

슬라이딩 모드 제어에 의한 불확정성을 가진 대규모 시간지연 선형 계통의 강인 분산 안정화

Robust Decentralized Stabilization of Large-Scale Time-Delayed Linear Systems with Uncertainties via Sliding Mode Control

박장환, 유정웅
(Jang-Hwan Park, and Jeong-Woong Ryu)

Abstract : The present paper is concerned with the robust decentralized stabilization problem of large-scale systems with time delays in the interconnections using sliding mode control. Based on Lyapunov stability theorem and H_∞ theory, an existence condition of the sliding mode and a robust decentralized sliding mode controller are newly derived for large-scale systems under mismatched uncertainties. Finally, a numerical example is given to verify the validity of the results developed in this paper.

Keywords : sliding mode control, large-scale system, robustness, uncertainty, time-delay

I. 서론

일반적으로 제어기를 설계할 경우에, 수학적 모델과 실제 계통간의 피할 수 없는 모델링 오차(modelling error)가 발생한다. 모델링 오차는 제어 계통의 성능 저하뿐만 아니라 계통의 안정성까지도 보장하지 못하는 경우를 발생시킨다. 이러한 오차의 대표적인 것으로 불확정성(uncertainty)과 시간지연(time-delay) 등이 있으며, 특히, 상호간섭(interconnection)을 가진 대규모(large-scale) 계통의 해석에서 중요하게 분석되는 요소들이고, 최근에 들어 화학공정이나 전력 계통, 컴퓨터 통신망, 운송 분야 등의 대규모 계통에서 시간 지연이나 불확정성을 갖더라도 안정성을 보장하는 연구가 많이 진행되고 있다.

시간지연과 불확정성을 갖는 대규모 시스템의 안정성 해석은 이의 특성에 따라 미분 부등식 접근법[1], Lyapunov 함수 접근법[2], matrix measure 접근법[3], Razumikhin 이론 접근법[4] 등을 기반으로 다양한 제어 기법들이 적용되어지고 있다.

슬라이딩 모드 제어는 계수의 섭동(perturbation)이나 외란(disturbance)의 존재 하에 어느 정도의 강인성을 가지고 있는 것으로 알려져 있다. 특히, 입력의 정합된(matched) 섭동이나 외란의 경우에는 엄밀한 특성을 나타낸다. 분산 슬라이딩 모드 제어 기법은 상기한 슬라이딩 모드의 장점인 강인성을 대규모 계통에서 이끌어 내기 위한 제어 기법중 하나이다. 이것은 Richer et al.[5], Mathews와 DeCarlo[6], Khurana[7], Lee 와 Wang[8], 그리고 Yasuda[9], Yan[10] 등에 의하여 많은 연구가 되었다.

본 논문에서는 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 계통의 강인 안정화하기 위한 슬라이딩 모드 제어기에 대하여 다루었다. 고려된 계통은 정합조건(matching condition)이 성립하지 않는 불확정성 및 시간지연이 존

재하는 경우로 Yasuda나 Yan의 계통에 비하여 보다 일반적인 경우에 대하여, Lyapunov 안정성 이론과 H_∞ 이론을 바탕으로 모델링 오차에 대한 강인 안정성을 보장하도록 하는 슬라이딩 표면과 제어기의 설계 조건을 제시하였다. 마지막으로, 수치예제를 통하여 제시된 결과의 유용성을 보여준다.

본문에는 다음의 기호들이 사용되었다. $\lambda_M(\cdot)$, $\lambda_m(\cdot)$ 은 각각 최대, 최소 고유값(eigen value)이고 I_m 은 $m \times m$ 항등(identity)행렬이다. $\|\cdot\|_i$ 는 $i=1, 2, \dots, \infty$ 에 대한 벡터 노름이며, $\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[g(j\omega)]$ 이다.

II. 문제의 제기

N 개의 부계통을 가진 다음의 대규모 계통을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & A_i x_i(t) + h_i(x_i, t) + B_i u_i(t) \\ & + \sum_{j=1}^N [A_{ij} x_j(t) + h_{ij}(x_j, \hat{t}_{ij})], \end{aligned} \quad (1)$$

$i=1, 2, \dots, N$

여기서, $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 는 각각 i 번째 부계통의 상태변수와 제어입력이고, A_i , $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ 는 상수 행렬이다. \hat{t}_{ij} 는 i 번째 부계통과 j 번째 부계통 간에 발생하는 시간 지연(time delay)을 나타내며, $h_i(x_i, t)$, $h_{ij}(x_j, \hat{t}_{ij})$ 는 비정합(mismatched) 항과 정합(matched) 항으로 구성된 불확정성들(uncertainties)이다. 특히, $h_{ij}(x_j, \hat{t}_{ij})$ 는 시간 지연을 갖는 불확정성이며, 다음과 같이 구성된다.

$$h_i(x_i, t) = \begin{bmatrix} f_i(x_i, t) \\ g_i(x_i, t) \end{bmatrix}, \quad h_{ij}(x_j, \hat{t}_{ij}) = \begin{bmatrix} f_{ij}(x_j, \hat{t}_{ij}) \\ g_{ij}(x_j, \hat{t}_{ij}) \end{bmatrix}$$

여기서, $f_i(x_i, t)$ ($f_{ij}(x_j, \hat{t}_{ij})$), $g_i(x_i, t)$ ($g_{ij}(x_j, \hat{t}_{ij})$)는 각각 입력에 비정합되거나, 정합된 불확정성들을 나타낸다. 또한, 일반성을 잃지는 않고[11], 수식을 간단히 하기 위하여 $B_i = [0, B_{2i}^T]^T$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$, $B_{2i} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_i) \times m_i}$ 이라 하자.

i 번째 부계통의 슬라이딩 표면(sliding surface)은 다

음과 같이 정의한다.

$$\sigma_i(t) = S_i x_i(t) = 0, \quad S_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i} \quad (2)$$

여기서 숙고될 문제는 (1)의 제어 계통에 대하여 궤적 $x_i(t)$ 가 원점에 슬라이딩하는 슬라이딩 표면 $\sigma_i(t)$ 와 그 표면 (2)에 도달하고 유지하도록 하기 위한 분산(decentralized) 제어를 찾는 것이다. 먼저, 상태변수 $x_i(t)$ 를

$$x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t)]^T, \quad x_{i1}(t) \in \mathbb{R}^{n_i - m_i}, \quad x_{i2}(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$$

으로 분해하면, 부계통 (1)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1}(t) &= A_{i11}x_{i1}(t) + A_{i12}x_{i2}(t) + f_i(x_i, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \{A_{ij1}x_j(t) + f_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\} \\ \dot{x}_{i2}(t) &= A_{i21}x_{i1}(t) + A_{i22}x_{i2}(t) + g_i(x_i, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \{A_{ij2}x_j(t) + g_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\} + B_{i2}u_i(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix}, \quad A_{i11} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_i) \times (n_i - m_i)}, \quad A_{i22} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij1} \\ A_{ij2} \end{bmatrix}, \quad A_{ij1} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_i) \times n_j}, \quad A_{ij2} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$$

또한, 슬라이딩 표면 (2)는 다음과 같다.

$$\sigma_i = S_{i1}x_{i1} + S_{i2}x_{i2} = 0 \quad (4)$$

여기서, $S_{i1} \in \mathbb{R}^{m_i \times (n_i - m_i)}$, $S_{i2} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ 이다.

다음으로, 분산 슬라이딩 모드 제어 계통의 설계를 위하여 다음의 변환 행렬 T_i 를 도입한다.

$$T_i \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \sigma_i \end{bmatrix}$$

여기서, T_i 와 그것의 역행렬은 다음과 같다.

$$T_i = \begin{bmatrix} I_{n_i - m_i} & 0 \\ S_{i1} & S_{i2} \end{bmatrix}, \quad T_i^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_i - m_i} & 0 \\ -S_{i2}^{-1}S_{i1} & S_{i2}^{-1} \end{bmatrix}$$

변환 행렬 T_i 에 의하여 (3)은 다음과 같이 재배열 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1}(t) &= \Lambda_{i11}x_{i1}(t) + \Lambda_{i12}\sigma_i(t) + f_i(x_i, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \{A_{ij1}x_j(t) + f_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i(t) &= \Lambda_{i21}x_{i1}(t) + \Lambda_{i22}\sigma_i(t) + S_i h_i(x_i, t) \\ &\quad + S_i \sum_{j=1}^N \{A_{ij2}x_j(t) + h_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\} + S_i B_{i2}u_i(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Lambda_{i11} &= A_{i11} - A_{i12}S_{i2}^{-1}S_{i1} \\ \Lambda_{i12} &= A_{i12}S_{i2}^{-1} \\ \Lambda_{i21} &= S_{i1}A_{i11} + S_{i2}A_{i21} - S_{i1}A_{i12}S_{i2}^{-1}S_{i1} \\ &\quad - S_{i2}A_{i22}S_{i2}^{-1}S_{i1} \\ \Lambda_{i22} &= S_{i1}A_{i12}S_{i2}^{-1} + S_{i2}A_{i22}S_{i2}^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

추가로, 다음을 가정한다.

가정 1 : N 개의 부계통 (3)에 대하여

(A1) (A_i, B_i) 는 가제어(controllable)하다.

(A2) $\Delta A_i(t)$ 와 $\Delta A_{ij}(t)$ 를 임의의 t 에 대하여 다음과 같

이 제한(bound)한다.

$$\begin{aligned} \|f_i(x_i, t)\| &\leq \eta_i \|x_i(t)\|, \\ \|f_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\| &\leq \eta_{ij} \|x_j(\dot{x}_{ij})\| \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \|h_i(x_i, t)\| &\leq \xi_i \|x_i(t)\|, \\ \|h_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\| &\leq \xi_{ij} \|x_j(\dot{x}_{ij})\| \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, $\eta_i, \eta_{ij}, \xi_i, \xi_{ij}$ 는 영 또는 양의 상수이다.

부연 1 : (A_i, B_i) 이 가제어(controllable)하면 (A_{i11}, A_{i12}) 도 가제어하다[11].

다음의 보조 정리들이 주요 결과의 증명에 사용된다.

보조정리 1[12] : 임의의 두행렬 X, Y 에 대하여 다음이 성립한다.

$$X^T Y + Y^T X \leq \epsilon X^T X + \frac{1}{\epsilon} Y^T Y$$

여기서, ϵ 은 임의의 양의 상수이다.

보조정리 2[12] : 임의의 대칭행렬 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 벡터 $x \in \mathbb{R}^n$ 와 스칼라 a 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lambda_{\min}(X) \|x\|^2 \geq x^T X x \leq \lambda_{\max}(X) \|x\|^2$$

보조정리 3[13] : 다음의 경우들은 등가이다.

(1) A 가 안정하고 $\|C(sI - A)^{-1}B\|_{\infty} < 1$ 이다.

(2) $A^T \tilde{P} + \tilde{P}A + \tilde{P}BB^T \tilde{P} + C^T C < 0$ 을 만족하는 행렬 $\tilde{P} \geq 0$ 가 존재한다.

(3) Riccati 방정식 $A^T P + PA + PBB^T P + C^T C = 0$ 은 안정화해 $P \geq 0$ 을 갖는다.

여기서, $\tilde{P} > P, \tilde{P}, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 이고, $\text{rank}[C^T C] = n$ 이다.

계통 (5), (6)은 부 계통 (3)이 슬라이딩 표면 (4)을 가질 때 계통의 동특성을 나타낸다. 이러한 계통에 제어를 설계하기 위해서는 본 논문은 두가지 진행과정을 거친다. 먼저, 계통이 슬라이딩 모드 상에 존재할 때, 즉, $\sigma_i(t) = 0, \dot{\sigma}_i(t) = 0$ 일 때의 동특성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1}(t) &= \Lambda_{i11}x_{i1}(t) + f_i(x_i, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \{A_{ij1}x_j(t) + f_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, 행렬 Λ_{i11} 는 슬라이딩 표면 S_i 의 함수이므로 S_i 의 적절한 설계에 의하여 안정성을 보장하도록 한다. 다음으로, 계통이 슬라이딩 모드 근방에서의 동특성은 (6)으로 나타내므로, 제어기 u_i 의 적절한 설계에 의하여 계통의 행동이 슬라이딩 모드의 흡입영역 안에 놓여진다. 위에서 설명한 두가지를 만족한다면 계통의 동특성은 임의의 초기값에서 슬라이딩 표면에 도달한 후 평형점에 수렴한다.

III. 강인한 슬라이딩 표면

슬라이딩 모드 제어는 정합조건을 만족시키는 제어 대상의 불확정성에 대해서는 강인한 행동을 갖는다. 그러나, 실제 계통에서는 정합조건이 성립하지 않는 불확정성이 존재하는 경우가 빈번하다. 이러한 경우에, 슬라이딩 모드 상에 있는 계통의 동특성이 불확정성 및 외란에 의존하므로, 계통은 안정도를 보장할 수가 없다. 그러

므로, 슬라이딩 표면은 계통의 행동이 불확정성에 강인한 특성을 갖도록 설계되어야 한다. 즉, (10)의 우측 수식에서와 같이 정합되지 않은 항목에 대하여, 적절한 슬라이딩 표면의 설계에 의하여 강인 안정성을 보장해야 한다.

부계통 (1)이 슬라이딩 표면 상에 존재할 때 등가계통은 (10)이고, 이 식에서 $K_i = S_z^{-1}S_n$ 이라면, 슬라이딩 표면을 구하기 위하여, $A_{n1} = (A_{n1} - A_{n2}K_i)$ 이 안정한 계통 행렬이기 위하여 적절한 K_i 값을 선정해야 한다. 또한, 가정 (A1)에서 (A_i, B_i) 이 안정가능하다는 것은 (A_{n1}, A_{n2}) 이 안정가능하다는 것[11]이므로 A_{n1} 은 임의의 극배치를 할 수 있다. 그리고, (4)에서

$$x_i(t) = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ -C_z^{-1}C_n x_{n1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1-m_i} \\ -K_i \end{bmatrix} x_{n1}(t) \quad (11)$$

이므로 다음을 만족한다.

$$\|x_i(\cdot)\|^2 = x_i^T(\cdot)x_i(\cdot) = x_{n1}^T(\cdot)(I_{n_1-m_i} + K_i^T K_i)x_{n1}(\cdot) \quad (12)$$

다음의 정리는 (4)의 슬라이딩 모드 상에서의 계통 (11)에 대한 강인 안정성 조건이다.

정리 1 : 불확정성과 시간지연요소를 갖는 대규모 계통 (10)에서 A_{n1} 가 Hurwitz 행렬이라 하자. 만약 다음을 만족하는 K_i 가 존재하면

$$\| (I_{n_1-m_i} + K_i^T K_i)^{\frac{1}{2}} (S I_{n_1-m_i} - A_{n1})^{-1} \|_{\infty} < \frac{1}{\sqrt{\rho_n(2N+1)}}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (13)$$

계통 (10)은 점근적으로 안정하다. 여기서,

$$\rho_n = \eta_i^2 + \sum_{j=1}^N \{ \eta_{jn}^2 + \lambda_M(A_{jn}^T A_{jn}) \}$$

증명 : 조건식 (13)과 보조정리 3으로부터 다음을 만족하는 양의 대칭행렬 P_n 가 항상 존재한다.

$$A_{n1}^T P_n + P_n A_{n1} + (2N+1)P_n P_n + \rho_n (I_{n_1-m_i} + K_i^T K_i) < 0, \quad i=1, \dots, N \quad (14)$$

그리고, 계통 (10)의 Lyapunov 후보 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \sum_{i=1}^N [x_{n1}^T(t) P_n x_{n1}(t) + \sum_{j=1}^N \eta_{ij}^2 \int_{t_0}^t x_j^T(\tau) x_j(\tau) d\tau] \\ &= \sum_{i=1}^N [x_{n1}^T(t) P_n x_{n1}(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \eta_{ij}^2 \int_{t_0}^t x_{jn}^T(\tau) (I_{n_1-m_i} + K_j^T K_j) x_{jn}(\tau) d\tau] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 양의 대칭 행렬 P_n 는 (14)의 해이다. 계통 (10)의 궤적에 따른 시간 미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \sum_{i=1}^N [x_{n1}^T(t) (A_{n1}^T P_n + P_n A_{n1}) x_{n1}(t) \\ &\quad + f_i(x_i, t)^T P_n x_{n1}(t) + x_{n1}^T(t) P_n f_i(x_i, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \{ A_{jn} x_j(t) + f_{ij}(x_j, t_{ij}) \}^T P_n x_{n1}(t) \\ &\quad + x_{n1}^T(t) P_n \sum_{j=1}^N \{ A_{jn} x_j(t) + f_{ij}(x_j, t_{ij}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{j=1}^N \eta_{ij}^2 \{ x_{jn}^T(t) (I_{n_1-m_i} + K_j^T K_j) x_{jn}(t) \\ &\quad - x_{jn}^T(t_{ij}) (I_{n_1-m_i} + K_j^T K_j) x_{jn}(t_{ij}) \} \end{aligned} \quad (16)$$

(12)와 불확정성 (8)과 보조정리 1을 이용하면 (16)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq \sum_{i=1}^N [x_{n1}^T(t) \{ A_{n1}^T P_n + P_n A_{n1} + (2N+1)P_n P_n \} x_{n1}(t) \\ &\quad + \eta_i^2 x_{n1}^T(t) (I_{n_1-m_i} + K_i^T K_i) x_{n1}(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \{ \lambda_M(A_{jn}^T A_{jn}) x_{jn}^T(t) (I_{n_1-m_i} + K_j^T K_j) x_{jn}(t) \\ &\quad + \eta_{ij}^2 x_{jn}^T(t_{ij}) (I_{n_1-m_i} + K_j^T K_j) x_{jn}(t_{ij}) \} \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \eta_{ij}^2 \{ x_{jn}^T(t) (I_{n_1-m_i} + K_j^T K_j) x_{jn}(t) \\ &\quad - x_{jn}^T(t_{ij}) (I_{n_1-m_i} + K_j^T K_j) x_{jn}(t_{ij}) \} \\ &= \sum_{i=1}^N x_{n1}^T(t) [A_{n1}^T P_n + P_n A_{n1} \\ &\quad + (2N+1)P_n P_n + \eta_i^2 (I_{n_1-m_i} + K_i^T K_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \{ \eta_{ij}^2 + \lambda_M(A_{jn}^T A_{jn}) \} (I_{n_1-m_i} + K_j^T K_j)] x_{n1}(t) \end{aligned}$$

정리하면,

$$\dot{V}_1(t) \leq \sum_{i=1}^N x_{n1}^T(t) [A_{n1}^T P_n + P_n A_{n1} + (2N+1)P_n P_n + \rho_n (I_{n_1-m_i} + K_i^T K_i)] x_{n1}(t) \quad (17)$$

(14)를 만족하면 $\dot{V}_1 < 0, \forall x \neq 0$ 이므로, Lyapunov 안정성 이론에 의하여 조건식 (13)을 만족하면 시간지연 대규모 계통 (10)은 점근적으로 안정하다. ■

슬라이딩 모드 상에 계통이 존재하는 경우에, 슬라이딩 모드의 안정도는 상기 기술한 것과 같이 국부 제어기 형태의 슬라이딩 표면 계수 K_i 값의 적절한 선정에 의존한다.

IV. 분산 슬라이딩 모드 제어

슬라이딩 모드 상에서 계통의 동특성이 안정화를 보장한다면, 다음 단계는 계통의 상태궤적을 슬라이딩 모드 상으로 가져간 후, 그 면 위에 유지시키는 분산제어기를 선택하는 것이다. 즉, 슬라이딩 모드의 존재조건을 만족하는 제어기를 설계하는 것이다. 분산 제어기 u_i 는 다음과 같이 선형 제어부 u_i^L 와 비선형 제어부 u_i^{NL} 로 구성한다.

$$\begin{aligned} u_i(t) &= u_i^L(t) + u_i^{NL}(t) \\ &= -(S_i B_i)^{-1} L x_i(t) - \gamma_i(t) (S_i B_i)^{-1} \frac{S_i x_i(t)}{\|S_i x_i(t)\|} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, $\gamma_i(t) = \tilde{\gamma}_i \|x_i(t)\|$, $\tilde{\gamma}_i$ 는 임의의 양의 상수이고, 선형 제어부의 L_i 는

$$L_i = [A_{z1} \quad A_{z2} - \Phi_i] T_i \quad (19)$$

이고, Φ_i 는 좌반평면에 고유값을 갖는 $m_i \times m_i$ 대칭 행렬이다. 그러면, 다음 식을 만족하는 양확정 대칭 행렬 P_2 가 존재함을 알 수 있다.

$$\Phi_i^T P_2 + P_2 \Phi_i = -Q_2 \quad (20)$$

(20)에서 간단히 하기 위하여, $\Phi_i = \phi_i I_{m_i}$, $Q_{2i} = 2\phi_i \pi_i I_{m_i}$ 으로 선택하면, $P_{2i} = \pi_i I_{m_i}$ 임을 알 수 있다.

다음의 정리들은 분산 슬라이딩 모드 제어시스템의 안정조건이다.

정리 2 : 가정 1의 (A2)을 만족하다는 가정 아래, 제어기 (18)이 다음의 조건을 만족하는 양의 상수 $\tilde{\gamma}_i$ 가 존재하면, 제어 시스템 (6)은 점근적으로 안정하다.

$$\tilde{\gamma}_i > \frac{\lambda_M^{1/2}(S_i^T S_i)}{2\lambda_m(P_{2i})} [-\lambda_m(Q_i) + (2N+1)\lambda_M(P_{2i}^2) + \xi_i^2 + \rho_{2i}] \quad (21)$$

또한, 간단하게 (21)은 다음과 같다.

$$\tilde{\gamma}_i > \frac{\lambda_M^{1/2}(S_i^T S_i)}{2\pi_i} \{-2\phi_i \pi_i + (2N+1)\pi_i^2 + \xi_i^2 + \rho_{2i}\} \quad (22)$$

여기서 ϕ_i , π_i 는 임의의 양의 상수이고,

$$\rho_{2i} = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_M(A_{ij}^T S_j^T S_j A_{ij}) + \xi_{ij}^2 \lambda_M(S_j^T S_j)}{\lambda_M(S_i^T S_i)}$$

증명 : 슬라이딩 표면 근방에서 시스템의 동특성은 (6)에 의해 결정되고, (18)의 제어를 가했을 때 다음과 같은 동특성을 갖는다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i(t) &= \Phi_i \sigma_i(t) + S_i h_i(x_i, t) \\ &+ S_i \sum_{j=1}^N \{A_{ij} x_j(t) + h_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\} - \gamma_i \frac{\sigma_i}{\|\sigma_i\|} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, 시스템이 슬라이딩 표면, 즉 $\sigma_i = 0$ 에 수렴함을 보기 위하여, 다음의 Lyapunov 후보 함수 V_2 를 고려하자.

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \sum_{i=1}^N [\sigma_i^T(t) P_{2i} \sigma_i(t) \\ &+ \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^2 \frac{\lambda_M(S_j^T S_j)}{\lambda_M(S_i^T S_i)} \int_{t_{ij}}^t \sigma_j^T(\tau) \sigma_j(\tau) d\tau] \end{aligned} \quad (24)$$

그것의 도함수는

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \sum_{i=1}^N \left[\sigma_i^T(t) (\Phi_i^T P_{2i} + P_{2i} \Phi_i) \sigma_i(t) \right. \\ &+ h_i^T(x_i, t) S_i^T P_{2i} \sigma_i(t) + \sigma_i^T(t) P_{2i} S_i h_i(x_i, t) \\ &+ \sum_{j=1}^N \{x_j(t)^T A_{ij}^T + h_{ij}^T(x_j, \dot{x}_{ij})\} S_j^T P_{2i} \sigma_i(t) \\ &+ \sigma_i^T(t) P_{2i} S_i \sum_{j=1}^N \{A_{ij} x_j(t) + h_{ij}(x_j, \dot{x}_{ij})\} \\ &+ \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^2 \frac{\lambda_M(S_j^T S_j)}{\lambda_M(S_i^T S_i)} \{ \sigma_j^T(t) \sigma_j(t) - \sigma_j^T(\dot{t}_{ij}) \sigma_j(\dot{t}_{ij}) \} \\ &\left. - 2\gamma_i(t) \frac{\sigma_i^T(t) P_{2i} \sigma_i(t)}{\|\sigma_i(t)\|} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

보조정리 1과 가정 1의 (A2)을 이용해 다시 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left[\sigma_i^T(t) (\Phi_i^T P_{2i} + P_{2i} \Phi_i + (2N+1)P_{2i}) \sigma_i(t) \right. \\ &+ \xi_i^2 \lambda_M(S_i^T S_i) \|x_i(t)\|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^N \lambda_M(A_{ij}^T S_j^T S_j A_{ij}) \|x_j(t)\|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^2 \lambda_M(S_j^T S_j) \|x_j(\dot{t}_{ij})\|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^2 \frac{\lambda_M(S_j^T S_j)}{\lambda_M(S_i^T S_i)} \{ \sigma_j^T(t) \sigma_j(t) - \sigma_j^T(\dot{t}_{ij}) \sigma_j(\dot{t}_{ij}) \} \\ &\left. - 2\gamma_i(t) \frac{\sigma_i^T(t) P_{2i} \sigma_i(t)}{\|\sigma_i(t)\|} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

(4)로부터, $\sigma_j^T(\cdot) \sigma_j(\cdot) = x_j^T(\cdot) S_j^T S_j x_j(\cdot)$ 이므로 보조정리 2에 의하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\sigma_j^T(\cdot) \sigma_j(\cdot) \leq \lambda_M(S_j^T S_j) \|x_j(\cdot)\|^2 \quad (27)$$

그러므로 (26)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left[\lambda_M(S_i^T S_i) \{ (2N+1)\lambda_M(P_{2i}^2) - \lambda_m(Q_i) \} \|x_i(t)\|^2 \right. \\ &+ \xi_i^2 \lambda_M(S_i^T S_i) \|x_i(t)\|^2 + \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^2 \lambda_M(S_j^T S_j) \|x_j(\dot{t}_{ij})\|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^N \lambda_M(A_{ij}^T S_j^T S_j A_{ij}) \|x_j(t)\|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^2 \lambda_M(S_j^T S_j) \{ \|x_j^T(t)\|^2 - \|x_j^T(\dot{t}_{ij})\|^2 \} \\ &\left. - 2\tilde{\gamma}_i(t) \lambda_M^{1/2}(S_i^T S_i) \lambda_M(P_{2i}) \|x_i(t)\|^2 \right] \end{aligned} \quad (28)$$

정리하면,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &\leq \sum_{i=1}^N \lambda_M(S_i^T S_i) \left[-\lambda_m(Q_i) + (2N+1)\lambda_M(P_{2i}^2) + \xi_i^2 \right. \\ &+ \lambda_M^{-1}(S_i^T S_i) \sum_{j=1}^N \{ \lambda_M(A_{ij}^T S_j^T S_j A_{ij}) + \xi_{ij}^2 \lambda_M(S_j^T S_j) \} \\ &\left. - 2\tilde{\gamma}_i(t) \lambda_M^{1/2}(S_i^T S_i) \lambda_M(P_{2i}) \right] \|x_i(t)\|^2 \end{aligned} \quad (29)$$

이고, 시스템 (23)이 점근적으로 안정하려면, (28)에서 다음의 부등식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} &-\lambda_m(Q_i) + (2N+1)\lambda_M(P_{2i}^2) + \xi_i^2 \\ &+ \lambda_M^{-1}(S_i^T S_i) \sum_{j=1}^N \{ \lambda_M(A_{ij}^T S_j^T S_j A_{ij}) + \xi_{ij}^2 \lambda_M(S_j^T S_j) \} \\ &- 2\tilde{\gamma}_i(t) \lambda_M^{1/2}(S_i^T S_i) \lambda_M(P_{2i}) < 0 \end{aligned} \quad (30)$$

위 (30)은 부등식 (21)과 같다. ■

부연 1 : (23)에서 $\tilde{\gamma}_i$ 의 증가에 따라 보다 강한 특성을 갖는다. 또한, Φ_i 의 적절한 선정에 의하여 강인성을 크게 할 수 있다. 그러나 $\tilde{\gamma}_i$ 의 증가는 상대적으로 큰 채터링을 동반하고, Φ_i 은 궤환 이득 값에 직결되므로 섭동 및 외란에 따라 두 값의 적절한 선정이 요구된다.

V. 예제

위에서 제안된 이론의 검증을 위하여, 다음의 대규모 시스템을 고려하였고 수치결과는 Matlab을 이용하여 구하였다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 4.5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \Delta A_1(t) \right) x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} x_2(t) \\ &+ \Delta A_{11}(t) x_1(\dot{t}_{11}) + \Delta A_{12}(t) x_2(\dot{t}_{12}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix} u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(\begin{bmatrix} -8 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \Delta A_2(t) \right) x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} x_1(t) \\ &+ \Delta A_{21}(t) x_1(\dot{t}_{21}) + \Delta A_{22}(t) x_2(\dot{t}_{22}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_2(t) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Delta A_1(t) &= \begin{bmatrix} \cos(10\pi t) & 0 \\ 0 & \cos(10\pi t) \end{bmatrix} \\ \Delta A_{11}(t) &= 0.4 \begin{bmatrix} 0 & \cos(10\pi t) \\ \cos(10\pi t) & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta A_{12}(t) &= 0.5 \begin{bmatrix} 0 & \cos(10\pi t) & 0 \\ \cos(10\pi t) & 0 & \cos(10\pi t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta A_2(t) = \begin{bmatrix} \sin(10\pi t) & \sin(10\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(10\pi t) \\ 0 & \sin(10\pi t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_{21}(t) = 0.4 \begin{bmatrix} 0 & \sin(10\pi t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_{22}(t) = 0.6 \begin{bmatrix} 0 & \sin(10\pi t) & 0 \\ \sin(10\pi t) & 0 & \sin(10\pi t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{t}_{11} = t - 0.4, \quad \dot{t}_{12} = t - 0.6, \quad \dot{t}_{21} = t - 0.3, \quad \dot{t}_{22} = t - 0.5$$

이고, 각각의 부계통의 상태 벡터는

$$x_1(t) = [x_{11}(t) \ x_{12}(t)]^T, \quad x_2(t) = [x_{21}(t) \ x_{22}(t) \ x_{23}(t)]^T$$

2개의 부계통이 슬라이딩 표면 $Cx_i=0$ 상에 존재할 때 동특성은 각각 다음과 같다.

$$\dot{x}_{11}(t) = (1 - 4.5K_1)x_{11}(t) + [\cos(2\pi t) \ 0]x_1(t) + [1 \ 0 \ 0.5]x_2(t) + 0.4[0 \ \cos(2\pi t)]x_1(\dot{t}_{11}) + 0.5[0 \ \cos(2\pi t) \ 0]x_2(\dot{t}_{12})$$

$$\dot{x}_{21}(t) = \left(\begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} K_2 \right) x_{21}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} \sin(2\pi t) & \sin(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(2\pi t) \end{bmatrix} x_2(t) + 0.4 \begin{bmatrix} 0 & \sin(2\pi t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1(\dot{t}_{21}) + 0.6 \begin{bmatrix} 0 & \sin(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(2\pi t) \end{bmatrix} x_2(\dot{t}_{22})$$

다음과 같은 극점을 갖도록 선택하면,

$$\lambda(A_1 + B_1K_1) = \{-8\}$$

$$\lambda(A_2 + B_2K_2) = \{-8, -7\}$$

K_1, K_2 는 다음과 같고, 슬라이딩 표면의 계수들은 다음과 같이 선택한다.

$$K_1 = 2 \quad S_1 = [2 \ 1]$$

$$K_2 = [1 \ 1.67] \quad S_2 = [1 \ 1.67 \ 1]$$

위에서 주어진 슬라이딩 표면상에서 계통의 안정성을 검증하기 위하여 정리 1의 조건식 (13)을 구하면,

$$\frac{\sqrt{\rho_{11}(2N+1)}}{\sqrt{\rho_{21}(2N+1)}} \left\| (1 + K_1^T K_1)^{1/2} (s + \Lambda_{11})^{-1} \right\|_{\infty} = 0.95 < 1$$

$$\left\| (I_2 + K_2^T K_2)^{1/2} (s + \Lambda_{21})^{-1} \right\|_{\infty} = 0.99 < 1$$

이므로 각각의 부계통은 슬라이딩 모드 상에서 안정도를 보장한다.

다음으로, 주어진 계통이 임의의 초기값으로부터 슬라이딩 표면으로 수렴하도록 하기 위한 제어 입력을 구한다. 먼저, ϕ_i, π_i 값을 다음과 같이 선택하면,

$$\phi_1 = 5 \quad \phi_2 = 3$$

$$\pi_1 = 1.87 \quad \pi_2 = 1.27$$

(19)에 의하여 각각의 선형 제어부의 이득은 다음과 같다.

$$L_1 = [A_{121} \ A_{122} - \phi_1] \quad T_1 = [-5 \ 1]$$

$$L_2 = [A_{221} \ A_{222} - \phi_2] \quad T_2 = [2 \ 2.7 \ -1]$$

비선형 제어부의 이득 $\tilde{\gamma}_i$ 은 (22)에 의하여 다음의 부등식을 만족해야 하므로,

$$\gamma_1 < 9.76 \quad \gamma_2 < 7.36$$

각각의 값은 $\gamma_1 = 10$ 과 $\gamma_2 = 8$ 을 갖도록 한다.

그림 1-2는 초기값 $x_1(0) = [1 \ 0]$, $x_2(0) = [1 \ 0 \ 0]$ 에

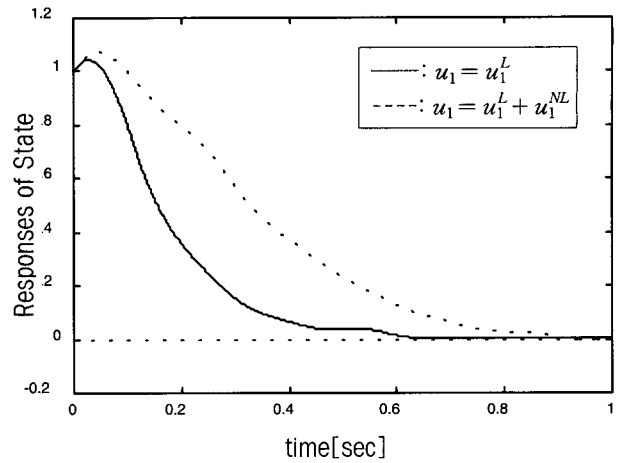


그림 1. 상태 $x_{11}(t)$ 의 응답곡선.

Fig. 1. Response curves of the state $x_{11}(t)$.

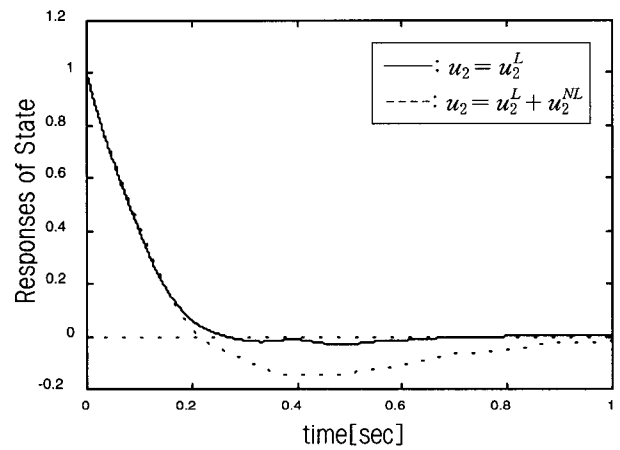


그림 2. 상태 $x_{21}(t)$ 의 응답곡선.

Fig. 2. Response curves of the state $x_{21}(t)$.

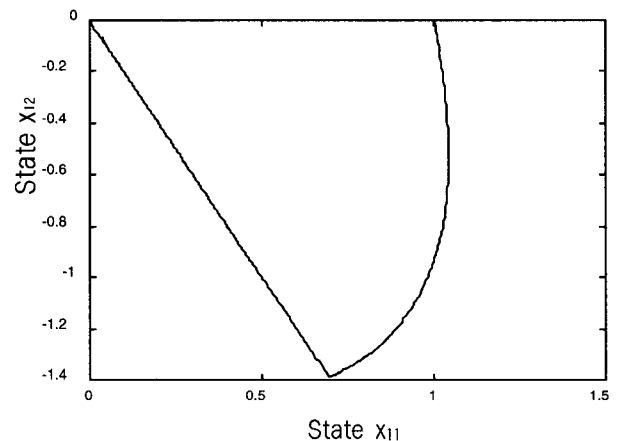


그림 3. $x_1(t)$ 의 부계통에 대한 슬라이딩 모드.

Fig. 3. Sliding mode with the subsystem of $x_1(t)$.

대한 상태 $x_{11}(t)$ 과 $x_{21}(t)$ 의 응답곡선이다. 여기서, 실선은 선형 제어부와 비선형 제어부를 가진 제어 계통의 응답이고, 사선은 단지 선형 제어부만을 가진 제어 계통의 응답이다.

그림 3은 첫 번째 부계통의 상태 벡터 $x_1(t)$ 에 대해

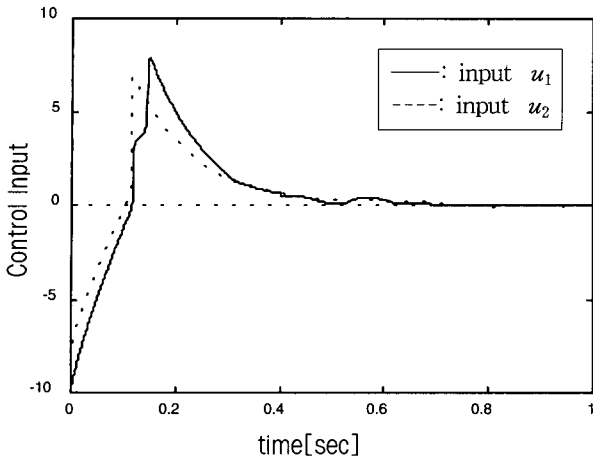


그림 4. 분산 제어 입력 $u_1(t)$ 와 $u_2(t)$.
Fig. 4. Decentralized control input $u_1(t)$ and $u_2(t)$.

위상 평면상의 슬라이딩 모드를 보여준다. 그림 4는 각각의 부계통에 제안된 방법의 설계되어 인가된 제어 입력을 보여준다.

VI. 결론

본 논문은 시간지연을 갖는 대규모 불확정성 계통을 위한 분산 슬라이딩 모드 제어기의 설계 문제를 다루었다. 계통이 슬라이딩 모드 상에서 원점에 수렴성을 갖기 위하여 슬라이딩 표면에 대한 조건인 정리 1을 제시하였고, 이에 대하여 제어기는 각각의 부계통들의 상태만 가지고 전체 계통의 안정도를 보장하였다. 여기서, 제어기는 계통의 동특성이 슬라이딩 모드 근방에서 흡입영역 안에 놓여지도록 하는 조건인 정리 2을 제시하였다.

결과는 예제를 통하여 검증하였다. 주어진 시간지연 대규모 계통에 대하여 강인 안정한 제어기를 설계하였고, 그것에 대한 응답특성은 가시적으로 보여주었다.

추후 과제로서, 보다 일반적인 불확정성, 외란, 또는 시간지연을 갖는 대규모 계통의 강인한 슬라이딩 모드 제어기의 설계와 실제적인 계통에 응용을 하고자 한다.

참고문헌

[1] S. S. Wang, B. S. Chen and T. P. Lin, "Robust stability of uncertain time-delay systems," *Int. J. Control*, vol. 46, no. 3, pp. 963-976, 1987.

[2] H. Trinh and M. Aldeen, "Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, pp. 914-916, 1995.
 [3] J. T. Tsay, P. L. Liu, T. J. Su, "Robust stability for perturbed large-scale time-delay systems," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 143, no. 3, pp. 233-236, 1996.
 [4] B. Xu, "On delay-independent stability of large-scale systems with time delay," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, pp. 930-933, 1995.
 [5] R. A. DeCarlo, S. H. Zak and G. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multi-variable systems: a tutorial," *Proc. IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212-232, 1988.
 [6] G. P. Mathews, R. A. DeCarlo, "Decentralized tracking for a class of interconnected nonlinear systems using variable structure control," *Automatica*, vol. 24, no. 187-193, 1988.
 [7] H. Khurana, S. I. Ahson, S. S. Lamba, "On stabilization of large-scale control systems using variable structure systems theory," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 31, no. 176-178, 1986.
 [8] J. L. Lee, W. J. Wang, "Robust decentralized stabilization via sliding mode control," *CTAT*, vol. 9, no. 721-731, 1993.
 [9] K. Yasuda, "Decentralized sliding mode control design for interconnected systems," *IFAC 13th Triennial World Congress*, USA, 1996.
 [10] J. J. Yan, J. S. Tsai, F. C. Kung, "Robust decentralized stabilization of large-scale delay systems via sliding mode control," *ASME Trans. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 119, pp. 307-312, 1997.
 [11] C. M. Doring and A. S. I. Zinober, "Two approaches to hyperplane design in multivariable variable structure control systems," *Int. J. Control*, vol. 48, no. 1, pp. 65-82, 1986.
 [12] P. L., M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices with Application*, Academic Press, 1985.
 [13] I. R. Petersen, "Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems," *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 142, no. 2, pp. 95-102, 1995.



유 정 응

1965년 한양대 전기공학과 졸업, 1987년 단국대 전자공학(공학박사), 1979년-현재 충북대학교 공과대학 전기공학과 교수, 관심분야는 가변구조제어 및 응용, QFT.



박 장 환

1991년 충북대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1993), 동대학 박사과정. 관심분야는 강인제어, 가변구조제어 및 응용, 자기부상계통의 모델링 및 제어.