

# 동적 와인드업 방지법에 기초한 상태 제한이 존재하는 시스템의 제어 방법

## Control Method for State Constrained Control Systems: Dynamic Anti-Windup Based Approach

박 종 구  
(Jong-Koo Park)

**Abstract** : Based on the dynamic anti-windup strategy, a novel control methodology for state constrained control systems is presented. First, a linear controller is designed for an open-loop stable plant to show a desirable nominal performance by ignoring state constraints. And then, an additional dynamic compensator is introduced to preserve the nominal performance as closely as possible in the face of state constraints. This paper focuses on the second step under the assumption that a linear controller has already been designed appropriately by using an effective controller design method. By minimizing a reasonable performance index, the dynamic compensator is derived explicitly, which is expressed in the plant and controller parameters. The proposed method not only guarantees the total stability of the overall resulting systems, but also provides desirable output performance, because it solves the state-positioning problem completely.

**Keywords** : state constrained system, anti-windup, dynamic compensation

### I. 서론

시스템 내부에 제한요소가 존재하는 시스템을 상태 공간에서 기술하는 경우, 다면체형 또는 타원체형의 상태 제한이 있는 상태방정식으로 시스템을 기술할 수 있다. 이때 대부분의 연구자들은 시스템에 상태 제한이 있을 때 이를 제어기 설계 시 고려하여 제한 최적화 (constrained optimization) 문제로 구성한 다음, 이를 최적화 기법을 사용하여 만족시키는 제어기를 구성하여 시스템이 상태 제한에 걸리지 않도록 하는 방법을 사용해 왔다[2][3][14]. 그러나 이러한 방법으로 제어기가 설계된 시스템은 상당히 제한적인 조건을 충족시키도록 구성되기 때문에 안정도는 보장되거나 성능은 만족스럽지 않은 경우가 흔하며, 상태 제한 조건이 달라지거나 제어환경이 변경되는 경우 제어기를 재설계하여야 하는 어려움이 있다.

이와 같은 점에 인식하여 최근 제어입력신호의 포화 현상을 다루는 실제적인 방법인 와인드업 방지법(anti-windup method)을 상태 제한이 존재하는 시스템에 적용하여 그 유효성을 검증한 연구결과가 본 저자에 의해 연구되었다[18]. 즉 플랜트의 상태 제한이 존재하지 않는다는 가정 아래 먼저 선형 제어기를 전체적 안정도와 성능을 고려하여 설계한 후, 상태 제한으로 인한 안정도 훼손을 복구하고 성능 저하를 완화할 수 있는 추가적인 보상기를 설계하는 접근법을 취한 내용이다. 참고문헌 [18]에서 저자는 와인드업 방지법의 표준적인 구조인 관측자 형태의 보상기 구조를 상태 제한 시스템에 적용한 새로운 구조를 고려하였으며, 여기에서의 설계변수인 보상 행렬을 평형상태 개념을 활용하여 유도하였다. 설계 목표는 상태 제한이 존재하지 않을 때의 제어기의 상태를 상태 제한이 존재하

라도 근사적으로 유지하도록 하는 것이었다.

본 논문에서는 동적 와인드업 방지법[16][17]을 상태 제한 시스템에 적용하는 새로운 접근법을 취한다. 기존의 연구결과 [18]에서 제어기의 상태 위치 문제를 근사적으로 해결한데 비하여 본 논문에서는 완전히 해결한다. 또한 기존의 연구 결과는 전체 시스템의 안정도를 보장받기 위해서 어떤 대수적 안정도 조건을 만족해야하나, 본 논문의 방법을 사용하는 경우 항상 전체적 안정도를 보장 받는다. 시뮬레이션 예를 통하여 제시된 설계 방법의 유효성을 살펴본다.

논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 상태 제한이 존재하는 제어 시스템을 기술하고, 이에 대한 새로운 동적 보상구조를 제안한 후, 보상기 설계에 대한 제어 목표를 설정한다. 3절에서는 제어기의 상태변수를 매개로 한 성능 평가함수를 최소화하는 동적 보상기를 유도한다. 4절에서는 제시된 보상 방법을 사용하는 경우 전체 시스템이 안정도를 보장받는다라는 것을 기술하였다. 5절에서는 제시된 보상 방법과 관련된 몇몇 특성에 대해 언급한다. 6절에서는 예제를 통해 제시된 보상 방법의 유용성을 살펴본다. 끝으로 7절에 본 논문의 결론을 실었다.

### II. 상태 제한이 존재하는 시스템에 대한 보상 구조의 문제의 설정

본 논문에서는 상태 공간 표현식을 사용하여 모든 시스템을 다루도록 한다. 그림 1에 일반적인 출력 되먹임 제어

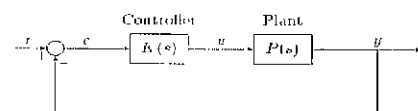


그림 1. 출력 되먹임 제어 시스템

Fig. 1. Output feedback control systems.

시스템을 도시하였다. 여기서 플랜트는 상태 제한이 존재하는 시스템이다. 플랜트  $P(s)$ 와 제어기  $K(s)$ 는 다음과 같은 최소의(minimal) 상태 방정식으로 나타낼 수 있다.

(가) 플랜트  $P(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx_p(t) + Du(t), \quad x_p(t) \in \mathcal{P}_{R^p}. \quad (2)$$

(나) 제어기  $K(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + Ge(t), \quad (3)$$

$$v(t) = Hx_c(t) + Le(t), \quad (4)$$

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad (5)$$

여기서  $r(t) \in R^n$ 는 기준 입력,  $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력,  $y(t) \in R^n$ 는 출력,  $x_p(t) \in R^p$ 는 플랜트의 상태 변수, 그리고  $x_c(t) \in R^q$ 는 제어기의 상태 변수이며, 상수 행렬  $A, B, C, D, F, G, H$ , 그리고  $L$ 은 적절한 차수를 갖는다.  $\mathcal{P}_{R^p}$ 는  $R^p$  공간상의 유한한 부분집합(bounded subspace of  $R^p$  space)으로서 그 기하학적인 모양은 다면체, 타원체 형태, 또는 그 외에 임의의 형태를 취할 수 있으며,  $\mathcal{S}(\cdot): R^p \rightarrow \mathcal{P}_{R^p}$ 는 연속대응(continuous mapping)이다. 만약  $x_p(t) \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이면,  $\mathcal{S}(x_p(t)) = x_p(t)$ 이다. 그러나  $x_p(t) \notin \mathcal{P}_{R^p}$ 이면,  $\mathcal{S}(x_p(t))$ 의 일부 요소는  $\mathcal{P}_{R^p}$  경계값을 가지고 그 나머지 원소는 내부값을 가지거나. 모든 원소들이 경계값을 가질 수 있다.

포화 비선형이 내재된 제어 시스템의 효과적인 보상방법으로서 와인드업 방지(anti-windup) 방법이 있다. 이 방법은 2단계 제어기 설계기법으로서, 첫 단계에서는 포화 요소를 고려하지 않고 제어기를 설계한 후, 추가적인 보상을 도입하여 포화 요소로 인한 부정적인 효과를 감소시키는 과정을 따른다. 와인드업 방지 구조는 원하는 제어 입력인 제어기의 출력과 실제로 플랜트에 인가되는 제어 입력 사이에 포화 현상으로 인하여 차이가 발생할 때, 제어기를 보상하는 구조이다.

본 저자는 [18]에서 정적 와인드업 방지 구조의 표준으로 인식되어 있는 관측자 기법을 응용한 상태 제한 해결법을 제시한 바 있다. 본 논문에서는 [16][17]에 제시된 동적 와인드업 방지법을 상태 제한 시스템에 적용하는 접근법을 시도하고자 한다. 그림 2에 동적 와인드업 방지 보상 개념을 응용한 새로운 보상 구조를 도시하였다. 여기서  $P_m(s)$ 는 상태 제한이 없는 플랜트 모델로서 동특성은 다음과 같다.

(다) 플랜트 모델  $P_m(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + Bu(t), \quad (6)$$

$$y_m(t) = Cx_m(t) + Du(t). \quad (7)$$

(라) 보상된 제어기  $K_c(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_c(t) = Fx_c(t) + Ge(t) - \xi(t), \quad (8)$$

$$u(t) = Hx_c(t) + Le(t), \quad (9)$$

$$e(t) = r(t) - y(t), \quad (10)$$

여기서  $\xi(t) \in R^q$ 는 보상 신호로서 동특성은 다음과 같다.

(리) 동적 보상기  $M(s)$ 의 동특성:

$$\dot{x}_d(t) = \Phi x_d(t) + \Gamma \xi(t), \quad (11)$$

$$\xi(t) = \Sigma x_d(t) + A \zeta(t), \quad (12)$$

$$\zeta(t) = y_m(t) - y(t), \quad (13)$$

여기서 행렬  $\Phi, \Gamma, \Sigma, A$ 는 설계할 때개변수로서, 전체 시스템의 안정도와 보상된 시스템의 성능향상을 위해 적절히 선정되어야 할 설계변수이다. 플랜트가 상태 제한에 걸리지 않고  $P(s)$ 와  $P_m(s)$ 의 초기 상태가 같다면 그림 2는 순수한 선형 시스템으로 동작하게 된다. 제시된 보상 구조의 목적은 플랜트에 상태제한이 존재하더라도 원래의 선형 시스템이 보이는 응답 특성을 가능한 한 근사하게 유지하도록 하는 것이다.

실제 플랜트에 외부교란(disturbance)이 있는 경우 그림 2에서의 출력변수  $y(t)$ 는 추정을 통하거나 수학적 모델링을 통하여 얻을 수 있다고 가정한다. 또한 일반성을 해치지 않고 행렬  $C$ 가 완전 행 랭크(full row rank) 행렬이라고 가정한다.

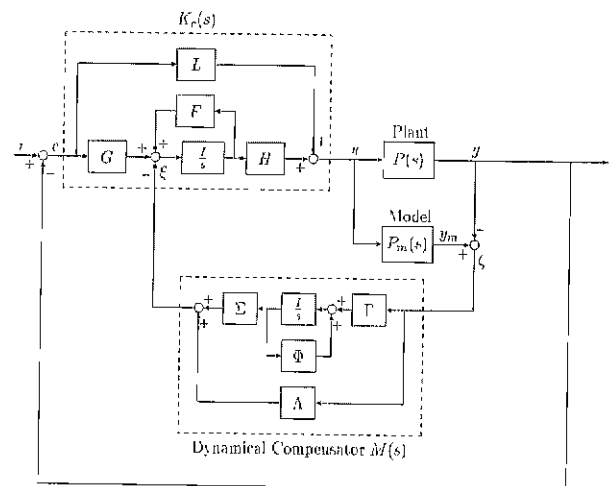


그림 2. 상태 제한이 존재하는 시스템에 대해 제시된 보상구조.

Fig. 2 Proposed compensation structure for state constrained control systems.

### III. 동적 보상기의 유도

플랜트에 상태 제한이 존재하는 경우 플랜트의 출력 특성은 왜곡되고, 이에 따라 제어기는 왜곡된 출력 특성을 바탕으로 부적절한 제어신호를 발생시키게 되어 전체 시스템의 성능은 저하되게 된다. 이는 입력 포화요소가 존재할 때 플랜트에 왜곡된 제어 신호가 전달되어 플랜트의 출력 특성이 왜곡되고, 이 왜곡된 출력 신호를 바탕으로 부적절한 제어신호를 생성해내는 메카니즘과 유사하다. 따라

서 본 논문에서는 입력신호제한이 있는 시스템에서의 제어기 보상 개념을 상태제한이 존재하는 시스템에 적용하도록 한다. 즉 플랜트의 상태가 제한되어 출력이 왜곡 현상을 일으키는 경우 그림 2의 구조에서 제어기의 상태 변수 값들을 상태 제한이 없는 시스템의 그것에 최대한 비슷하게 유지시키도록 한다.

$x_c(t)$ 와  $\tilde{x}_c(t)$ 를 각각 상태 제한이 존재하지 않을 때와 존재할 때의 제어기의 상태 변수라 하자 그러면  $x_c(t)$ 와  $\tilde{x}_c(t)$ 의 차이를 성능평가함수로 삼자. 성능평가함수를  $J$ 라 할 때 동적 보상기와 관계된 문제 설정은 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\min_{M(s)} J = \int_0^{\infty} \|x_c(t) - \tilde{x}_c(t)\|^2 dt, \quad (14)$$

여기서  $\|\cdot\|$ 는 유클리디안 노름(Euclidean norm)이다.

위의 (14)를 최적화 하는 동적 보상기를 구하기 위해서 사전 작업으로서 플랜트, 플랜트 모델, 보상된 제어기, 그리고 동적 보상기의 동특성을 상태 제한의 동작여부에 따라 통합하여 다시 기술한다.

상태제한이 존재하지 않을 때의 폐루우프 시스템의 동특성은, 위의 (1), (2), (8), (9), 그리고  $\mathcal{S}(x_p(t)) = x_p(t)$ 로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A_I x(t) + B_I r(t), \quad (15)$$

여기서  $x(t) := (x_c^T(t), x_p^T(t))^T$ 이고

$$A_I := \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B_I := \begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} G[I-D(I+LD)]^{-1}L \\ B(I+LD)^{-1}L \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$P = F - GD(I+LD)^{-1}H$$

$$Q = -G[I-D(I+LD)]^{-1}LC$$

$$R = B(I+LD)^{-1}H$$

$$S = A - B(I+LD)^{-1}LC$$

이다.

상태 제한이 존재할 때의 폐루우프 시스템의 동특성은, 앞의 (1), (2), (6)-(13)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_m \tilde{x}(t) + B_{m,1} \mathcal{S}(\tilde{x}_p(t)) + B_{m,2} r(t), \quad (18)$$

여기서

$$\tilde{x}(t) := (\tilde{x}_c^T(t), \tilde{x}_m^T(t), \tilde{x}_d^T(t), \tilde{x}_p^T(t))^T$$

이고

$$A_m := \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ B(I+LD)^{-1}H & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$B_{m,1} := \begin{bmatrix} AC - G[I-D(I+LD)]^{-1}LC \\ -B(I+LD)^{-1}LC \\ -GC \\ -B(I+LD)^{-1}LC \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B_{m,2} := \begin{bmatrix} G[I-D(I+LD)]^{-1}L \\ B(I+LD)^{-1}L \\ 0 \\ B(I+LD)^{-1}L \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\Theta := \begin{bmatrix} F - GD(I+LD)^{-1}H - AC - \Sigma & & \\ B(I+LD)^{-1}H & A & 0 \\ & 0 & GC & \emptyset \end{bmatrix} \quad (22)$$

이다. 기호 “ $\sim$ ”는 해당 변수가 플랜트의 상태 제한이 존재할 때의 변수라는 것을 의미한다.

$M(t)$ 를  $\zeta(t)$ 로부터  $\xi(t)$ 로의 임펄스 응답행렬이라 하자. 즉

$$M(t) := L^{-1}\{M(s)\} = L^{-1}\{A + \Sigma(sI - \emptyset)^{-1}\Gamma\} \quad (23)$$

이라 하자. 그러면 (8)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\tilde{x}}_c(t) = Fx_c(t) + Ge(t) - M(t)*C(x_m(t) - \mathcal{S}(x_p(t))), \quad (24)$$

여기서 ‘\*’는 컨벌루션 연산을 의미한다.

따라서 (1), (2), (9), (10), (24)로부터 상태 제한이 존재할 때의 폐루우프 시스템의 표현식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c(t) \\ \dot{\tilde{x}}_m(t) \\ \dot{\tilde{x}}_p(t) \end{bmatrix} = A_{sc}(t) \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_m(t) \\ \tilde{x}_p(t) \end{bmatrix} + B_{sc,1}(t)\mathcal{S}(\tilde{x}_p(t)) + B_{sc,2}r(t), \quad (25)$$

여기서

$$A_{sc}(t) := \begin{bmatrix} \Omega(t) & 0 \\ B(I+LD)^{-1}H & 0 & A \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B_{sc,1}(t) := \begin{bmatrix} M(t)*C - G[I-D(I+LD)]^{-1}LC \\ -B(I+LD)^{-1}LC \\ -B(I+LD)^{-1}LC \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$B_{sc,2} := \begin{bmatrix} G[I-D(I+LD)]^{-1}L \\ B(I+LD)^{-1}L \\ B(I+LD)^{-1}L \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\Omega(t) := \begin{bmatrix} F - GD(I+LD)^{-1}H - M(t)*C \\ B(I+LD)^{-1}H & A \end{bmatrix} \quad (29)$$

이다. 위 식에서  $[M(t)*C - G[I-D(I+LD)]^{-1}LC] \cdot \mathcal{S}(\tilde{x}_p(t))$ 는  $M(t)*[C\mathcal{S}(\tilde{x}_p(t))] - G[I-D(I+LD)]^{-1}LC\mathcal{S}(\tilde{x}_p(t))$ 를 의미하며, \*에 관계된 나머지 식들도 비슷하게 정의된다.

플랜트가 상태 제한에 걸리는 경우 시스템의 출력 응답은 플랜트에 가해지는 제어 입력에 관계없는 양상을 보이게 된다. 즉 되먹임 루우프가 실질적으로 끊어지게 되는 것이다. 이때 플랜트 자체가 개루우프적으로 불안정하다면 시스템은 결코 광역적(global)으로 안정화시킬 수 없다. 따라서 본 논문에서는 개루우프적으로 안정한 플랜트만을 다루기로 한다. 그 외에 동적 보상기  $M(s)$ 를 설계하는 데 필요한 몇 가지 가정을 한다.

A1) 플랜트  $P(s)$ 는 안정하다. 즉 (1)에서 시스템 행렬  $A$ 는 안정한 고유치를 갖는다.

A2) 플랜트의 상태 제한이 없는 경우에 선형 제어 시스템의 안정도를 보장하면서 만족할 만한 성능을 제공하는 제어기  $K(s)$ 가 설계되어 있다.

A3) 상태 제한이 없는 경우의 폐루프 플랜트의 시스템 행렬  $S = A - B(I + LD)^{-1}LC$ 는 안정한 고유치를 갖는다.

가정 A1)과 A2)는 이런 종류의 문제들에서 표준적인 것이다. 가정 A3)는 기술적인 이유에서 필요로 하는 것으로서, 보상기를 설계하기 전에 이 조건을 쉽게 검증할 수 있다. 가정 A3)는 그림 1에서 제어기  $K(s)$  대신 그것의 직접 이득 행렬 (direct transmission matrix)  $L$ 만을 대입한 시스템이 안정해야 된다는 조건과 동일하다. 제어기의 동특성이 어떤 제어 환경에 의하여 멈춰지는 경우 이러한 상황이 전개될 수 있다. 따라서 실제적인 측면에서 보면 가정 A3)가 만족되도록 제어기  $K(s)$ 를 설계하는 것이 바람직하다. 만약 대상 시스템이 가정 A2), A3)를 만족하지 않는 경우 제어기를 조정하거나 재설계한다. 이때 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 1: 그림 2와 같은 플랜트의 상태 제한이 존재하는 보상 구조에서, 시스템이 가정 A1)-A3)을 만족시키며 플랜트 모델  $P_m(s)$ 의 초기 상태가 플랜트  $P(s)$ 의 초기 상태와 일치한다고 가정하자. 그러면 성능 평가 척도 (14)를 최소화시키는 동적 보상기  $M^*(s)$ 는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$M^*(s) = \frac{G[I - D(I + LD)^{-1}L] - G[I - D(I + LD)^{-1}L]C \times \{sI - [A - B(I + LD)^{-1}LC]\}^{-1} \times B(I + LD)^{-1}L}{G - GP_m(s)[I + LP_m(s)]^{-1}L} \quad (30)$$

그리고 이의 상태 공간 표현은 다음과 같다.

$$\dot{x}_d(t) = [A - B(I + LD)^{-1}LC]x_d(t) - B(I + LD)^{-1}L\xi(t), \quad (31)$$

$$\xi(t) = G[I - D(I + LD)^{-1}L]Cx_d(t) + G[I - D(I + LD)^{-1}L]\xi(t). \quad (32)$$

즉,

$$\Phi^* = A - B(I + LD)^{-1}LC, \quad (33)$$

$$\Gamma^* = -B(I + LD)^{-1}L, \quad (34)$$

$$\Sigma^* = G[I - D(I + LD)^{-1}L]C, \quad (35)$$

$$\Lambda^* = G[I - D(I + LD)^{-1}L] \quad (36)$$

이다.

증명: Parseval의 정리에 의하여, 성능평가함수  $J$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{x}_c(s) - \hat{\tilde{x}}_c(s)\|^2 ds, \quad (37)$$

여기서 ' $\hat{\cdot}$ '는 해당변수의 라플라스 변환임을 의미하며,  $s = \sigma + j\omega$ ,는 복소변수, 그리고  $c \geq 0$ 이다.

상태 제한이 없을 때의 폐루프 시스템의 라플라스 변환은, (15)로부터

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_c(s) \\ \hat{x}_p(s) \end{bmatrix} = (sI - A_i)^{-1} \left\{ B_i \hat{r}(s) + \begin{bmatrix} x_c(0) \\ x_p(0) \end{bmatrix} \right\}, \quad (38)$$

과 같다. 여기서 행렬  $A_i, B_i$ 은 각각 (16), (17)에 주어져 있다. 그리고  $(x_c^T(0), x_p^T(0))^T$ 는 초기치를 의미한다.

$A_i$ 은 상태 제한이 없는 폐루프 시스템의 시스템 행렬에 해당하고, 가정 A2)에 의하여 안정행렬이므로,  $\forall Re[s] \geq 0$ 에서  $(sI - A_i)$ 의 역행렬은 존재한다. 또한 가정 A3)에 의하여  $S$ 는 안정행렬이므로,  $\forall Re[s] \geq 0$ 에서  $(sI - S)$ 의 역행렬은 존재한다. 따라서 분할된 행렬의 역행렬 보조정리[9]를 적용하면

$$(sI - A_i)^{-1} = \begin{bmatrix} -X(s) & -X(s)Q(sI - S)^{-1} \\ -(sI - S)^{-1}RX(s) & -W(s) \end{bmatrix} \quad (39)$$

을 얻을 수 있다. 여기서

$$X(s) := -[(sI - P) - Q(sI - S)^{-1}R]^{-1}, \quad (40)$$

$$W(s) := -(sI - S)^{-1} + (sI - S)^{-1}RX(s)Q(sI - S)^{-1} \quad (41)$$

이다. (39)를 (38)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\hat{x}_c(s) = -X(s) \{ G[I - D(I + LD)^{-1}L] + Q(sI - S)^{-1}B(I + LD)^{-1}L \} \hat{r}(s) - X(s)x_c(0) - X(s)Q(sI - S)^{-1}x_p(0). \quad (42)$$

마찬가지로 상태 제한이 존재할 때의 폐루프 시스템의 라플라스 변환은 (25)로부터

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{x}}_c(s) \\ \hat{\tilde{x}}_m(s) \\ \hat{\tilde{x}}_p(s) \end{bmatrix} = [sI - A_{sc}(s)]^{-1} \{ B_{sc,1}(s) \hat{\mathcal{G}}(\tilde{x}_p) + B_{sc,2} \hat{r}(s) + \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(0) \\ \tilde{x}_m(0) \\ \tilde{x}_p(0) \end{bmatrix} \} \quad (43)$$

이다. 여기서  $(\tilde{x}_c^T(0), \tilde{x}_m^T(0), \tilde{x}_p^T(0))^T$ 는 초기 상태이며

$$sI - A_{sc}(s) = \begin{bmatrix} sI - Q(s) & 0 \\ -B(I + LD)^{-1}H & sI - A \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$B_{sc,1}(s) = \begin{bmatrix} M(s)C - G[I - D(I + LD)^{-1}L]C \\ -B(I + LD)^{-1}LC \\ -B(I + LD)^{-1}LC \end{bmatrix}$$

이다.

가정 A1)에 의하여 플랜트의 시스템 행렬  $A$ 는 안정행렬이므로,  $\forall Re[s] \geq 0$ 에서  $(sI - A)$ 는 특이행렬이 아니다. 잠정적으로  $\forall Re[s] \geq 0$ 에서  $sI - Q(s)$ 가 특이행

렬이 아니라 가정한다. 이와 같은 가정 아래에서는  $sI - A_{sc}(s)$ 가 역행렬을 갖는다는 것이 보장된다. 먼저 성능평가함수  $J$ 를 최소화시키는  $M^*(s)$ 를 구한 다음, 이 특별한 해에 대하여  $sI - \Omega(s)$ 가 특이행렬이 아님을 보인다 앞의 (44)에 분할된 행렬의 역행렬 정리[9]를 적용하면 다음과 같다.

$$[sI - A_{sc}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} [sI - \Omega(s)]^{-1} & 0 \\ r_1(s) & r_2(s) \quad (sI - A)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

여기서

$$[sI - \Omega(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} sI - [F - GD(I + LD)^{-1}H] & M(s)C \\ -B(I + LD)^{-1}H & sI - A \end{bmatrix}^{-1}, \quad (47)$$

$$= \begin{bmatrix} -Y(s) & Y(s)M(s)C(sI - A)^{-1} \\ r_1(s) & -Z(s) \end{bmatrix},$$

$$r_1(s) := -(sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}HY(s), \quad (48)$$

$$r_2(s) := (sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}HY(s) \times M(s)C(sI - A)^{-1}, \quad (49)$$

이고,  $Y(s)$ ,  $Z(s)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$Y(s) := -\{[sI - [F - GD(I + LD)^{-1}H]] + M(s)C(sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}H\}^{-1}, \quad (50)$$

$$Z(s) := -(sI - A)^{-1}[I + B(I + LD)^{-1} \times HY(s)M(s)C(sI - A)^{-1}], \quad (51)$$

(46)을 (43)에 대입하면 아래와 같다.

$$\hat{x}_c(s) = \begin{bmatrix} -Y(s)[M(s)C - G[I - D(I + LD)^{-1}L]C] \\ -Y(s)M(s)C(sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}LC \end{bmatrix} \hat{\omega}(\tilde{x}_p) - \{Y(s)G[I - D(I + LD)^{-1}L] - Y(s)M(s) \times C(sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}L\} \hat{r}(s) - Y(s)\tilde{x}_c(0) + Y(s)M(s)C(sI - A)^{-1}\tilde{x}_m(0). \quad (52)$$

이제 (42), (52)와  $x_c(0) = \hat{x}_c(0)$ 라는 사실로부터, 다음 식이 성립한다.

$$\hat{x}_c(s) - \hat{x}_c(0) = \mathcal{E}_1(s) \hat{\omega}(\tilde{x}_p) + \mathcal{E}_2(s) \hat{r}(s) + \mathcal{E}_3(s) \tilde{x}_c(0) + \mathcal{E}_4(s) \tilde{x}_m(0) + \mathcal{E}_5(s) \tilde{x}_p(0), \quad (53)$$

여기서

$$\mathcal{E}_1(s) = Y(s)\{M(s)C - G[I - D(I + LD)^{-1}L]C\} + Y(s)M(s)C(sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}LC, \quad (54)$$

$$\mathcal{E}_2(s) = Y(s)G[I - D(I + LD)^{-1}L] - Y(s)M(s)C(sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}L - X(s)G[I - D(I + LD)^{-1}L] - X(s)Q(sI - S)^{-1}B(I + LD)^{-1}L, \quad (55)$$

$$\mathcal{E}_3(s) = Y(s) - X(s), \quad (56)$$

$$\mathcal{E}_4(s) = -Y(s)M(s)C(sI - A)^{-1}, \quad (57)$$

$$\mathcal{E}_5(s) = -X(s)Q(sI - S)^{-1} \quad (58)$$

와 같이 정의된다.

$\mathcal{E}_1(s) = 0$ 이 되는  $M_r(s)$ 를 구하여 보자. 그러면

$$Y(s)M_r(s)C[I + (sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}LC] = Y(s)G[I - D(I + LD)^{-1}L]C \quad (59)$$

을 만족해야 한다 이때 다음의 관계식을

$$[I + (sI - A)^{-1}B(I + LD)^{-1}LC]^{-1} = (sI - [A - B(I + LD)^{-1}LC])^{-1}(sI - A) = \{sI - [A - B(I + LD)^{-1}LC]\}^{-1} \times \{sI - [A - B(I + LD)^{-1}LC] - B(I + LD)^{-1}LC\}, \quad (60)$$

(59)에 대입하여 정리하면

$$M_r(s) = G[I - D(I + LD)^{-1}L] - G[I - D(I + LD)^{-1}L]C \times \{sI - [A - B(I + LD)^{-1}LC]\}^{-1} B(I + LD)^{-1}L \quad (61)$$

을 얻는다. (61)을 (50)에 대입하면

$$Y(s) = -[(sI - P) - Q(sI - S)^{-1}R]^{-1} = X(s) \quad (62)$$

이 되고, (60), (62)를 (55), (56), (57), (58)에 대입하여 정리하면,  $\mathcal{E}_2(s) = 0$ ,  $\mathcal{E}_3(s) = 0$ ,  $\mathcal{E}_4(s) = -\mathcal{E}_5(s)$ 이 성립한다. 즉,

$$\hat{x}_c(s) - \hat{x}_c(0) = -X(s)Q(sI - S)^{-1}(\tilde{x}_p(0) - \tilde{x}_m(0)) \quad (63)$$

이다. 그런데  $\tilde{x}_p(0) = \tilde{x}_m(0)$ 라고 가정했으므로, (61)에 주어진  $M_r(s)$ 가 성능평가함수  $J$ 를  $J=0$ 으로 최소화시키는 해  $M^*(s)$ 이다.

이제  $\forall Re[s] \geq 0$ 에서  $sI - \Omega(s)$ 가 특이행렬이 아님을 증명하자. 가정 A2)로부터 상태 제한이 없을 때의 폐루프 방정식 (15)의 시스템 행렬  $A_\rho$ 은 안정행렬이므로  $\forall Re[s] \geq 0$ 에서  $(sI - A_\rho)$ 은 특이행렬이 아니다. 또한 가정 A1), A3)로부터  $\forall Re[s] \geq 0$ 에서  $(sI - A)$ 와  $(sI - S)$ 는 특이행렬이 아니다. 따라서 행렬식(determinant) 정리[9]로부터 다음 식이 성립한다.

$$\det(sI - \Omega(s)) = \det\left\{ \begin{bmatrix} sI - [F - GD(I + LD)^{-1}H] & M^*(s)C \\ -B(I + LD)^{-1}H & sI - A \end{bmatrix} \right\} = \det\left\{ (sI - A_\rho) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (sI - S)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & sI - A \end{bmatrix} \right\} = \det(sI - A_\rho) \det(sI - A) / \det(sI - S). \quad (64)$$

그러므로  $\forall Re[s] \geq 0$ 에서  $\det(sI - \Omega(s)) \neq 0$ 이다. ■

유도된 동적 보상기  $M^*(s)$ 는 플랜트와 제어기의 매개변수들로 명확히 표현되어 있으며, 기준입력이나 상태 제한의 기하학적인 모양과는 관계없이 일정함을 알 수 있다. 따라서 선형 제어기가 미리 설계되어있지만 하다면, 동적 보상기  $M^*(s)$ 는 즉시 설계된다.

#### IV. 전체 시스템의 안정도 해석

플랜트의 상태 제한이 존재하는 제어 시스템에서의 안정도 문제란, 상태 제한 현상이 발생되었을 때 되먹임 루우프가 끊어지는 상태가 되는데, 플랜트 자체는 개루프적

으로 안정하다고 가정했으므로, 제어기가 개루프적으로 불안정한 경우 (예를 들어, PI 제어기) 그것의 상태 변수들이 임의로 크게 발산하느냐에 초점을 맞출 수 있다. 따라서 본 논문에서 다루는 제어 시스템의 안정도를 다룰 때에는 플랜트 출력의 안정도 보다는 시스템 내부의 상태 변수의 안정도 문제를 언급하는 것이 바람직하다. 이에 따라 전체적 안정도(total stability)[5]에 관해 언급한다. 전체적으로 안정된 시스템은, 제한된 에너지를 갖는 입력이 인가될 경우, 출력 뿐만 아니라 모든 상태 변수들이 제한된 에너지를 갖는다는 개념으로, 다른 말로하면 BIBS(Bounded-Input Bounded-State) 안정도에 해당된다.

본 논문에서 다루고 있는 시스템을 고려하자. 앞의 (15)와 (18)에 각각 상태 제한이 없는 그리고 존재하는 시스템에 대한 상태 변수 방정식을 기술하였다. 이러한 두 개의 식은 전혀 다른 시스템을 기술한 것이 아니라, 그림 2의 보상 구조에서 플랜트 상태 제한의 존재 여부에 따라 같은 대상 시스템을 다르게 표현한 것에 불과하다. 실제로 (18)은  $\mathcal{S}(\tilde{x}_p(t)) = \tilde{x}_p(t)$ 인 경우 (15)와 동일한 식이 된다. 따라서 대상 시스템의 안정도 문제는 (18)로 표현된 상태 변수 방정식이 안정할 것인가 하는 문제에 귀결된다. 여기서 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 2 : 그림 2에 주어진 상태 제한이 존재하는 시스템에 대한 보상 구조에서, 시스템이 다음의 조건을 만족시킨다 하자.

1) 상태 제한이 존재하지 않을 때의 선형 시스템이 가정 A1)-A3)을 만족시킨다.

2) 동적보상기의 매개변수가 (33)-(36)으로 설계되었다. 그러면 이 제어 시스템은 전체적으로 안정(totally stable)하다.

증명 :  $\Phi^*$ 는 동적 보상기의 시스템 행렬로서, 이는 포화 요소가 없을 때의 페루우프 플랜트의 시스템 행렬에 해당하고, 가정 A3)에 의하여 안정행렬이므로, 동적 보상기  $M^*(s)$  자체는 개루우프적으로 안정하다.

그림 2에 기술된 전체 시스템의 상태 방정식은 (18)에 주어졌다. 이 식에서  $\mathcal{S}(\cdot)$ 가 유계 함수이므로  $Re\{\lambda_i(A_m)\} < 0, \forall i$ 이면 전체 시스템이 전체적으로 안정하다는 것을 알 수 있다. 그런데  $A_m$ 의 고유치는  $\Theta$ 와  $A$ 의 고유치로 구성되어 있고 가정 A1)에 의하여  $A$ 는 안정행렬이므로,  $\Theta$ 가 안정행렬이라면 제어 시스템은 전체적으로 안정하다. 앞의 (33)-(36)을 (22)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\Theta = \begin{bmatrix} F - GD(I+LD)^{-1}H - A^*C - \Sigma^* & & \\ B(I+LD)^{-1}H & A & 0 \\ 0 & \Gamma^*C & \Phi^* \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$= \begin{bmatrix} P & Q & Q \\ R & A & 0 \\ 0 & -B(I+LD)^{-1}LC & S \end{bmatrix}$$

가정 A2)에 의하여 (15)에 주어진  $A_p$ 은 안정행렬이므로, 다음 식을 만족하는 유사변환 행렬  $V$ 와 안정행렬  $\Pi_3$ 가 존재한다면  $\Theta$ 는 안정행렬이다.

$$V\Theta V^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

여기서  $\Pi_1, \Pi_2$ 는 행렬구성을 위한 꼭두각시(dummy) 행렬이다.

위의 (66)은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$V\Theta = \Psi V, \quad (67)$$

여기서

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix}, \quad (68)$$

로 정의된다. 이 식을 만족하는 행렬  $V$ 로서 다음 행렬을 고려하자.

$$V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & I \\ 0 & -I & I \end{bmatrix} \quad (69)$$

그러면

$$V\Theta = \begin{bmatrix} P & Q & Q \\ R & S & S \\ -R & -[A+B(I+LD)^{-1}LC] & S \end{bmatrix}, \quad (70)$$

$$\Psi V = \begin{bmatrix} P & Q & Q \\ R & S & S \\ \Pi_1 & \Pi_2 - \Pi_3 & \Pi_2 + \Pi_3 \end{bmatrix} \quad (71)$$

이다 이때  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ 를

$$\Pi_1 = -R, \quad (72)$$

$$\Pi_2 = -B(I+LD)^{-1}LC, \quad (73)$$

$$\Pi_3 = A \quad (74)$$

와 같이 선택한다면 식 (67)을 만족시킨다. 그런데 (74)에 주어진  $\Pi_3$ 가 안정행렬이고 (69)로 선택된  $V$ 가 특이행렬이 아니므로,  $\Theta$ 는 안정행렬임을 알 수 있다. ■

정리 1, 2로부터 제시된 동적 보상 방법을 사용하는 경우, 상태 제한이 존재하는 시스템에서 제어기의 상태 위치로 발생하는 문제를 해결할 뿐만 아니라 전체 시스템의 안정도를 보장한다는 것을 알 수 있다. 그러므로 제시된 보상방법이 채택되는 경우, 대부분의 대상 제어 시스템이 만족시키는 가정 A1)-A3)을 충족시키기만 하면, 제어기의 상태변수는 항상 유한하다는 것을 의미한다.

### V. 제시된 방법과 관련된 성질

제시된 동적 피드백 보상기를 가진 구조는, 상태 제한이 일어났을 때의 제어기의 상태변수를 상태 제한이 없었을 때 발전해 나갈 제어기의 상태변수값에 유지시켜주는 역할을 한다. 이는 제어기의 입출력 특성을 상태 제한이 없는 시스템에서의 그것에 유지시킨다는 의미는 아니다. 제시된 보상 구조는 제어기의 상태변수를 보정할뿐이다. 제시된 동적 보상방법으로 제어기의 상태변수는 상태 제한으로 인한 영향을 받지 않지만, 제어기의 고주파 이득행렬  $L$ 은 상태 제한으로 인한 영향을 제어기의 입출력에 반영

한다. 여기서 다음과 같은 의문이 있을 수 있다: 일반적으로 플랜트 모델  $P_m(s)$ 의 초기 상태를 플랜트  $P(s)$ 의 그것과 일치시키는 것은 어려운데, 이와 같은 초기 상태 불일치가 있을 때 제시된 보상 방법의 특징, 즉 제어기의 상태 변수를 유지시켜 주는 성질이 여전히 유효할까하는 점이다. 이에 대해 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 3: 그림 2에 기술된 상태 제한이 존재하는 제어 시스템을 고려하자. 이때 동적 보상기가 (30)에 주어진대로 설계되어있다고 가정한다. 그러면 플랜트  $P(s)$ 와 플랜트 모델  $P_m(s)$ 사이에서 초기 상태 불일치가 있다고 하더라도, 궁극적으로  $\tilde{x}_c(t) \rightarrow x_c(t)$ 이게 된다.

증명: 다음을 정의하자.

$$x_e(t) := x_c(t) - \tilde{x}_c(t), \quad (75)$$

앞의 (30)에 기술된 바와 같이  $M^*(s)$ 를 설계한 경우, (63)으로부터

$$\hat{x}_e(s) = -X(s)Q(sI - S)^{-1}(\tilde{x}_p(0) - \tilde{x}_m(0)) \quad (76)$$

를 얻는다. 여기서  $X(s)$ 는 (40)에 정의되어 있으며, 편의상 아래와 같이 다시 기술한다.

$$X(s) := -[(sI - P) - Q(sI - S)^{-1}R]^{-1}, \quad (77)$$

여기서  $P, Q, R, S$ 는 (16)에 정의되어 있다.

(77)을 (76)에 대입한 후 정돈하면 다음과 같다.

$$s \hat{x}_e(s) = [P + Q(sI - S)^{-1}R] \hat{x}_e(s) + Q\eta(s), \quad (78)$$

여기서  $\eta(s)$ 는

$$\eta(s) := (sI - S)^{-1}(\tilde{x}_p(0) - \tilde{x}_m(0)) \quad (79)$$

로 정의된다.

가정 A2)에 의하여  $A_I$ 는 안정행렬이므로, 분할된 행렬이 행렬식 보조정리[9]를 적용하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \det(sI - A_I) &= \det \begin{bmatrix} sI - P & -Q \\ -R & sI - S \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - S) \det[(sI - P) - Q(sI - S)^{-1}R] \\ &\neq 0 \quad \forall \operatorname{Re}[s] \geq 0 \end{aligned} \quad (80)$$

그러므로  $\forall \operatorname{Re}[s] \geq 0$ 에서  $sI - [P + (sI - S)^{-1}RQ]$ 은 특이행렬이 아니므로, (78)에 주어진 시스템은 입력 성분  $\eta$ 가 없는 경우 점근적으로 원점으로 접근해 들어가는 안정한 시스템이 된다.

이제 (79)에 기술된 동특성을 살펴보자. 이 식은 다음과 같이 재서술할 수 있으며

$$s\eta(s) = S\eta(s) + (\tilde{x}_p(0) - \tilde{x}_m(0)), \quad (81)$$

여기서 가정 A3)에 의하여  $S$ 가 안정행렬이므로, 궁극적으로  $\eta(t) \rightarrow 0$ 이게 된다. 따라서 (76)에 기술된 시스템은 임의의 초기값  $\tilde{x}_p(0), \tilde{x}_m(0)$ 에 대하여 궁극적으로  $x_e(t) \rightarrow 0$ 인 점근적으로 안정한 시스템이다. ■

정리 1에 제시된 동적 보상기를 적용하는 경우, 실제 플랜트와 플랜트 모델 사이에 초기 상태가 일치하지 않는다고 하더라도, 정리 3의 결과로서, 궁극적으로  $\tilde{x}_c(t) \rightarrow x_c(t)$ 임을 보장받는다. 그러나 초기상태의 불일치로 인한 오차 동특성은 (78), (80)으로부터 상태 제한이 없는 선형 시스템의 동특성을 보이고, 가정 A2)에 의하여 그러한 동특성을 잘 설계되어 있다고 가정했으므로 오차 불일치가 과도응답 특성에 심각한 영향을 미치지 않는 것으로 추정할 수 있다. 6절의 시뮬레이션 예제에서 초기 상태 불일치로 인한 응답특성을 예시하겠다.

이제 시스템의 안정상태 특성에 대해 살펴보도록 하자. 안정 상태에서의 출력 성능은 플랜트 상태의 안정 상태 값에 의하여 좌우되므로, 제시된 보상 방법을 사용했을 경우에 전체 시스템의 안정 상태 특성에 어떠한 영향을 미치는지 해석하여야 한다 ( $\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T$ )<sup>T</sup> ( $:= \lim_{t \rightarrow \infty} (x_c^T(t), x_p^T(t))^T = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{x}_c^T(s), s \hat{x}_p^T(s))^T$ )를 (15)에 기술된 시스템의 평형 상태, ( $\bar{x}_c^T, \bar{x}_m^T, \bar{x}_p^T$ )<sup>T</sup> ( $:= \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{x}_c^T(t), \tilde{x}_m^T(t), \tilde{x}_p^T(t))^T = \lim_{s \rightarrow 0} (s \hat{\tilde{x}}_c^T(s), s \hat{\tilde{x}}_m^T(s), s \hat{\tilde{x}}_p^T(s))^T$ )를 (25)에 기술된 시스템의 평형 상태라 하자. 정리 1, 3에 의하여 제시된 보상 방법이 사용되는 경우,  $P(s)$ 와  $P_m(s)$ 의 초기 상태 일치 여부와 상관없이  $\bar{x}_c = \bar{x}_c$ 임을 알 수 있다. 이때 플랜트 상태의 안정 상태 값에 대해서는 다음과 같이 언급할 수 있다.

정리 4: 그림 2와 같은 플랜트의 상태 제한이 존재하는 보상 구조에서, 동적 보상기가 정리 1에 제시된 대로 설계되어있다고 가정한다. 이때  $\tilde{x}_p \in \Psi_{R^p}$ 이면, ( $\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T$ )<sup>T</sup> = ( $\bar{x}_c^T, \bar{x}_p^T$ )<sup>T</sup>가 성립하며, 결과적으로 이어야 한다.

증명: 앞의 (38)로부터

$$\hat{x}_p(s) = \{(sI - S)^{-1}U - (sI - S)^{-1}RX(s) \times (T + Q(sI - S)^{-1}U)\} \hat{r}(s) - (sI - S)^{-1}RX(s)x_c(0) - W(s)x_p(0) \quad (82)$$

이며, 따라서 안정 상태 값은

$$\bar{x}_p = [-S^{-1}U + S^{-1}R\bar{X}(T - QS^{-1}U)]r \quad (83)$$

이다. 여기서

$$\bar{X} = X(0) = (P - QS^{-1}R)^{-1}, \quad (84)$$

이다.

제시된 동적 보상기  $M^*(s)$ 를 선택하는 경우, (43)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{x}}_p(s) &= [r_1(s) \ r_2(s) \ (sI - A)^{-1}] \\ &\times \left\{ B_{sc,1}(s) \hat{w}(\tilde{x}_p) + B_{sc,2} \hat{r}(s) + \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(0) \\ \tilde{x}_m(0) \\ \tilde{x}_p(0) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (85)$$

$$= -(sI-A)^{-1}UC\hat{\mathcal{S}}(\tilde{x}_p) + \{(sI-A)^{-1}U - (sI-A)^{-1}RX(s)[T+Q(sI-S)^{-1}U]\hat{r}(s) + r_1(s)\tilde{x}_c(0) + r_2(s)\tilde{x}_m(0) + (sI-A)^{-1}(s)\tilde{x}_p(0).$$

이의 안정 상태 값은 다음과 같다.

$$\tilde{x}_p = A^{-1}UC\hat{\mathcal{S}}(\tilde{x}_p) + [-A^{-1}U + A^{-1}R\bar{X}(T-QS^{-1}U)]r \quad (86)$$

이때  $\tilde{x}_p$ 를 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$\tilde{x}_p = \mathcal{S}(\tilde{x}_p) + \mathcal{S}^c(\tilde{x}_p), \quad \mathcal{S}(\tilde{x}_p) \in \mathcal{P}_{R^p}, \quad \mathcal{S}^c(\tilde{x}_p) \in R^p. \quad (87)$$

위의 (87)을 (86)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\mathcal{S}(\tilde{x}_p) = -S^{-1}A\mathcal{S}^c(\tilde{x}_p) + [-S^{-1}U + S^{-1}R\bar{X}(T-QS^{-1}U)]r. \quad (88)$$

위의 (83), (87), (88)로부터

$$\tilde{x}_p - \tilde{x}_p = S^{-1}(A-S)\mathcal{S}^c(\tilde{x}_p) \quad (89)$$

이 성립하고, 이로부터  $\tilde{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 라면  $\mathcal{S}^c(\tilde{x}_p) = 0$ 이므로,  $\tilde{x}_p$ 는  $\tilde{x}_p$ 값과 일치하게 된다. 따라서  $\tilde{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이어야 한다. ■

보상되지 않은 시스템의 경우,  $\tilde{x}_c$ 가  $\tilde{x}_c$ 와 일치하지 않을 수 있다. 따라서 보상되지 않은 상태 제한이 존재하는 시스템은  $\tilde{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이라 하더라도 상태 제한이 존재하지 않는 선형 시스템의 안정 상태 성능을 추종하지 못할 수 있다. 6절의 시뮬레이션 예제에서 이와 같은 실례를 보이겠다.

플랜트 상태의 안정상태가  $\tilde{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 이면, 시스템 출력의 안정치(steady-state value)는 원하는 기준 안정치를 추종하지 못하게 된다. 이와 같은 시스템은 바람직하지 않으므로, 선형 제어기 설계시  $\tilde{x}_p \in \mathcal{P}_{R^p}$ 되게 구성하여야 한다.

### VI. 시뮬레이션 예제

본 절에서는 시뮬레이션을 통하여 제시된 보상 방법의 유용성을 살펴도록 한다. 그림 2와 같은 구조에서 다음의 전달 함수로 표현된 플랜트  $P(s)$ 를 고려하자.

$$P(s) = \frac{2s+10}{s^2+5s+10}.$$

이러한 플랜트에 대하여 상태 제한이 없다고 가정한 상황에서, 안정도와 시간 출력 특성을 고려하여 다음과 같은 선형 PI 제어기  $K(s)$ 가 설계되어 있다고 가정한다.

$$K(s) = \frac{10s+20}{s}.$$

이 플랜트와 제어기는 참고문헌 [18]에서 사용된 모델이다. 플랜트는 다음과 같은 상태 공간 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [2 \ 10] x_p(t).$$

여기서 플랜트의 상태는  $\pm 0.15$ 로 제한되어 있다고 가정한다. 즉,  $\|x_p\|_\infty \leq 0.15$ 라 가정한다. 마찬가지로 제어기의 상태 공간 표현식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_c(t) = e(t), \quad u(t) = 20x_c(t) + 10e(t).$$

기준 입력은  $r(t) = 1, t \geq 0$ 라 하였다. 그림 3에 상태 제한이 존재하지 않은 선형 시스템의 출력  $y(t)$ 와 플랜트의 상태  $x_p(t)$ 를 점선으로 도시하였는데 그림에서 알 수 있듯이 응답 특성은 기준 입력을 잘 추종한다. 그런데 상태 제한이 존재하는 경우 플랜트의 상태 가운데 하나가 제한치를 상당히 상회하므로 시스템의 성능을 저하시키게 되는데, 이를 그림 3의 파선으로 도시하였다. 참고문헌 [18]에 제시된 정적 보상 방법을 적용한 결과는 일점쇄선으로 표시하였다.

이제 이러한 시스템에 제시된 동적 보상 방법을 적용해 보자. 동적 보상기  $M^*(s)$ 는 (30)으로부터 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$\dot{x}_d(t) = (A-BLC)x_d(t) - BL\xi(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -25 & -110 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_d(t) - \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \xi(t),$$

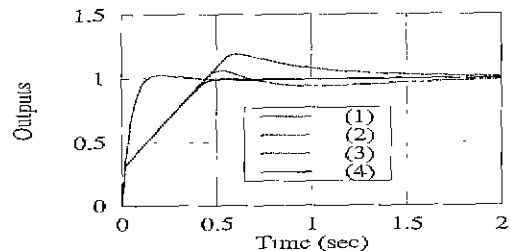
$$\xi(t) = GCx_d(t) + G\xi(t)$$

$$= [2 \ 10]x_d(t) + \xi(t).$$

고려하는 시스템은 가정 A1)-A3)을 만족하므로, 정리 2에 의하여, 동적 보상기를 포함한 전체 시스템은 전체적으로 안정한다. 보상된 시스템의 출력 특성은 그림 3에 실선으로 도시된 대로 상태 제한이 없는 선형 시스템의 그것에 보다 근접한 성능을 보인다.

플랜트 모델  $P_m(s)$ 의 초기 상태가 실제 플랜트  $P(s)$ 의 그것과 다를 경우 시스템의 성능에 미치는 영향을 살펴 보기 위하여, 임의로  $x_p(0) = (0.5, -0.2)^T$  그리고  $x_m(0) = (0, 0)^T$ 라 가정한다. 상태 제한 요소가  $\pm 0.15$ 임을 고려할 때, 이러한 상태 불일치는 상당한 것이다. 그러나 그림 4의 실선으로 도시된 바와 같이 제시된 방법으로 설계된 시스템의 성능은 여전히 만족할만하다는 것을 알 수 있다.

동일한 시스템에 대하여 이번에는  $|x_{p,i}| \leq 0.05$ ,



(a)



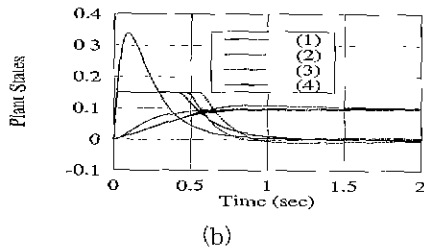


그림 3. 시스템의 응답 특성. (1) 선형 시스템, (2) 보상되지 않은 상태 제한 시스템, (3) [18]의 방법으로 보상된 시스템, (4) 제시된 방법으로 보상된 시스템. (a) 시스템 출력  $y(t)$ . (b) 플랜트의 상태  $x_p(t)$ .

Fig. 3. Responses of the system. (1) Linear system, (2) State constrained system without compensation, (3) System with the compensation method in [18], (4) System with the proposed compensation method. (a) Outputs  $y(t)$ . (b) Plant states  $x_p(t)$ .

$|x_{p,2}| \leq 0.1$ 의 상태제한을 갖는다 하자. 이 경우에 대한 시뮬레이션 결과를 그림 5에 도시하였다. 상태제한이 없는 선형 시스템의 경우  $(x_{p,1}, x_{p,2})^T = (0, 0.1)^T \in \mathcal{W}_R$  임에도 불구하고, 보상되지 않은 시스템의 출력의 경우 기준입력과 안정상태에서 오차를 보인다. 그러나 보상된 제어 시스템의 출력의 안정상태 특성은 기준입력을 잘 추종하며 성능도 만족할만하다.

VII. 결론

본 논문은 플랜트에 상태 제한이 존재하는 시스템에 있어서 그로 인한 부정적인 영향을 감소시키기 위한 효과적인 동적 보상기 설계 방법을 다루었다. 접근 방법은 포화 비선형을 다루는 실제적인 방법으로서 유용한 와인드업 방지 방법을 응용하였다. 즉 플랜트의 상태 제한이 존재하지 않는다는 가정아래 먼저 선형 제어를 전체적 안정도와 성능을 고려하여 설계한 후, 상태 제한으로 인한 안정도 훼손을 복구하고 성능 저하를 완화할 수 있는 추가적인 동적 보상기를 설계하는 접근 방법을 취하였다. 이 과정에서 선형 제어기는 기존의 알려진 설계 기법으로 잘 구성되어 있다는 전제아래 추가적인 동적 보상기의 설계에 초점을 맞추었다. 이에 따라 와인드업 방지 구조를 활용하기 위해서 상태 제한이 존재하는 시스템에 대해서 새로운 보상 구조를 제시하였고, 여기에서의 설계변수인 동적 보상기를 효과적으로 결정하는 방법을 제안하였다. 보상기의 설계 개념은 보상된 제어기의 상태 변수를 상태 제한이 없었을 때 제어기의 그것에 유지되도록 하는 것이다. 유도 과정을 거쳐 제시된 동적 보상기는 플랜트와 선형 제어기의 매개변수로 직접 구성되는 형태는 갖는다. 제시된 보상 방법은 채택하는 경우, 전체 시스템의 전체적 안정도는 보장되며, 상태 제한이 존재하지 않을 경우의 시스템의 안정 상태 성능이 보상된 시스템에서도 타당한 조건하에서 그대로 유지된다는 것을 보였다.

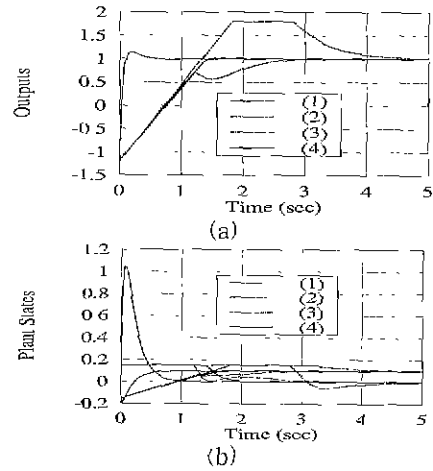


그림 4. 시스템의 응답 특성. (1) 선형 시스템, (2) 보상되지 않은 상태 제한 시스템, (3) [18]의 방법으로 보상된 시스템, (4) 제시된 방법으로 보상된 시스템. (a) 시스템 출력  $y(t)$ , (b) 플랜트의 상태  $x_p(t)$ .

Fig. 4. Responses of the system. (1) Linear system, (2) State constrained system without compensation, (3) System with the compensation method in [18], (4) System with the proposed compensation method. (a) Outputs  $y(t)$ , (b) Plant states  $x_p(t)$ .

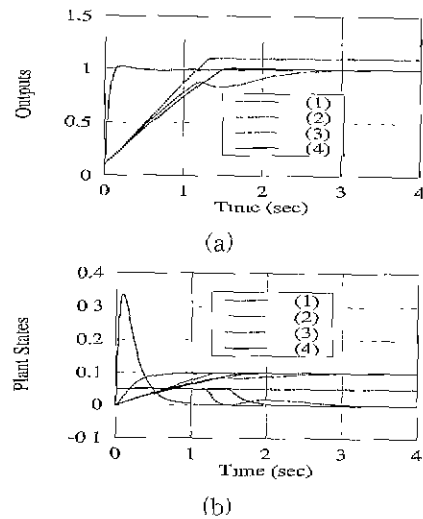


그림 5. 시스템의 응답 특성. (1) 선형 시스템, (2) 보상되지 않은 상태 제한 시스템, (3) [18]의 방법으로 보상된 시스템, (4) 제시된 방법으로 보상된 시스템. (a) 시스템 출력  $y(t)$ . (b) 플랜트의 상태  $x_p(t)$ .

Fig. 5. Responses of the system (1) Linear system, (2) State constrained system without compensation, (3) System with the compensation method in [18], (4) System with the proposed compensation method. (a) Outputs  $y(t)$ , (b) Plant states  $x_p(t)$ .

## 참고문헌

- [1] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer controlled systems: Theory and design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [2] S. Boyd and C. Barratt, *Linear controller design: Limits of performance*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, in *Studies in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, PA, vol. 15, 1994.
- [4] P. J. Campo and M. Morari, "Robust control of processes subject to saturation nonlinearities." *Computers Chem. Engin.*, vol. 14, no. 4/5, pp. 343-358, 1990.
- [5] C. T. Chen, *Linear system theory and design*, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [6] C.-Y. Chen and M.-H. Perng, "Optimal anti-windup control of saturating discrete-time MIMO systems," *Int. J. Contr.*, vol. 67, no. 6, pp. 933-959, 1997.
- [7] P.-O. Gutman and M. Cwikel, "Admissible set and feedback control for discrete-time linear dynamical systems with bounded controls and states," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31, pp. 373-376, 1986.
- [8] R. Hanus, M. Kinnaert, and J. L. Henrotte, "Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method." *Automatica*, vol. 23, no. 6, pp. 729-739, 1987.
- [9] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [10] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, *Singular perturbation methods in control: Analysis and design*, Academic Press, London, 1986.
- [11] P. V. Kokotovic, R. E. O'Malley, Jr, and P. Sannuti, "Singular perturbations and order reduction in control theory - an overview" *Automatica*, vol. 12, no. 3, pp. 123-132, 1976.
- [12] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, and C. N. Nett, "A unified framework for the study of anti-windup designs," *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1869-1883, 1994.
- [13] Z. Lin, A. Saberi, and A. A. Stoorvogel, "Semiglobal stabilization of linear discrete-time systems subject to input saturation via linear feedback - an ARE-based approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 41, No. 8, pp. 1203-1207, 1996.
- [14] D. G. Luenberger, *Introduction to linear and nonlinear programming*, 2nd ed., Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
- [15] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust process control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [16] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, no. 9, pp. 1635-1640, 1995.
- [17] J.-K. Park and C.-H. Choi, "Dynamical anti-reset windup method for discrete-time saturating systems," *Automatica*, vol. 33, no. 6, pp. 1055-1072, 1997.
- [18] 박종구, "리셋 와인드업 방지법에 기초한 상태 제한이 존재하는 제어 시스템의 보상 방법," 제어·자동화·시스템공학 논문지, vol. 5, no. 5, pp. 511-520, 1999.
- [19] A. Saberi, Z. Lin, and A. R. Teel, "Control of linear systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 3, pp. 368-378, 1996.
- [20] V. R. Saksena, J. O'Reilly, and P. V. Kokotovic, "Singular perturbations and time-scale methods in control theory: Survey 1976-1983," *Automatica*, vol. 20, no. 5, pp. 273-293, 1984.
- [21] H. J. Sussmann, E. D. Sontag, and Y. Yang, "A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls." *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 2411-2425, 1994.
- [22] A. Trofino-Neto and V. Kucera, "Stabilization via output feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 5, pp. 764-765, 1993.
- [23] K. S. Walgama and J. Sternby, "Inherent observer property in a class of anti-windup compensators," *Int. J. Contr.*, vol. 52, no. 3, pp. 705-724, 1990.
- [24] K. S. Walgama and J. Sternby, "On the convergence properties of adaptive pole-placement controllers with antiwindup compensators." *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 1, pp. 128-132, 1993.
- [25] K. S. Walgama, S. Ronnback, and J. Sternby, "Generalisation of conditioning technique for anti-windup compensators," *Proc. IEE, Part D*, vol. 139, pp. 109-118, 1992.



박종구

1987년 서울대학교 제어계측공학과 졸업. 동 대학원 석사(1989), 동 대학원 박사(1993). 1995 - 현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 부교수. 관심 분야는 제어이론 및 응용, 컴퓨터 응용 제어 시스템, 추정이론, 가상현실 시스템 및 응용.