force couplings among the transverse, torsion, and axial motions due to gearings. For the mode analysis of turbo compressor, a transfer matrix method is used. The excitation sources caused by the mass unbalances of the rotors and misalignment of the shafts, the transmitted errors of the gearings, and the vane passing frequencies of the Impeller are studied qualitatively. By introducing the perturbation method, the generated forcing frequencies are defined and divided into three groups. With the field data, two critical speeds are analytically found and the corresponding modal characteristics are examined.

### 1. 서 론

터보압축기는 모터로부터 동력이 전달되면 구동축에 의해 회전하고 피니언에 의해 임펠러(impeller)로 동력이 전달되어 유동체를 압축한다. 터보압축기의 정속기부분은 3단 헬리컬기어로 구성되어 있는데 헬리컬기어는 스피어기어보다 볼림률이 높아서 정속운전에 유리하나 전달력의 분산으로 인하여 축방향 진동을 유발하여 스피어기어 연쇄기구에 비하여 복잡한 연성특성을 나타낸다. 즉, 헬리컬기어 시스템은 굽힘, 비틀림, 축방향이 서로 연성되어서 구

성요소에 대한 운동을 병진 3방향 및 회전 3방향 모두 기술해야한다.

Lida<sup>(1)</sup>는 스피어기어의 굽힘과 비틀림의 연성효과를 고려한 기어-축 시스템의 동력학 거동이 굽힘 및 비틀림을 비연성으로 단순화 시킨 모델의 결과와 다르다는 것을 보였다. Schwibinger<sup>(2)</sup>은 스피어기어의 비틀림과 굽힘진동의 연성효과가 기어-축 시스템의 안정성에 영향을 끼친다는 것을 보였다. Choy<sup>(3)</sup>는 굽힘과 비틀림이 연성된 3단 스피어기어 시스템에 대하여 동력학 모델을 개발하고 정상상태와 과도 응답을 해석하였다.

헬리컬기어의 연구로서, Umeza<sup>(4,5)</sup>는 작은 치폭을 가지는 동력전달용 1단 헬리컬기어의 치합전달오차를 줄이기 위해 회전운동을 수치적으로 해석했다. Neriya<sup>(6)</sup>는 1단 헬리컬기어의 비틀림, 굽힘, 축방향이 연성효과를 고려하였고 정적치합전달오차를 가진

\* 정회원, 부산대학교 대학원 생산기계공학과

\*\* 정회원, 한국 기계연구원 구조시스템 연구부

\*\*\* 정회원, 부산대학교 공과대학 기계공학부

원으로하는 응답을 구했다. 또 Neriya<sup>(7)</sup>는 1단 헬리컬기어-로터시스템의 안정성을 조사하기 위하여 비틀림, 굽힘, 축방향이 연성된 힘의 효과를 고려하였고 Floquet theory를 이용해서 안정영역을 산출하였다.

본 연구에서는 3단 헬리컬기어를 가지는 터보압축기의 진동 특성을 해석하기 위하여, 집중질량계로 모델링하였고 구성요소의 강제운동을 완전한 6자유도계로 기술하였다. 기어연쇄 시스템의 해석방법으로 Hibner's branch<sup>(8,9)</sup>법을 도입한 전달행렬법을 채택하고  $\lambda$ -matrix<sup>(9,10)</sup>로 정식화하여 시스템고유진동수와 고유모드를 산출하였다. 터보압축기의 질량불평형력, 치합전달오차, 축어긋남(misalignment), 백래쉬 및 베어링유격, 치접촉 강성계수의 주기적 변화로 인한 가진원동에 대한 가진주파수를 정식화하고, 주요 진동·소음원들을 예측하였다.

## 2. 터보압축기의 수학적 모형화

다단 헬리컬기어로 구성되어 있는 터보압축기의 수학적 모형은 Fig. 1과 같다. Fig. 1에서 L은 라인(line), D는 디스크, G는 기어, P는 기어쌍, B는 베어링, S는 축의 약자이다. 터보압축기는 3개의 기어요소, 2개의 기어쌍, 6개의 베어링, 24개의 축요소, 그리고 4개의 디스크요소를 가지는데, D #1은 2단 임펠러, D #2는 3단 임펠러, D #4는 1단 임펠러, 그리고 D #3은 축의 질량을 등가시키기 위해 만든 디스크이다. 터보압축기는 모터로부터 동력이 전달되면 구동축에 의하여 불기어(bull-gear)가 회전하고 헬리컬 피니언에 의하여 1단, 2단, 3단 임펠러로 동력이 전달된다. 각 중동축의 끝단에 설치된

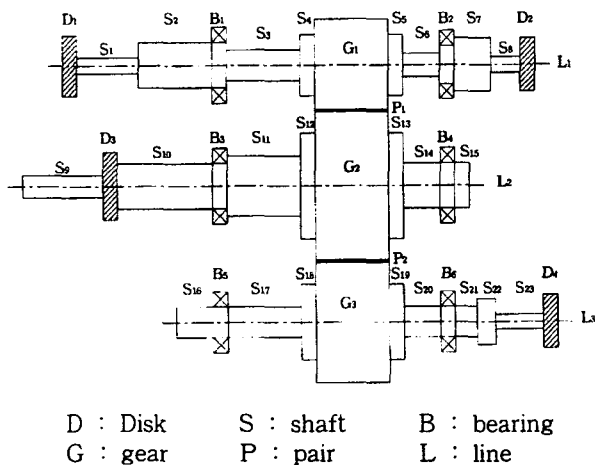


Fig. 1 Mathematical model of turbo compressor

임펠러는 3단에 걸쳐 순차적으로 유동체를 압축한다. 각 축은 저어널 베어링으로 지지되어 있고, 구동축에는 축방향 유동을 억제하는 단이 설계되어 있다.

## 2.1 헬리컬 기어쌍의 전달행렬

기어시스템은 기어연쇄부, 로터부, 회전축부, 베어링부로된 구성요소들로 구분되는데 로터부, 회전축부, 베어링부에 관한 모형화는 생략하고, 여기서는 헬리컬 기어쌍에 대한 수학적 모형화에 대하여 설명하고자 한다.

Fig. 2는 헬리컬기어쌍의 수학적모델 및 절점에서의 일반화된 작용힘과 일반화된 변위를 나타낸다. 전달행렬모델의 양절점에서의 병진변위벡터  $u$ 와 회전변위벡터  $\theta$ 로 구성된 일반화된 변위 벡터는

$$q = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

로 표시하고 절점에 작용하는 힘벡터  $F$ 와 모멘트 벡터  $M$ 으로 구성된 일반화된 힘벡터는

$$f = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

로 표시한다.

헬리컬 기어쌍의 좌표축은 구동기어의 중심을 원점으로 하고,  $x$ 축은 기어 반경방향의 수평축이고,  $y$ 축은 기어 반경방향의 수직축,  $z$ 축은 회전축 방향과 평행하고 입력축에서 진행되는 방향을 (+)로 한다. 치접촉부의 진동모델은 치탄성 변형을 고려하

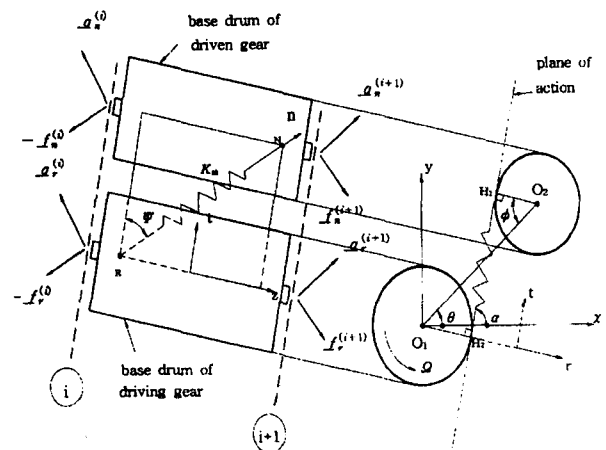


Fig. 2 A schematic of the mathematical model on a pair helical gear

여기 치면에 수직방향으로 등가 단일 스프링으로 가정하였다. 전달되는 치접촉력의 방향벡터  $\mathbf{n}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{n} = \underline{e}_t \cos \psi + \underline{e}_z \sin \psi \quad (3)$$

$$\underline{e}_t = \underline{e}_x \cos \alpha + \underline{e}_y \sin \alpha \quad (4)$$

$$\mathbf{n} = \underline{e}_x \cos \alpha \cos \psi + \underline{e}_y \sin \alpha \cos \psi + \underline{e}_z \sin \psi \quad (5)$$

여기서,  $\psi$ 는 비틀림각,  $\alpha$ 는 작용면의 경사각으로 구동기어가 반시계방향으로 돌 때는  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi + \theta$ 이고, 구동기어가 시계방향으로 돌 때는 작용면이 반전되므로  $\alpha = \phi + \theta - \frac{\pi}{2}$ 가 된다. 여기서,  $\phi$ 는 양기어의 축직각 물림 압력각,  $\theta$ 는 중심선 경사각이다.

Fig. 2의 모형에서 구동기어와 종동기어 각각에 대한 자유물체도를 그리고 강체의 힘의 평형방정식을 적용하면 다음과 같은 12개의 평형방정식이 얻어진다.

$$F_{x_1}^{i+1} = F_{x_1}^i + N_t \cos \psi \cos \alpha \quad (6)$$

$$F_{y_1}^{i+1} = F_{y_1}^i + N_t \cos \psi \sin \alpha \quad (7)$$

$$F_{z_1}^{i+1} = F_{z_1}^i + N_t \sin \psi \quad (8)$$

$$M_{x_1}^{i+1} = M_{x_1}^i - N_t r_1 \sin \psi \cos \alpha \quad (9)$$

$$M_{y_1}^{i+1} = M_{y_1}^i - N_t r_1 \sin \psi \sin \alpha \quad (10)$$

$$M_{z_1}^{i+1} = M_{z_1}^i - N_t r_1 \cos \psi \quad (11)$$

$$F_{x_2}^{i+1} = F_{x_2}^i - N_t \cos \psi \cos \alpha \quad (12)$$

$$F_{y_2}^{i+1} = F_{y_2}^i - N_t \cos \psi \sin \alpha \quad (13)$$

$$F_{z_2}^{i+1} = F_{z_2}^i - N_t \sin \psi \quad (14)$$

$$M_{x_2}^{i+1} = M_{x_2}^i - N_t r_2 \sin \psi \cos \alpha \quad (15)$$

$$M_{y_2}^{i+1} = M_{y_2}^i - N_t r_2 \sin \psi \sin \alpha \quad (16)$$

$$M_{z_2}^{i+1} = M_{z_2}^i - N_t r_2 \cos \psi \quad (17)$$

여기서, 하첨자 1,2는 각각 구동기어, 종동기어이고 상첨자는 전달모델의 상태번호이다.  $N_t$ 는 치접촉압축력으로서 다음과 같이 구해진다. 헬리컬기어의 치접촉부의 진동모델을 Fig. 2와 같이 치면에 수직인 단순 스프링으로 가정하면,

$$N_t = K_{th} \Delta \quad (18)$$

로 정의된다. 여기서  $K_{th}$ 는 치접촉부의 치강성계수이고  $\Delta$ 는 치면과 수직방향의 치변형량이다. 기어의 치폭을 무시할때,  $\Delta$ 는 구동기어와 종동기어의 중심점에서 일반화된 변위벡터  $\mathbf{q}_r$ 과  $\mathbf{q}_n$ 의 함수로 정의된다. 이들의 관계식을 구동기어와 종동기어의 평형방정식 식 (6)~(17)에 대입하여 정리하면, 헬리컬기어쌍의 강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{f}_r \\ \mathbf{q}_n \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{rr} & \mathbf{I} & \mathbf{T}_{rn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{nr} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{nn} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{f}_r \\ \mathbf{q}_n \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix}_i \quad (19)$$

여기서,  $\mathbf{T}_{rr}$ ,  $\mathbf{T}_{rn}$ ,  $\mathbf{T}_{nr}$ ,  $\mathbf{T}_{nn}$ 은 기어 접촉부의 강성이 고려된 부전달행렬로, 다음과 같이 헬리컬기어쌍의 제원에 따라 정의된다.

$$\mathbf{T}_{rr} = K_{th} \mathbf{A}_r \mathbf{A}_r^T$$

$$\mathbf{T}_{rn} = K_{th} \mathbf{A}_r \mathbf{A}_n^T$$

$$\mathbf{T}_{nr} = K_{th} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_r^T$$

$$\mathbf{T}_{nn} = K_{th} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^T$$

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \alpha \\ \cos \psi \sin \alpha \\ \sin \psi \\ -r_1 \sin \psi \cos \alpha \\ -r_1 \sin \psi \sin \alpha \\ r_1 \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} -\cos \psi \cos \alpha \\ -\cos \psi \sin \alpha \\ -\sin \psi \\ -r_2 \sin \psi \cos \alpha \\ -r_2 \sin \psi \sin \alpha \\ r_2 \cos \psi \end{pmatrix}$$

## 2.2 고유치해석

터보압축기의 전달행렬 모델을 수식적으로 정리하면 다음과 같다.  $i$ 번째 상태변수 벡터  $\mathbf{s}_i(t)$ 에 대하여  $\mathbf{s}_i(t) = \mathbf{S}_i e^{\lambda t}$ 라 할 때,  $i$ 와  $i+1$ 사이의 전달행렬 관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{S}_{i+1} = \mathbf{L}_i \mathbf{S}_i \quad (20)$$

여기서  $\mathbf{L}_i$ 는  $i$ 와  $i+1$ 사이의 요소에 대한 극부전달행렬로서, 일반적으로

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 \lambda + \mathbf{L}_2 \lambda^2 \quad (21)$$

로 표현된다. 여기서  $\mathbf{L}_0$ 은 강성요소에 의한,  $\mathbf{L}_1$

는 감쇠요소에 의한, 그리고  $L_N$ 는 관성요소에 의한 국부전달행렬이다. 축계의 양단 사이의 전달행렬 관계식은 국부전달행렬의 연속적인 곱에 의해 다음과 같이 얻어진다.

$$S_N = H S_1 \quad (22)$$

여기서,  $H$ 는 누적된 전달행렬식으로 다음과 같이 정의된다.

$$H = \prod_{j=1}^{N-1} L_{N-j} \quad (23)$$

양단의 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega = B_r^T S_N \quad (24)$$

$$S_1 = B_L Z \quad (25)$$

여기서  $B_r$ ,  $B_L$ 는 각각 축 양단의 경계조건으로 부터 정의되는 상수 행렬이다.

식 (24), (25)을 식 (22)에 적용하면, 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\Omega = D_p(\lambda) Z \quad (26)$$

여기서,  $D_p(\lambda) = B_r^T H B_L$ 인데 이를  $\lambda$ 에 대한 급수형태로 표현하면 다음과 같다.

$$D_p(\lambda) = E_0 + E_1 \lambda + E_2 \lambda^2 + \dots + E_{p-1} \lambda^{p-1} + E_p \lambda^p \quad (27)$$

식 (27)을 일반화된 고유치 문제로 바꾸면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(A\lambda - B)X = 0 \quad (28)$$

여기서,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_p \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & E_p & E_{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_{p-1} & E_{p-2} \\ 0 & 0 & E_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & E_p & E_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_p & E_{p-1} & E_{p-2} & \cdot & \cdot & \cdot & E_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_p & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & E_p & E_{p-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_{p-1} & E_{p-2} & 0 \\ 0 & E_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_3 & 0 \\ E_p & E_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & E_3 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -E_0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda^{(P-1)} Z \\ \lambda^{(P-2)} Z \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda^1 Z \\ Z \end{pmatrix}$$

이다.

### 3. 가진원에 대한 고찰

터보압축기의 가진원에는 회전체의 질량불평형 및 회전축의 축어긋남(misalignment)에 의한 가진, 임펠러의 공력에 의한 가진, 치접축부의 치합 전달오차에 의한 가진, 치형강성계수의 주기적 변화로 인한 가진, 기어 백래쉬 효과 및 베어링 유격의 비선형특성에 의한 가진이 있다. 이들의 진동원은 독립적으로 혹은 상호 작용하여 많은 가진주파수를 파생시키는데 구체적인 설명을 위해 Fig. 3과 같은 강성시변계와 비선형항을 포함한 단순 스프링-질량계를 생각해 보자.

운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x} + [K_0 + \epsilon K_1(t) + \epsilon^2 K_2(t)] x + \epsilon(ax^2 + \beta x^3) = f_0(t) + \epsilon f_1(t) \quad (29)$$

여기서,  $\epsilon$ 은 작은량을 대표하는 문자이다.  $x$ 는 응답신호,  $m$ 은 시스템 질량 매개변수,  $K_0$ 은 시정제로 가정한 모델의 시스템 매개변수, 그리고  $f_0(t)$ 는 일차적으로 터보시스템에 가해지는 가진원(불평형, 축어긋남, 임펠러의 공력, 치합전달오차)의 조화가진력을 대표한다.  $K_1(t)$ 는 치강성계수의 시변항 중에서 1차 조화(harmonic)항,  $K_2(t)$ 는 2차이상의 조화항을 대표하며,  $ax^2 + \beta x^3$ 은 베어링 유격과 기어백래쉬에 의한 비선형효과를 대표한다. 가진원 항에서  $f_1(t)$ 는 가진원의 주기적 특성중에서 1차 조화항을

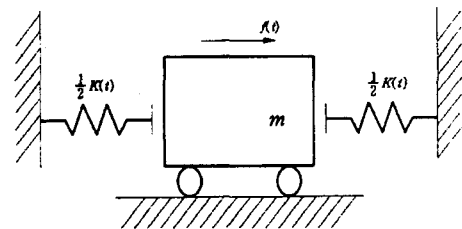


Fig. 3 Simple spring-mass system

제외한 나머지 2, 3, ...차 조화항을 대표한다.

일차가진원은 시스템에 물리적으로 내재되어 있는 진동원으로서, 이때의 가진주파수는 회전불평형과 축거긋남으로 인해 발생하는 축 회전속도, 임펠러 공격에 의한 가진주파수, 그리고 치접축부의 치합 전갈오차로 인한 치통과 진동수(축의 회전속도에 기여잇수를 곱한 값)로 구성되어 있다. 따라서  $f_0(t)$ 는 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$f_0(t) = \sum_{i=1}^N f_{0i} e^{j\gamma_i^{(1)}t} \quad (30)$$

여기서,  $\gamma_i^{(1)}$ 은 일차 가진진동수를 의미한다.

식 (29)를 만족하는 응답  $x(t)$ 를

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + O(\varepsilon^3) \quad (31)$$

로 놓을때 식 (30), (31)을 식 (29)에 대입하여  $O(1)$ 항만 취하면

$$m\ddot{x}_0 + K_0 x_0 = \sum_{i=1}^N f_{0i} e^{j\gamma_i^{(1)}t} \quad (32)$$

이 된다. 따라서 일차 응답신호  $x_0(t)$ 는,

$$x_0(t) = \sum_{i=1}^N x_{0i} e^{j\gamma_i^{(1)}t} \quad (33)$$

이 된다.

식 (29)에서  $O(\varepsilon)$ 항을 취하면

$$m\ddot{x}_1 + K_0 x_1 = -K_1(t)x_0 + f_1(t) - \alpha x_0^2 - \beta x_0^3 \quad (34)$$

을 얻는데,  $f_1(t)$ 는 축거긋남, 임펠러의공력, 치합전갈오차의 주기적 특성에 의한 기본진동수의 2, 3, ...차 조화가진으로서,

$$f_1(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=2}^{\infty} f_{0i} e^{jk\omega_i t} + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=2}^{\infty} f_{0i} e^{jkQ_i t} + \sum_{k=2}^{\infty} f_{0i} e^{jk\omega_i t} \quad (35)$$

로 정의된다. 여기서,  $w_i$ ,  $Q_i$ ,  $w_i$ 는 각각 축의 회전속도, 임펠러의 가진주파수, 치통과 주파수이다. 또한,

$$K_1(t) = K_1 e^{j\omega_i t} \quad (36)$$

이다. 식 (33)과 (35), (36)를 식 (34)에 대입하면 비 선형항에 여러개의 가진진동수가 파생되는데, 첫째  $K_1(t)x_0$ 항에서는

$$\omega_i \pm \gamma_i^{(1)}, i=1, 2, \dots, N_1 \quad (37)$$

의 가진진동수가 얻어지고, 둘째항  $f_1(t)$ 에서는,

$$k\omega_i, kQ_j, k\omega_i, k=2, 3, \dots, i=1, 2, 3, j=1, 2 \quad (38)$$

의 가진진동수가 얻어진다. 또, 나머지항  $-\alpha x_0^2 - \beta x_0^3$ 에서는,

$$\gamma_i^{(1)} \pm \gamma_j^{(1)}, \gamma_i^{(1)} \pm \gamma_j^{(1)} \pm \gamma_k^{(1)}, i, j, k=1, 2, \dots, N_1 \quad (39)$$

의 가진진동수가 얻어진다. 따라서 이차 가진진동수  $\gamma_i^{(2)}$ ,  $i=1, 2, \dots, N_2$ 는 식 (37), (38), (39)을 포함한 진동수이다.

식 (29)에서  $O(\varepsilon^2)$ 항을 취하면

$$m\ddot{x}_2 + K_0 x_2 = -K_1(t)x_1 - K_2(t)x_0 \quad (40)$$

을 얻는다. 여기서  $K_2(t)$ 는

$$K_2(t) = \sum_{k=2}^{\infty} K_2 e^{jk\omega_i t} \quad (41)$$

이므로  $K_2 x_0$ 항에서,

$$k\omega_i \pm \gamma_i^{(1)}, k=2, 3, \dots, i=1, 2, \dots, N_1 \quad (42)$$

의 가진진동수를 얻고,  $K_1 x_1$ 항에서,

$$\omega_i \pm \gamma_i^{(2)}, i=1, 2, \dots, N_2 \quad (43)$$

를 얻는다. 따라서 삼차 가진진동수  $\gamma_i^{(3)}$ ,  $i=1, 2, \dots, N_3$ 는 식 (42), (43)을 포함한 진동수이다.

이상을 종합하면 압축기 시스템에서 발생될 수 있는 가진진동수는 Table 1과 같이 나타낼수 있다. Table 1을 수학적으로 일반화 하면 다음과 같다.

$$\gamma_i = j\omega_i \pm a\omega_1 \pm b\omega_2 \pm c\omega_3 \pm dQ_1 \pm eQ_2 \quad (44)$$

여기서,  $j, a, b, c, d, e$ 는 정수의 index이다.  $\omega_i$ 는 치통과 주파수,  $\omega_1$ 은 line 1의 회전속도,  $\omega_2$ 는 line 2의 회전속도,  $\omega_3$ 은 line 3의 회전속도이다.  $Q_1$ 은 2단(혹은 3단) 임펠러의 공력에 의한 가진진동수,  $Q_2$ 는 1단 임펠러의 공력에 의한 가진진동수이다. 색인(index)의 범위는  $j = 0 \sim 5$ ,  $a, b, c, d, e = 0 \sim 3$ 까지 취하였고, 식 (44)의 조합에서 파생 될수 있는 가진진동수는  $6144 (= 6 \times 4^5)$ 가지가 된다.

이상으로 터보압축기의 가진원에 대한 특성을 살펴 보았는데, 회전불평형과 축거긋남, 임펠러 공력,

Table 1 Excitation source of turbo compressor

	가진원	가진진동수	가진진동수 수식화	일반화
1 차 가진진동수	질량불평형 축어긋남	회전축의 회전속도 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$	$\omega_i$	$\gamma_j^{(1)}$
	임펠러 공력	임펠러 가진진동수 $Q_1, Q_2$	$Q_i$	
	치합전달오차	치통과 진파수 $\omega_t$	$\omega_t$	
2 차 가진진동수	치합전달오차의 주기적 특성	(정수) × (치통과진동수) $2\omega_t, 3\omega_t, 4\omega_t, 5\omega_t \dots$	$j\omega_t$	$\gamma_j^{(2)}$
	축어긋남의 주기적 특성	(정수) × (회전축 속도) $2\omega_1, 3\omega_1 \dots$ $2\omega_2, 3\omega_2 \dots$ $2\omega_3, 3\omega_3 \dots$	$j\omega_i$	
	Impellor 공력의 비선형 특성	(정수) × 임펠러 가진진동수 $2Q_1, 3Q_1 \dots$ $2Q_2, 3Q_2 \dots$	$jQ$	
	치강성계수의 시변 특성	치통과진동수와 1차 가진진동수의 side band	$\omega_t \pm \gamma_j^{(1)}$	
	기어백래쉬와 베어링 유격의 비선형 특성	1차응답의 제곱, 세제곱항에서 발생하는 side bands	$\gamma_i^{(1)} \pm \gamma_j^{(1)},$ $\gamma_i^{(1)} \pm \gamma_j^{(1)} \pm \gamma_k^{(1)}$	
3 차 가진진동수	치합전달오차의 조화 특성	치통과 주파수와 2차 가진진동수의 side bands	$\omega_t \pm \gamma_j^{(2)}$	$\gamma_j^{(3)}$
	치합전달오차의 주기특성	치통과 주파수의 정수배와 1차 가진진동수의 side bands	$j\omega_t \pm \gamma_j^{(1)}$	
	기어백래쉬와 베어링 유격의 비선형 특성	1차가진진동수와 2차 가진진동수의 side bands	$\gamma_i^{(1)} \pm \gamma_j^{(2)},$ $\gamma_i^{(1)} \pm \gamma_j^{(1)} \pm \gamma_k^{(2)},$ $\gamma_i^{(1)} \pm \gamma_j^{(2)} \pm \gamma_k^{(2)}$	

그리고 치합전달오차로 인한 일차 가진진동수외에 시스템에 내재되어 있는 베어링유격과 기어백래쉬, 치접촉부의 시변특성의 작용으로 인한 이차, 삼차 가진진동수등이 파생됨을 살펴 보았다.

#### 4. 터보압축기의 진동특성 해석

터보압축기에 대한 구성요소별 파라미터 값으로서 디스크의 제원은 Table 2, 기어의 제원은 Table 3, 베어링의 제원은 Table 4에 있다. 사용된 베어링중에서, B #1, B #2, B #5, B #6은 pad수를 5개 가지는 LBP형태의 틸팅 패드(tilting pad) 베어링이다. 또, 불기어(G #2)쪽 베어링 B #3, B #4는

슬리브(sleeve)베어링이다. 베어링 강성계수는 베어링 하중 방향 및 그의 수직방향에 대해 주어졌다. 각 베어링의 방향은 기어쌍의 접촉방향과 시스템 구조를 고려하여 정력학적으로 산출하여 시스템 모델의 좌표계로 변환하여 사용하였다. 입력축의 정상상태 운전속도는 3600 rpm이고 기어쌍의 치강성계수는 N.G.Park<sup>(11)</sup>에 의해 개발된 프로그램에 의해 헬리컬 기어쌍의 치강성계수 값이 계산되었다. 산출된 값은 Pair 1이  $0.63628 \times 10^9$  N/m, Pair 2가  $0.65038 \times 10^9$  N/m이다.

운전속도 범위를 3600 rpm의  $\pm 30$  rpm으로 놓고, 이 범위내에 존재하는 공진점을 Table 1에 근거하여 입력축에 대한 캠벨선도(Campbell diagram)

Table 2 Disk specifications

Description	Mass (kg)	Transverse moment of inertia (kg · m <sup>2</sup> )	Polar moment of inertia (kg · m <sup>2</sup> )
1'st stage ( D #3 )	11.318	0.029	0.036
2'nd stage ( D #1 )	5.086	0.011	0.0076
3'rd stage ( D #2 )	3.530	0.015	0.0039

Table 3 Helical gear specifications

Description	1 st pinion ( G #3 )	2nd pinion ( G #1 )	Bull gear ( G #2 )
Pressure angle ( ° )	20	20	20
Helix angle ( ° )	20	20	20
Tooth width (mm)	70	70	70
Number of teeth	31	23	242
Module (mm)	2.75	2.75	2.75
I <sub>d</sub> (kg · m <sup>2</sup> )	0.2067	0.169	1.1249
I <sub>p</sub> (kg · m <sup>2</sup> )	0.10618	0.0701	1.534
Mass (kg)	28	17	352

Table 4 Bearing specifications

Description	B #1	B #2	B #3	B #4	B #5	B #6
Length (mm)	38.1	38.1	25.4	25.4	25.4	25.4
Speed (rpm)	38,000	38,000	3,600	3,600	28,000	28,000
Bearing load (N)	2,204	2,159	2,280	3,197	1,124	1,378
Film thickness(μ)	39.4	39.7	16.0	13.2	44.6	42.4
pad number	5	5	0	0	5	5
K <sub>11</sub> (×10 <sup>8</sup> N/m)	2.25	2.24	1.5	3.94	0.847	0.937
K <sub>12</sub> (×10 <sup>8</sup> N/m)	0.0835	7.17	2.05	-0.76	0.0169	0.076
K <sub>21</sub> (×10 <sup>8</sup> N/m)	0.0835	0.0717	0.57	-2.14	0.0169	0.076
K <sub>22</sub> (×10 <sup>8</sup> N/m)	2.47	2.46	1.38	0.75	0.860	0.996
C <sub>11</sub> (×10 <sup>4</sup> N-s/m)	0.414	0.412	52.8	59.1	0.214	0.233
C <sub>12</sub> (×10 <sup>4</sup> N-s/m)	0.013	0.011	35.2	-28.8	0.004	0.016
C <sub>21</sub> (×10 <sup>4</sup> N-s/m)	0.013	0.011	34.6	-28.8	0.004	0.016
C <sub>22</sub> (×10 <sup>4</sup> N-s/m)	0.447	0.448	29.9	18.9	0.238	0.254

\* 1-direction : perpendicular direction of bearing load

\* 2-direction : direction of bearing load

인 Fig. 4를 얻었다. 그림은 가진진동수 2000 Hz이하 및 입력축 기준속도 2500~4000 rpm에 대한 고유진동수와 가진진동수의 변화를 나타내었다. 가진

진동수는 일차 가진진동수 일부( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ )와 운전속도 범위내에서 공진을 유발하는 삼차 가진진동수( $\omega_1 + 3\omega_2 + \omega_3, 2\omega_2 + 2\omega_3 - \omega_1$ )에 대해서만

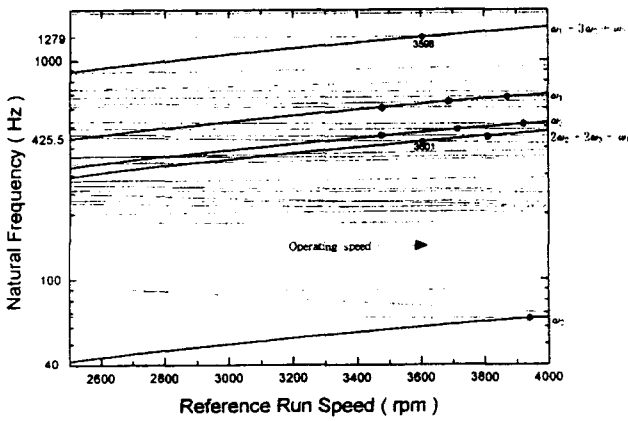


Fig. 4 Campbell diagram

Table 5 Critical speeds of turbo compressor ( $\omega_2$ )

$\gamma_i$	Critical speed (rpm)	Natural frequency (Hz)
$2\omega_2 + 2\omega_3 - \omega_1$	3601	425.5
$\omega_1 + 3\omega_2 + \omega_3$	3598	1279.0
$\omega_1$	3460	606.7
	3670	643.6
$\omega_3$	3460	450.1
	3716	483.4

\*  $\omega_1 = 10.522 \omega_2$ ,  $\omega_3 = 7.806 \omega_2$

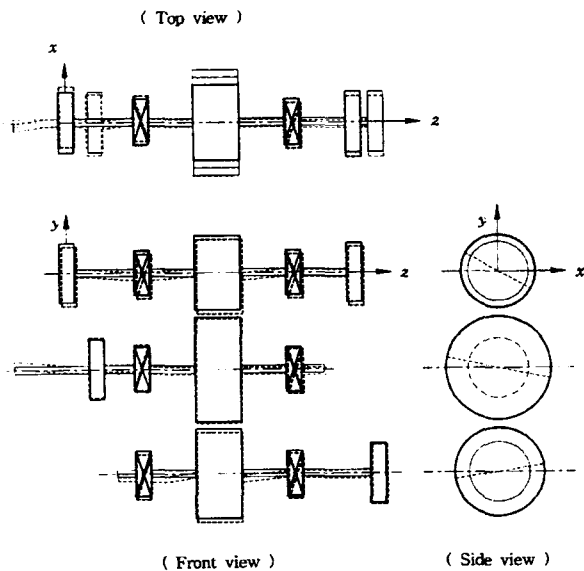


Fig. 5 The natural mode (425.5 Hz) on critical speed, 3601 rpm

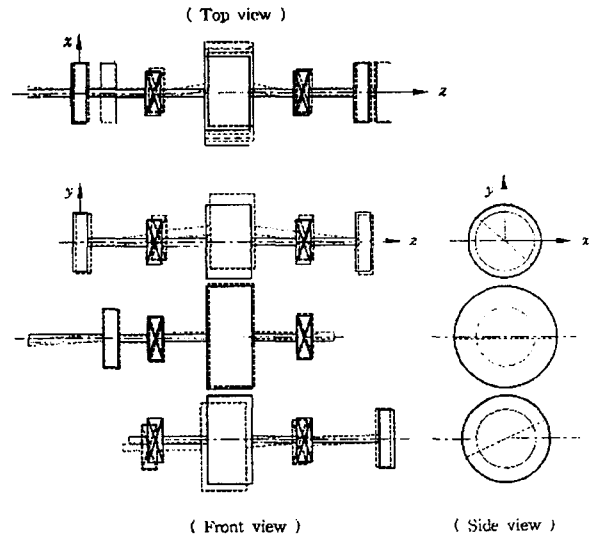


Fig. 6 The natural mode (1279 Hz) on critical speed, 3598 rpm

나타내었다. 일차 가진진동수  $Q_1, Q_2, \omega_i$ 는 운전속도 3600 rpm에서 88383, 65574, 14520 Hz로 높게 산출되어 진동과는 무관한 것으로 판단되어 도표에서 제외시켰다. Fig. 4를 요약하면 Table 5와 같다. 운전속도 범위내에 2개의 공진점 3598, 3601 rpm이 존재하는데, 3598 rpm은 가진진동수  $\omega_1 + 3\omega_2 + \omega_3$ 로 인한 공진주파수로서, 베어링 유격의 비선형특성에 의한 3차 가진진동수에 속한다.(Table 1 참조) 또, 공진점 3601 rpm은 가진진동수  $2\omega_2 + 2\omega_3 - \omega_1$ 로 인한 공진주파수로서, 베어링 유격의 비선형특성에 의한 삼차 가진진동수에 속한다. 공진점 3598 rpm의 공진주파수는 425.5 Hz이고 진동형은 Fig. 5에 도시되어 있는데, line 1(2, 3단축)과 line 3(1단 축)의 베어링과 기어의 진동이 큼을 알 수 있다. 또, 공진점 3601 rpm의 공진주파수는 1279 Hz이고 진동형은 Fig. 6에 도시되어 있다. line 1(2, 3단축)과 line 3(1단 축)의 베어링과 기어의 진동이 큼을 알 수 있다. 그리고 운전속도 범위를 벗어나긴 했지만, 부근에 일차 가진진동수인  $\omega_1, \omega_3$ 로 인한 공진점이 각각 3460, 3670, 3716 rpm이 존재한다.

### 5. 결 론

3단 헬리컬기어를 갖는 터보압축기에 대하여, 절점 자유도를 병진방향 3개와 회전방향 3개로 완전히 연성된 전달행렬 모델을 개발하고 진동 특성을 해석



하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) 터보압축기의 질량불평형력, 미스얼라이먼트, 치합전달오차, 임펠러 공력, 백래쉬 및 베어링유격, 치접촉 강성 계수의 주기적 변화로 발생하는 가진진동수를 정식화하였고 파생되는 가진진동수들을 섭동법을 이용하여 차수 분석하여 1차, 2차, 3차 가진진동수로 구분하였다.

(2) 운전속도 범위 내에서 공진점 유무를 판별하였다.

(3) 운전속도 3600 rpm 근처에 2개의 공진주파수(425.5, 1279 Hz)가 존재하는데, 이것은 베어링유격의 비선형 특성 가진원으로 사료된다.

### 참 고 문 헌

- (1) H. Iida, A. Tamura and M. Oonishi, 1985, "Coupled Torsional-Flexural Vibration of a Shaft in a Geared System", Bull. JSME 28, pp. 2694~2698.
- (2) P. Schwibinger and R. Nordmann, 1988, "The Influence of Torsional-Lateral Coupling on the Stability Behavior of Geared Rotor System", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power Vol. 110, pp. 563~571, OCTOBER.
- (3) F.K.Choy, Y.K.Tu, M.Savage And D.P. Townsend, 1991, "Vibration Signature and Modal Analysis of Multi-stage Gear Transmission", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, NO. 2/3, pp. 281~298.
- (4) K.Umezawa, T.Suzuki and T.Sato, 1986, "Vibration of Power Transmission Helical Gears (Approximate Equation of Tooth Stiffness)", Bulletin of JSME, Vol. 29, No. 251, pp. 1605~1611.
- (5) K.Umezawa, T.Suzuki and H.Houjoh, 1988, "Estimation of Vibration of Power Transmission Helical Gears by Means of Performance Diagrams on Vibration", JSME International Journal Series III, Vol.31, No. 3, pp. 598~605.
- (6) Neriya, S.V., Bhat, R.B., and Sankar, T.S., 1988, "On the Dynamic Response of a Helical Geared System Subjected to a Static Transmission Error in the Form of Deterministic and Filtered White Noise Input", ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 110, pp. 501~506.
- (7) Neriya, S.V., Bhat, R.B., and Sankar, T.S., 1989, "Stability analysis of force coupled in helical geared rotor systems", Proceedings of the Twelfth Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise, Montreal, Canada, Sept. 17-21, pp. 225~229.
- (8) L.D., Mitchell, 1980, "A New Branching Technique for the static and Dynamic Analysis of Geared System.", Vibration in Rotating Machinery, I Mech E Conference Publication.
- (9) 이형우, 박노길, 1998, "전달행렬법을 이용한 다단치차계의 비틀림 진동해석", 한국소음진동학회지, 제 8 권, 제 3 호, pp. 504~512.
- (10) Chong-won Lee, 1993, "Vibration Analysis of Rotors", Kluwer Academic publishers.
- (11) Nogill Park, 1987, "An Analysis investigation of Geared System Dynamics Containing Spur and Helical gears", Ph.D, North Carolina state university, Raleigh.