시간지연을 갖는 이산 선형 시불변 연결 시스템의 분산 H_∞ 제어

Decentralized H_∞ Control with Performance for Discrete LTI Interconnected Systems with Time Delay

심 덕 선, 김 연 재
(Duk-Sun Shim and Younjae Kim)

Abstract : This paper considers a decentralized control problem of discrete LTI systems which have time delay between interconnections. This paper provides sufficient conditions for the decentralized controller to exist as a H_∞ disturbance attenuation γ of a scaled system and shows that the controller can be designed by using the discrete standard H_∞ control theory.

Keywords: decentralized control, H_∞ disturbance attenuation γ, time delay

I. 서론

대형 연결 시스템의 분산 제어는 최근 20여 년 동안 중요한 연구과제가 되어 왔다. 대형 시스템은 제어대상에 있어서 많은 부분을 차지하며 전력 시스템, 교통 시스템, 통신 시스템 등 많은 예를 볼 수 있다.

모든 시스템에는 신호의 전달에 있어 시간지연이 발생하는데 이는 시스템을 불안정하게 만드는 요인이 된다. 최근에는 시간지연을 포함한 시스템이 주요 연구과제 중 하나가 되었다[1]. 특히 전력 시스템과 같은 대형 시스템은 지리적으로 멀리 떨어진 많은 부시스템들로 이루어져 있으며 부시스템들 사이의 시간지연은 피할 수 없다.

1990년대 들어와서 시간지연이 있는 대형 연결시스템에 대한 H_∞ 제어 문제의 연구가 많이 진행되어 왔는데 주로 연속시간 시스템에 대한 연구[2][3]가 진행되어 왔다. 본 연구는 연속시간시스템을 다룬 논문[2]에 대한 이산 버전의 논문이다. 본 논문에서는 부시스템들의 상호연결에 시간지연이 있는 대형 이산 선형 시불변 연결 시스템을 다룬다. 제어문제는 분산제어기를 사용하여 전체 연결 시스템이 점근 안정하며 외란에서 제어출력사이의 노옴한계(norm bound)를 갖는 성능을 갖도록 하는 것이다. 분산 제어기가 존재하기 위한 충분조건과 안정성 및 성능을 얻을 수 있는 상태 궤환 분산 제어기를 구한다. 그리고 시간지연을 포함하지 않는 변형 시스템을 구하고 분산 출력 궤환 제어문제

를 표준 이산 H_∞ 제어문제로 변형시킨다. 제2절에서 분산 제어 문제를 정의하고 필요한 가정과 보조정리를 설명한다. 제3절에서는 원하는 성능과 점근적 안정성을 얻기 위한 무입력 연결 시스템의 해석결과를 얻고 이를 이용하여 상태 궤환 제어기를 설계하며 제4절에서 분산 관측기 문제를 정의하고 분산 관측기를 설계한다. 그리고 제5절에서 안정성과 성능을 모두 만족하는 분산 출력 궤환 제어문제를 표준 이산 H_∞ 제어문제로 변환시킨다. 마지막으로 제6절에서 본 논문의 결론을 맺는다.

II. 문제정의

N 개의 부 시스템으로 이루어진 대형 선형 시불변 연결 시스템을 생각하자. 부 시스템들이 시간지연을 가지고 서로에게 영향을 주는 연결 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_{1i} w_i(k) + B_{2i} u_i(k) \\ &\quad + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} x_j(k-m_{ij}) \\ z_i(k) &= C_{1i} x_i(k) + D_{1i} u_i(k) \\ y_i(k) &= C_{2i} x_i(k) + D_{2i} w_i(k) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $i=1,2.\cdots,N$이고 $x_i(k)\in R^{n_i}$는 상태변수, $w_i(k)\in R^{m_{1i}}$는 외란, $u_i(k)\in R^{m_{2i}}$는 제어 입력, $z_i(k)\in R^{p_{1i}}$는 제어 출력, $y_i(k)\in R^{p_{2i}}$는 측정 출력이며 행렬 $A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{1i}, D_{2i}$와 A_{ij}는 알맞은 차원의 실 행렬이고 m_{ij}는 j번째 부시스템에서 i번째 부시스템으로의 시간지연으로 미지의 상수이다. 본 논문에서는 연결 시스템 (1)의 안정성과 성능을 동시에 얻는 제어기를 설계하고자 한다.

시스템 (1)에서 성능을 고려한 분산 H_∞ 제어 문제는 다음과 같이 정의한다.

모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 $\gamma_i>0$인 벡터 $\gamma=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N]^T$가 주어졌을 때 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하고 초기영상태에서 0이 아닌 임의의 외란 $w_i\in l_2[0.\infty)$에 대하여 $\sum_{i=1}^N\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^N\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$를 만족하는 분산 제어기 $u_i=G_{ci}(z)y_i(i=1,2,\cdots,N)$를 설계하라.

본 논문의 제어기 설계는 표준 H_∞ 제어기 설계와 밀접한 관련이 있으며 H_∞ disturbance attenuation의 정의는

접수일자 : 1999. 9. 16., 수정완료 : 2000. 4. 29.
심덕선, 김연재 : 중앙대학교 전자전기공학부
※ 본 연구는 한국과학재단 핵심전문연구비(971-0920-133-2) 지원으로 수행하였으며 지원에 감사를 드립니다.

다음과 같다[4].

정의 1 : 다음과 같은 시스템을 고려하자; 시스템 Σ : $x(k+1)=Ax(k)+Bw(k)$, $z(k)=Cx(k)$, 여기서 A, B와 C는 알맞은 차원을 갖는 실행렬이다. 행렬 A가 안정하고 주어진 상수 $\gamma>0$에 대하여 $\|C(zI-A)^{-1}B\|_\infty<\gamma$이면 시스템 Σ는 H_∞ disturbance attenuation γ를 갖는다고 한다.

분산 제어 문제를 간단히 하기 위하여 다음과 같은 가정을 하도록 한다.

가정 1 : 시스템(1)은 다음과 같은 가정을 만족한다.

i) $D_{1i}^T[\ C_{1i}\ \ D_{1i}\ ]=[\ 0\ \ I\ ]$.

ii) $\begin{bmatrix} B_{1i} \\ D_{2i} \end{bmatrix} D_{2i}^T=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

다음의 보조정리는 H_∞ disturbance attenuation γ와 동등한 조건을 ARI(Algebraic Riccati Inequality)와 LMI(Linear Matrix Inequality)로 표현하고 있다.

보조정리 1 : 점근적으로 안정한 시불변 시스템, $x(k+1)=Ax(k)+Bw(k)$, $z(k)=Cx(k)$ 에 대하여 다음은 모두 동일하다.

i) $\|C(zI-A)^{-1}B\|_\infty<\gamma$.

ii) 다음 식을 만족시키는 행렬 $P=P^T>0$가 존재한다.

$A^TPA-P+A^TPB(\gamma^2I-B^TPB)^{-1}B^TPA+C^TC<0$

이고 $\gamma^2I-B^TPB>0$.

iii) 다음 식을 만족시키는 행렬 $\overline{P}=\overline{P}^T>0$가 존재한다.

$$A^T\overline{P}A-\overline{P}+\overline{P}B(\gamma^2I+B^T\overline{P}B)^{-1}B^T\overline{P}+C^TC<0.$$

iv) 다음 식을 만족시키는 행렬 $\overline{P}=\overline{P}^T>0$가 존재한다.

$$A^T\overline{P}A-(\overline{P}^{-1}+\frac{1}{\gamma^2}BB^T)^{-1}+C^TC<0.$$

v) 다음 식을 만족시키는 행렬 $P=P^T>0$가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A^TPA-P+C^TC & A^TPB \\ B^TPA & -(\gamma^2I-B^TPB) \end{bmatrix}<0$$

이고 $\gamma^2I-B^TPB>0$.

증명 : i)⇔ii) : [5]에 증명되어 있다.

ii)⇔iii) : $\overline{P}=P(I-BB^TP)^{-1}$이라 하면 ii)와 iii)는 같다[6].

iii)⇔iv) : 역행렬 공식을 이용하면, 다음 식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$(\overline{P}^{-1}+\frac{1}{\gamma^2}BB^T)^{-1}=\overline{P}-\overline{P}B(\gamma^2I+B^T\overline{P}B)^{-1}B^T\overline{P}$$

그러므로 iii)와 iv)는 같다.

ii)⇔v) : 다음은 잘 알려진 행렬공식이다[6].

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}$$

여기서 $\Delta=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. A가 대칭행렬이라면 $A<0$면 $\Delta<0$이고 $A_{22}<0$이다. 그러므로 ii)와 v)는 같다. ■

III. 해석 결과 및 분산 상태 궤환 제어기

이 절에서는 무입력 연결 시스템의 안정성 및 성능 해석 결과를 유도하고 이를 이용하여 상태변수 궤환 제어기를 설계한다. 시스템 (1)에서 무입력 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_ix_i(k)+B_{1i}w_i(k) \\ &\quad +\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}x_j(k-m_{ij}) \\ z_i(k) &= C_{1i}x_i(k) \end{aligned} \tag{2}$$

정리 1 : 무입력 연결 시스템 (2)에서 모든 $i=1,2,\cdots,N$에 대하여 행렬 A_i가 안정하고 ARI (3)을 만족하는 대칭행렬 $P_i>0$가 존재하면 무입력 연결 시스템 (2)는 점근적으로 안정하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다.

$$\begin{aligned} A_i^TP_iA_i-(P_i^{-1}+\frac{1}{\gamma_i^2}B_{1i}B_{1i}^T+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T)^{-1} \\ +C_{1i}^TC_{1i}+(N-1)I<0 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $I\in R^{n_i}$이고 N은 부 시스템의 개수이다.

증명 : (3)에서 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} & A_i^TP_iA_i-(P_i^{-1}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T)^{-1}+(N-1)I< \\ & A_i^TP_iA_i-(P_i^{-1}+\frac{1}{\gamma_i^2}B_{1i}B_{1i}^T+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T)^{-1} \\ & \qquad +C_{1i}C_{1i}^T+(N-1)I<0 \end{aligned}$$

즉 (3)을 만족하는 $P_i>0$가 존재하면 (4)를 만족하는 $P_i>0$가 존재한다.

$$A_i^TP_iA_i-(P_i^{-1}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T)^{-1}+(N-1)I<0 \tag{4}$$

$\overline{A_{ii}}\,\overline{A_{ii}}^T=\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T$로 놓으면 보조정리 1의 iv)⇔v)에 의해서 (5)를 만족하는 $\overline{P_i}>0$가 존재한다.

$$U=\begin{bmatrix} A_i^T\overline{P_i}A_i-\overline{P_i}+(N-1)I & A_i^T\overline{P_i}\,\overline{A_i} \\ \overline{A_i}\,\overline{P_i}A_i & -(I-\overline{A_i}^T\overline{P_i}\,\overline{A_i}) \end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

(4)와 (5)에서 $\overline{P_i}=(I+P_i\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T)^{-1}P_i$이다.

리아프노프 함수 $V(x,k)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} V(x,k) &= \sum_{i=1}^{N}V_i(x,k) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^T(k)\overline{P_i}x_i(k)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\sum_{l=k-m_{ij}}^{k-1}x_j^T(l)x_j(l)\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

모든 입력이 0일 때 상태변수들이 0으로 수렴하면 시스템은 점근적으로 안정하다고 한다. 그러므로 (2)에서 $w_i(k)=0$으로 놓으면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta V(x,k) &= V(x,k+1)-V(x,k) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^T(k+1)\overline{P_i}x_i(k+1)\right. \\ &\qquad \left.+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\sum_{l=k+1-m_{ij}}^{k}x_j^T(l)x_j(l)\right\} \\ &\quad -\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^T(k)\overline{P_i}x_i(k)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\sum_{l=k-m_{ij}}^{k-1}x_j^T(l)x_j(l)\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N} \{ x_i^T(k) A_i^T \overline{P_i} A_i x_i(k) + x_i^T(k) A_i^T \overline{P_i}\, \overline{A_i}\, \overline{x_i} \\
&\quad + \overline{x_i}^T \overline{A_i}^T \overline{P_i} A_i x_i(k) + \overline{x_i}^T \overline{A_i}^T \overline{P_i}\, \overline{A_i}\, \overline{x_i} \\
&\quad - x_i^T(k) \overline{P_i} x_i(k) + (N-1) x_i^T(k) x_i(k) - \overline{x_i}^T \overline{x_i} \} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \overline{x_i} \end{bmatrix} \cdot U \cdot \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \overline{x_i} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

여기서 $\overline{A_i} = [A_{i1}\, A_{i2} \cdots A_{i(i-1)}\, A_{i(i+1)} \cdots A_{iN}]$,

$$
\overline{x_i} = \begin{bmatrix} x_1(k-m_{i1}) \\ \vdots \\ x_{(i-1)}(k-m_{i(i-1)}) \\ x_{(i+1)}(k-m_{i(i+1)}) \\ \vdots \\ x_N(k-m_{iN}) \end{bmatrix}, \quad \overline{A_i}\, \overline{A_i}^T = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} A_{ij}^T
$$

이다.

그러므로 ARI (3)을 만족하는 $P_i > 0$ 가 있으면 LMI (5)를 만족하는 $\overline{P_i} > 0$ 가 존재하며 $\Delta V(x,k) < 0$가 성립한다. 따라서 리아프노프의 정리에 의하여 무입력 연결 시스템 (2)는 점근적으로 안정하다.

이제 시스템 (2)의 성능문제에 관하여 생각해 본다. $B_{i\gamma} = \frac{1}{\gamma_i} B_{1i}$로 치환하면 (2)의 H_∞ disturbance attenuation γ문제는 다음 시스템의 unitary disturbance attenuation문제가 된다.

$$
\begin{aligned}
x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_\gamma w_i(k) \\
&\quad + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} x_j(k - m_{ij}) \qquad (7) \\
z_i(k) &= C_{1i} x_i(k)
\end{aligned}
$$

다음 식을 성능지수로 정의한다.

$$
J = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \{ z_i^T(k) z_i(k) - w_i^T(k) w_i(k) \} \qquad (8)
$$

(8)에 대해서 $J<0$를 보임으로써 $\sum_{i=1}^{N} \| z_i \|_2^2 < \sum_{i=1}^{N} \| w_i \|_2^2$임을 증명할 수 있다. 초기상태가 0인 조건에서 (8)은 아래 식과 같다.

$$
J = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \{ z_i^T(k) z_i(k) - w_i^T(k) w_i(k) + \Delta V_i(x,k) \} \qquad (9)
$$

(9)는 다음과 같은 형태로 쉽게 변형될 수 있다.

$$
J = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \begin{bmatrix} \overline{x_i} \\ w_i(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \cdot \overline{U} \cdot \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \begin{bmatrix} \overline{x_i} \\ w_i(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

여기서

$$
\overline{U} = \begin{bmatrix} M & A_i^T \overline{P_i} [\overline{A_i}\ B_\gamma] \\ [\overline{A_i}\ B_\gamma] \overline{P_i} A_i & -(I - [\overline{A_i}\ B_\gamma]^T \overline{P_i} [\overline{A_i}\ B_\gamma]) \end{bmatrix}
$$

이고 $M = A_i^T \overline{P_i} A_i - \overline{P_i} + C_{1i}^T C_{1i} + (N-1)I$ 이다.

점근안정의 경우와 같은 방법으로 $\overline{U} < 0$ 이며 따라서 ARI(3)과 보조정리 1에 의하여 초기상태가 0인 조건에서 $J<0$ 이다. 따라서 시스템 (2)는 점근적으로 안정하고 초기상태가 0인 조건에서 $\sum_{i=1}^{N} \| z_i \|_2^2 < \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^2 \| w_i \|_2^2$ 의 성능을 만족한다. ■

정리 1은 무입력 연결 시스템 (2)가 원하는 성능을 가지면서 안정하기 위한 충분조건을 제시하여 준다.

이번에는 연결 시스템 (1)의 H_∞ 분산 성능문제를 풀기 위한 상태 궤환 분산 제어기를 생각해 보기로 한다.

정리 2 : 시스템 (1)에서 $y_i(k) = x_i(k)$라 가정하자. 모든 $i = 1, 2, \cdots, N$에서 (10)을 만족하는 대칭행렬 $P_i > 0$ 가 존재하면 연결 시스템 (1)은 $F_i = -(I + B_{2i}^T P_i B_{2i})^{-1} B_{2i}^T P_i A_i$인 분산 상태궤환 제어기 $u_i(k) = F_i x_i(k)$에 의하여 점근적으로 안정하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^{N} \| z_i \|_2^2 < \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^2 \| w_i \|_2^2$을 만족한다.

$$
\begin{aligned}
&A_i^T P_i A_i - \Big(P_i^{-1} + \frac{1}{\gamma_i^2} B_{1i}^T B_{1i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} A_{ij}^T \Big)^{-1} \\
&\quad - A_i^T P_i B_{2i} (I + B_{2i}^T P_i B_{2i})^{-1} B_{2i}^T P_i A_i \qquad (10) \\
&\quad + C_{1i}^T C_{1i} + (N-1) I < 0
\end{aligned}
$$

증명 : 정리 2는 H_∞ 제어 이론을 적용하여 변형 시스템으로 증명될 수 있다. 다음의 변형 시스템을 생각하자.

$$
\begin{aligned}
\eta_i(k+1) &= A_i \eta_i(k) + \overline{B}_{1i} \overline{w}_i(k) + B_{2i} u_i(k) \qquad (11) \\
\overline{z}_i(k) &= \begin{bmatrix} \overline{C}_{1i} \\ 0 \end{bmatrix} \eta_i(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u_i(k)
\end{aligned}
$$

여기서 $\overline{B}_{1i} \overline{B}_{1i}^T = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} A_{ij}^T + \frac{1}{\gamma_i^2} B_{1i} B_{1i}^T$이고 $\overline{C}_{1i}^T \overline{C}_{1i} = (N-1) I + C_{1i}^T C_{1i}$이다. 상태변수를 알고 있으면 제어기는 $u_i(k) = F_i \eta_i(k)$의 모양을 갖게 되어 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\eta_i(k+1) &= (A_i + B_{2i} F_i) \eta_i(k) + \overline{B}_{1i} \overline{w}_i(k) \qquad (12) \\
\overline{z}_i(k) &= \begin{bmatrix} \overline{C}_{1i} \\ F_i \end{bmatrix} \eta_i(k)
\end{aligned}
$$

$D_{1i}^T [C_{1i}\ D_{1i}] = [0\ I]$일 때 시스템 (12)가 unitary H_∞ disturbance attenuation을 갖기 위해서는 ARI (10)을 만족하는 대칭행렬 $P_i > 0$가 존재하고 행렬 $A_i + B_{2i} F_i$가 안정해야 한다. 그러므로 전체 시스템이 점근 안정하고 $\sum_{i=1}^{N} \| z_i \|_2^2 < \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^2 \| w_i \|_2^2$을 만족하기 위한 시스템 (1)의 분산 상태 궤환 제어기 설계 문제는 시스템 (11)의 상태 궤환 H_∞ 제어 문제가 된다. ■

IV. 연결 시스템의 관측기

앞 절의 상태 궤환 제어 이론은 시간지연이 있는 대형 연결 시스템의 분산 관측기에도 적용될 수 있다. 부 시스템들의 상태변수를 알 수 없을 때 상태변수를 알아내기 위해 다음과 같은 관측기를 사용하도록 한다.

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_i(k+1) &= A_i \hat{x}_i(k) + B_{2i} u_i(k) \qquad (13) \\
&\quad + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} \hat{x}_j(k - m_{ij}) + H_i \big(C_{2i} \hat{x}_i(k) - y_i(k) \big)
\end{aligned}
$$

모든 $i = 1, 2, \cdots, N$에서 관측오차를 $e_i(k) = x_i(k) - \hat{x}_i(k)$로 정의하면 다음과 같은 오차 방정식을 얻게 된다.

$$
\begin{aligned}
e_i(k+1) &= (A_i + H_i C_{2i}) e_i(k) + (B_{1i} + H_i D_{2i}) w_i(k) \\
&\quad + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} e_j(k - m_{ij}) \qquad (14) \\
z_i(k) - \hat{z}_i(k) &= C_{1i} e_i(k)
\end{aligned}
$$

그러므로 성능문제를 고려한 분산 관측기 문제는 아래와 같이 정의할 수 있다.

모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 $\gamma_i>0$인 벡터 $\gamma=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N]^T$가 주어졌을 때 폐루프 시스템(14)가 점근적으로 안정하고 초기상태가 0인 조건에서 0이 아닌 임의의 외란 $w_i\in l_2[0,\infty)$에 대하여 $\sum_{i=1}^N\|z_i-\hat{z}_i\|_2^2<\sum_{i=1}^N\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$이 되게 하는 관측기 이득 H_i를 구하여라.

다음 정리는 관측기 문제의 해를 제시하여 준다.

정리 3 : 시스템 (13)을 생각하자. 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 (15)를 만족하는 대칭행렬 $Q_i>0$가 존재하면 $H_i=-A_iQ_iC_{2i}^T(I+C_{2i}Q_iC_{2i}^T)^{-1}$인 관측기 이득을 가진 연결 시스템 (13)은 점근적으로 안정하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^N\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^N\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다.

$$\begin{aligned}&A_iQ_iA_i^T-(Q_i^{-1}+C_{1i}^TC_{1i}+(N-1)I)^{-1}\\&\quad-A_iQ_iC_{2i}^T(I+C_{2i}Q_iC_{2i}^T)^{-1}C_{2i}Q_iA_i^T\\&\quad+\frac{1}{\gamma_i^2}B_{1i}B_{1i}^T+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T<0\end{aligned}\tag{15}$$

증명 : 관측기 문제는 상태 궤환 제어 문제와 쌍대이다. 그러므로 $(A_i,B_{1i},C_{1i},C_{2i},D_{2i})\Leftrightarrow(A_i^T,C_{1i}^T,B_{1i}^T,B_{2i}^T,D_{1i}^T)$일 때 정리 2의 증명과 같은 과정을 거쳐서 증명될 수 있다. ■

V. 분산 출력 궤환 제어기

이 절에서는 연결 시스템의 분산 출력 궤환 제어기를 설계하도록 한다. 출력 궤환의 경우에는 안정성 및 성능에 관하여 새로운 해석이 필요하다. 예를 들어, 분산 출력 궤환 제어기를 사용하면 부시스템의 원래 상태변수는 다른 부시스템에 영향을 주지만 제어기의 상태변수는 다른 부시스템에 영향을 주지 않는다. 따라서 부시스템의 일부 상태변수만이 다른 부시스템에 영향을 미치는 부분 연결 시스템에 관하여 생각할 필요가 있다. 다른 부시스템에 영향을 미치는 상태변수를 능동 상태변수라고 하고 그렇지 않은 상태변수를 수동 상태변수라고 하자. 그리고 편의를 위해 i번째 부시스템의 상태변수 $x_i(k)\in R^{n_i}$를 능동 상태변수 $x_{i1}(k)\in R^{n_{i1}}$와 수동 상태변수 $x_{i2}(k)\in R^{n_{i2}}$로 나누고 $x_i(k)=[x_{i1}^T(k)\ x_{i2}^T(k)]^T$와 $n_{i1}+n_{i2}=n_i$의 성질을 만족한다고 하자.

그러면 무입력 부분 연결 시스템은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}x_i(k+1)&=A_ix_i(k)+B_{1i}w_i(k)\\&\quad+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\overline{A}_{ij}x_{j1}(k-m_{ij})\\z_i(k)&=C_{1i}x_i(k)\end{aligned}\tag{16}$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\overline{A}_{ij}x_{j1}(k-m_{ij})=\sum_{j=1,j\neq i}^{N}[\ \overline{A}_{ij}\ 0\ ]x_j(k-m_{ij})$$

이다.

다음 정리는 무입력 부분 연결 시스템 (16)의 해석결과이다.

정리 4 : 무입력 부분 연결 시스템 (16)에서 가정 1이 성립한다고 하자. 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 행렬 A_i가 안정하고 ARI (17)를 만족시키는 대칭행렬 $P_i>0$가 존재하면 무입력 부분 연결 시스템 (16)은 점근적으로 안정하고 초기상태가 0일 때 $\sum_{i=1}^N\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^N\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다.

$$\begin{aligned}&A_i^TP_iA_i-(P_i^{-1}+\frac{1}{\gamma_i^2}B_{1i}^TB_{1i}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T)^{-1}\\&\quad+C_{1i}^TC_{1i}+(N-1)\begin{bmatrix}I_{i1}&0\\0&0_{i2}\end{bmatrix}<0\end{aligned}\tag{17}$$

여기서 $I_{i1}\in R^{i1\times i1}$이며 $0_{i2}\in R^{i2\times i2}$이다.

증명 : 리아프노프 함수 $V(x,k)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}V(x,k)&=\sum_{i=1}^{N}V_i(x,k)\\&=\sum_{i=1}^{N}\Big\{x_i^T(k)\overline{P}_ix_i(k)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\sum_{l=k-m_{ij}}^{k-1}x_{j1}^T(l)x_{j1}(l)\Big\}\end{aligned}\tag{18}$$

먼저 $w_i(k)\equiv0$일 때 점근적 안정성에 대해 생각하자.

$$\begin{aligned}\Delta V(x,k)&=\sum_{i=1}^{N}\Big\{x_i^T(k+1)\overline{P}_ix_i(k+1)\\&\qquad+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\sum_{l=k+1-m_{ij}}^{k}x_{j1}^T(l)x_{j1}(l)\Big\}\\&\quad-\sum_{i=1}^{N}\Big\{x_i^T(k)\overline{P}_ix_i(k)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\sum_{l=k-m_{ij}}^{k-1}x_{j1}^T(l)x_{j1}(l)\Big\}\\&=\sum_{i=1}^{N}\{x_i^T(k)A_i^T\overline{P}_iA_ix_i(k)+x_i^T(k)A_i^T\overline{P}_i\widehat{A}_i\overline{x_{i1}}\\&\quad+\overline{x_{i1}}^T\widehat{A}_i^T\overline{P}_iA_ix_i(k)+\overline{x_{i1}}^T\widehat{A}_i^T\overline{P}_i\widehat{A}_i\overline{x_{i1}}\\&\quad-x_i^T(k)\overline{P}_ix_i(k)+(N-1)x_i^T(k)x_i(k)-\overline{x_{i1}}^T\overline{x_{i1}}\}\\&=\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}x_i(k)\\ \overline{x_{i1}}\end{bmatrix}U\begin{bmatrix}x_i(k)\\ \overline{x_{i1}}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$U=\begin{bmatrix}A_i^T\overline{P}_iA_i-\overline{P}_i+(N-1)\begin{bmatrix}I_{i1}&0\\0&0_{i2}\end{bmatrix}&A_i^T\overline{P}_i\widehat{A}_i\\ \widehat{A}_i\overline{P}_iA_i&-(I-\widehat{A}_i^T\overline{P}_i\widehat{A}_i)\end{bmatrix}$$

정리 1의 증명과 같은 과정을 거치면 ARI (17)에 의하여 모든 $x_i(k)\neq0$에서 $\Delta V(x,k)<0$가 성립한다. 그러므로 부분 연결 시스템은 점근적으로 안정하다. 증명을 간편히 하기 위하여 $B_{i\gamma}=\frac{1}{\gamma_i}B_{1i}$라 하자. 초기상태가 0일 때 성능지수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}J&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\{z_i^T(k)z_i(k)-w_i^T(k)w_i(k)+\Delta V_i(x,k)\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}x_i(k)\\ \begin{bmatrix}\overline{x_{i1}}\\ w_i(k)\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\overline{U}\begin{bmatrix}x_i(k)\\ \begin{bmatrix}\overline{x_{i1}}\\ w_i(k)\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\overline{U}=\begin{bmatrix}M&A_i^T\overline{P}_i[\ \widehat{A}_i\ B_{i\gamma}]\\ [\ \widehat{A}_i\ B_{i\gamma}]\overline{P}_iA_i&-(I-[\ \widehat{A}_i\ B_{i\gamma}]^T\overline{P}_i[\ \widehat{A}_i\ B_{i\gamma}])\end{bmatrix}$$

$$M=A_i^T\overline{P}_iA_i-\overline{P}_i+C_{1i}^TC_{1i}+(N-1)\begin{bmatrix}I_{i1}&0\\0&0_{i2}\end{bmatrix}$$ 이다.

그러므로 $J<0$임을 보조정리 1과 ARI (17)로 알 수 있다 따라서 $J<0$는 $x_i(0)=0$일 때 항상 성립하며 이는 부

분 연결 시스템 (16)이 초기상태가 0인 조건에서 원하는 성능을 만족한다는 것을 의미한다 ■

마지막으로 분산 출력 제어에 관한 정리에 앞서 다음 변형 시스템을 도입한다.

$$\begin{aligned} \eta_i(k+1) &= A_i\eta_i(k)+\left[B_i \ \ \frac{1}{\gamma_i}B_{1i}\right]\tilde{w}_i(k)+B_{2i}u_i(k) \\ \tilde{z}_i(t) &= \begin{bmatrix}\sqrt{N-1}I \\ C_{1i}\end{bmatrix}\eta_i(t)+\begin{bmatrix}0 \\ D_{1i}\end{bmatrix}u_i(t) \\ y_i(t) &= C_{2i}\eta_i(t)+\left[0 \ \ \frac{1}{\gamma_i}D_{2i}\right]\tilde{w}_i(t) \end{aligned} \tag{19}$$

이제 연결 시스템 (1)의 분산 출력 궤환 제어 문제를 생각하자. 다음 정리는 분산 출력 궤환 제어 문제를 시스템 (19)에 대한 표준 이산 H_∞ 제어 문제로 바꾸어 준다.

정리 5 : 연결 시스템 (1)에서 가정 1이 성립한다고 하자. 시스템 (1)이 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 $u_i(k)=G_{ci}(z)y_i(k)$인 분산 출력 궤환 제어기를 사용하였을 때 각 부시스템의 피드백 시스템이 unitary H_∞ disturbance attenuation을 가지면 연결 시스템 (1)은 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 분산 출력 궤환 제어기 $u_i(k)=G_{ci}(z)y_i(k)$에 의하여 점근적으로 안정화 가능하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다.

증명 : 분산 출력 제어기 $G_{ci}(z)$를 다음과 같다고 하자.

$$\begin{aligned} x_{ci}(k+1) &= A_{ci}x_{ci}(k)+B_{ci}y_i(k) \\ u_i(k) &= C_{ci}x_{ci}(k) \end{aligned} \tag{20}$$

여기서 $x_{ci}(k)\in R^{n_{ci}}$이고 행렬 A_{ci}, B_{ci}와 C_{ci}가 알맞은 차원의 실행렬이다. 이 때 제어기 (20)과 연결 시스템 (1)의 폐루프 시스템은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k+1) &= \bar{A}_i\bar{x}_i(k)+\bar{B}_{1i}w_i(k) \\ &\quad +\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\bar{A}_{ij}\bar{x}_{j1}(k-m_{ij}) \\ z_i(k) &= \bar{C}_{1i}\bar{x}_i(k) \end{aligned} \tag{21}$$

여기서

$$\bar{A}_i=\begin{bmatrix}A_i & B_{2i}C_{ci} \\ B_{ci}C_{2i} & A_{ci}\end{bmatrix},\ \bar{B}_{1i}=\begin{bmatrix}B_{1i} \\ B_{ci}D_{2i}\end{bmatrix},\ \bar{A}_{ij}=\begin{bmatrix}A_{ij} \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{1i}=[\ C_{1i}\ \ D_{1i}C_{ci}\ ],\ \bar{x}_i(k)=\begin{bmatrix}x_i(k) \\ x_{ci}(k)\end{bmatrix},\ \bar{x}_{j1}(k)=x_j(k)$$

이다.

시스템 (21)은 무입력 부분 연결 시스템 (16)과 같은 형태를 가지고 있다. 그러므로 시스템 (21)이 점근적으로 안정하고 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$의 성능을 얻기 위한 충분조건은 행렬 $\bar{A}_i$가 안정하고 (22)를 만족하는 대칭행렬 $\bar{P}_i>0$이 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} &\bar{A}_i^T\bar{P}_i\bar{A}_i-(\bar{P}_i^{-1}+\frac{1}{\gamma_i^2}\bar{B}_{1i}\bar{B}_{1i}^T \\ &+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\bar{A}_{ij}\bar{A}_{ij}^T)^{-1}+\bar{C}_{1i}^T\bar{C}_{1i}+(N-1)\begin{bmatrix}I_i & 0 \\ 0 & 0_{ci}\end{bmatrix}<0 \end{aligned} \tag{22}$$

시스템 (19)와 제어기 (20)의 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k+1) &= \bar{A}_i\bar{x}_i(k)+\tilde{B}_{1i}\tilde{w}_i(k) \\ \tilde{z}_i(k) &= \tilde{C}_{1i}\bar{x}_i(k) \end{aligned} \tag{23}$$

여기서

$$\tilde{B}_{1i}=\begin{bmatrix}B_i & \frac{1}{\gamma_i}B_{1i} \\ 0 & \frac{1}{\gamma_i}B_{ci}D_{2i}\end{bmatrix},\quad \tilde{C}_{1i}=\begin{bmatrix}\sqrt{N-1}I & 0 \\ C_{1i} & D_{1i}C_{ci}\end{bmatrix} \tag{24}$$

시스템 (23)이 unitary H_∞ disturbance attenuation을 가질 조건은 ARI (22)가 성립하고 $\bar{A}_i$가 안정한 조건과 동일하다. 그러므로 시스템 (1)의 분산 출력 궤환 제어 문제는 변형 시스템 (19)의 피드백 시스템이 unitary H_∞ disturbance attenuation을 갖는 문제가 된다. 따라서 (19)의 시스템에 이산 H_∞ 제어 이론을 적용하여 원하는 분산 출력 궤환 제어기를 설계할 수 있다. ■

정리 5에 따르면 변형시스템 (19)에 $T_{\tilde{z},\tilde{w}}$가 unitary H_∞ disturbance attenuation을 갖도록 하는 표준 이산 H_∞ 제어기를 시스템 (1)에 사용하면 시스템 (1)의 연결 시스템은 점근적으로 안정화 가능하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다.

VI. 결론

본 논문에서는 대형 시스템이 여러 부시스템들의 연결로 주어지고 상호 연결부분에 시간지연을 갖는 이산 선형 시불변 연결 시스템을 다루었다. 이 때 지연시간은 임의의 상수이며 부시스템마다 다를 수 있다. 제어 문제는 분산 제어를 사용하여 전체 연결 시스템이 안정하며 시스템의 노움(norm)제한의 성능을 얻는 것이다. 연결 시스템의 점근적 안정성과 성능을 만족하는 분산 출력 궤환 제어기는 주어진 시스템으로부터 시간지연과 다른 부시스템으로의 연결이 없는 새로운 변형시스템을 구하고 여기에 표준 이산 H_∞ 제어 이론을 적용하여 얻을 수 있었으며 제어기는 지연시간과 무관하게 얻을 수 있었다 그리고 연결 시스템에 대한 분산 관측기도 제안하였다.

참고문헌

[1] K. Watanabe, E. Nobuyama, and A. Kojima, "Recent advances in control of time delay systems -a tutorial review-", in *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control,* pp. 2083-2089, 1996.

[2] Duk-Sun Shim and Yun-Jae Kim, "Decentralized H_∞ control with performance for linear time-invariant systems with delays", *Jounarl of Electrical Eegineering and Information Science,* vol. 3, no. 2, pp. 158-162, April 1998

[3] L. Xie, Y. Wang, and C. E. de Souza, "Decentralized output feedback control of discrete-time interconnected uncertain systems", in *Proceedings of 32th Conference on Decision and Control,* (San Antonio,Texas), pp. 3762-3767, Dec. 1993.

[4] I. R. Petersen, "Disturbance attenuation and H 1 optimization: A design method based on the algebraic riccati equation", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. AC-32. pp. 427-429, May 1987.

[5] C. E. de Souza and L. Xie, "On the discrete-time bounded real lemma with application in th characteriztion of static state feedback H_∞ controllers", *System & Control Letters.* no. 18, pp. 61-71, 1992.

[6] I. Yaesh and U. Shaked, "A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: H_∞-optimal linear control and filtering", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 36, no. 11, pp. 1264-1271. Nov. 1991.

[7] P. A. Iglesias and K. Glover, "State-space approach to discrete-time H_∞ control", *Int. J. Control,* vol. 54, no. 5, pp. 1031-1073, 1991.

[8] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control,* Prentice-hall, 1996.

심 덕 선

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제6권, 제5호, 참조.

김 연 재

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제6권, 제5호, 참조.