

< 논 문 >

회전 외팔보의 과도상태 진동시 발생하는 응력분포 연구

Study on the Stress Distribution of a Rotating Cantilever Beam in Transient Vibration

최 창 민* · 유 흥 희** · 양 현 익***

Chang Min Choi, Hong Hee Yoo and Hyun Ik Yang

(1999년 12월 22일 접수 ; 2000년 2월 21일 심사완료)

Key Words : Rotating Cantilever Beams (회전 외팔보), Tensile Stress (인장응력), Bending Stress (굽힘응력), Transient Vibration (과도상태 진동), Tuned Angular Speed (공진주파수)

ABSTRACT

The stress distribution of a rotating cantilever beam in transient vibration is investigated in this paper. The equations of motion of the rotating beam are derived and numerical results are obtained. The tensile and bending stresses which occur when the beam rotates with the tuned angular speed or passes through the tuned angular speed are obtained. Since those stresses are usually significant during the rotational motion, it is important to estimate them accurately in the design of the rotating structure.

1. 서 론

회전운동을 하는 외팔보 형태의 구조물은 항공기의 회전익 및 터빈의 블레이드 등에서 쉽게 그 응용 예를 발견할 수 있다. 이러한 구조물에 대한 연구는 오래 전부터 이루어져 오고 있다. 그러나 대부분 진동에 대한 내용^(1~3) 다루고 있으며, 과도상태에 대한 연구^(4~7)는 거의 발견할 수 없다.

외팔보는 회전시 공진주파수를 갖게 되는데 이는 보의 회전주파수가 보의 고유진동수와 일치하게 되는 경우를 의미하며, 이 경우 작은 가진력에 의해서도 큰 변형과 응력이 발생할 수 있다. 그런데 터빈과 같은 기계시스템의 경우에도 통상 그 회전주파수는 터빈 블레이드의 공진주파수보다 높은 점에서 결정되며 따라서 시스템이 운전을 시작할 때나 동작을 멈출 때 그 공진주파수를 통과하는 것은 불가피한

일이다. 따라서 외팔보가 공진주파수 부근에서 회전할 때나 공진주파수를 통과하여 회전할 때, 어느 정도의 응력이 발생하느냐 하는 점은 이러한 구조물들의 설계 시 중요하게 고려해야 하는 사항이다.

본 논문에서는, 공진주파수 주변에서의 회전 외팔보의 과도 동특성에 대해 연구하는 것을 주요 목표로 한다. 구체적으로는 공진주파수 부근에서 회전할 때나 이 주파수를 통과해 회전할 때, 어느 정도의 동적 응력이 발생하는지 과도해석을 통해 조사하고자 한다. 여기서 과도해석 결과를 위한 인장 및 굽힘 운동방정식은 참고문헌 (7)의 방법이 사용되었다. 이에 근거하여 과도해석결과가 수치적으로 구해지며, 외팔보의 공진주파수는 인장과 굽힘 운동방정식을 동시에 고려한 진동해석⁽⁸⁾을 통해 구한다. 이 때 과도해석을 통해 구해지는 결과는 일차적으로 변위이며 이에 근거하여 보의 인장 및 굽힘 변형률을 구하고 다시 응력-변형률 관계를 적용하여 보에 작용하는 응력을 구한다.

본 연구는 기존의 진동해석에 중점을 둔 연구결과와 달리 과도상태에서의 동적 반응, 특히 발생하는 동적 응력을 구하기 위한 방법을 제시하고 이에 근거하여 해석 결과를 제시한다는 점에서 그 고유성과 의의를 갖는다.

* 한양대학교 대학원 기계설계학과
** 정희원, 한양대학교 기계공학부
*** 정희원, 한양대학교 기계공학부

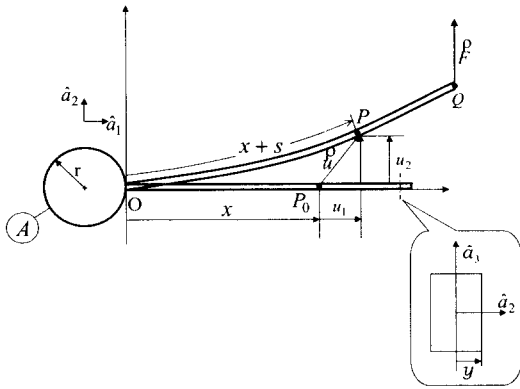


Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam

2. 운동방정식

2.1 운동방정식 유도 과정

Fig. 1은 회전하는 축 A에 고정된 외팔 보의 형상을 보여준다. 축 A는 다음과 같은 형태의 (spin-up motion이라 불림) 각속도 Ω 로 회전한다.

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\Omega_s}{T_s} \left(t - \frac{T_s}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T_s} \right) \quad (0 \leq t \leq T_s) \\ \Omega &= \Omega_s \quad (t \geq T_s) \end{aligned} \quad (1)$$

그림에서 \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 는 축에 부착된 서로 직교하는 단위벡터들이며 x 는 점 O로부터 외팔보상의 임의의 점 P_0 까지의 거리를 나타낸다. 또한 \vec{u} 는 P_0 로부터 P 까지의 탄성 변위벡터를 나타낸다. u_1 과 u_2 는 각각 \vec{u} 의 \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 방향 측정치이며 s 는 인장변위를 나타낸다. 그림에는 임의의 위치에서의 단면을 나타내고 있으며 y 는 단면상에서 중립축으로부터의 거리로 면내굽힘 운동 시 y 가 최대가 되는 부분에서 최대 굽힘 응력이 발생한다.

본 연구에서는 보의 방정식을 유도하기 위하여 s 와 u_2 를 다음 같이 근사화한다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (2)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (3)$$

여기서 ϕ_{1i} , ϕ_{2i} , q_{1i} , q_{2i} 는 각각 s 와 u_2 를 근사화하기 위한 가상 모드함수와 일반좌표들이며 μ_1 과 μ_2 는 각 모드함수들의 개수이다. 본 연구에서는 가상 모드들은 회전하지 않는 보의 진동해석에서 구한 해석적 고유함수들을

사용하였고, 그 개수는 각각 2개와 10개를 사용하였다. 회전축의 중심점으로부터 측정된 보의 임의의 점 P 의 위치벡터 \vec{r}^P 는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{r}^P = (r+x+u_1)\hat{a}_1 + u_2\hat{a}_2 \quad (4)$$

회전축 A의 각속도와 점 P의 속도는 다음과 같다.

$$\vec{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3 \quad (5)$$

$$\vec{v}^P = (\dot{u}_1 - \Omega u_2)\hat{a}_1 + [\dot{u}_2 + \Omega(r+x+u_1)]\hat{a}_2 \quad (6)$$

s 와 u_2 가 근사화되므로 식 (6)에 나타난 u_1 과 \dot{u}_1 은 s , u_2 , \dot{s} , 그리고 \dot{u}_2 로 표현되어야 한다. 이를 위해서 참고 문헌 (7)에 제안된 기하학적 제한조건이 사용되는데 그것은 다음과 같다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{du_2}{d\sigma} \right)^2 d\sigma \quad (7)$$

회전하는 외팔 보의 운동방정식의 유도에 필요한 P점의 편 속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}_{li}^P \equiv \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{li}} = \phi_{li} \hat{a}_1 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{2i}^P &\equiv \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{2i}} \\ &= - \sum_{j=1}^{\mu_1} \left(\int_0^x \phi_{2i, \sigma} \phi_{2j, \sigma} q_{2j} d\sigma \right) \hat{a}_1 + \phi_{2i} \hat{a}_2 \end{aligned} \quad (9)$$

보에 위치한 점 Q에 외부하중 \vec{F} 가 작용한다면 운동방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\int_0^L \rho \frac{d\vec{v}^P}{dt} \cdot \vec{v}_{ki}^P dx + \frac{\partial U}{\partial q_{ki}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{ki}^Q \quad (10)$$

($k=1,2$) ($i=1,2,\dots,\mu_k$)

여기서 L 과 ρ 는 보의 길이와 단위길이당 질량을 나타내고, U 는 탄성에너지로서 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (11)$$

여기서 E , A , 그리고 I 는 각각 보의 영계수, 단면적, 그리고 2차 면적모멘트를 나타낸다.

외부 가진력은 통상 보의 회전주파수와 관련되므로 간단히 다음과 같이 이상화하고 보의 끝단에 작용한다고 가정한다.

$$\vec{F} = F \sin(\Omega t) \hat{a}_2 \quad (12)$$

이상의 식들을 정리한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} (M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} - \Omega^2 M_{ij}^{11} q_{1j} + K_{ij}^S q_{1j}) - \sum_{j=1}^{\mu_1} (2\Omega M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} + \dot{\Omega} M_{ij}^{12} q_{2j}) = \Omega^2 P_{1i} + r\Omega^2 Q_{1i} \quad (13)$$

$(i=1, \dots, \mu_1)$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \{ M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + [K_{ij}^B - \Omega^2 M_{ij}^{22} + r\Omega^2 K_{ij}^{G1} + \Omega^2 K_{ij}^{G2}] q_{2j} \} + \sum_{j=1}^{\mu_1} [2\Omega M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + \dot{\Omega} M_{ij}^{21} q_{1j}] = -\dot{\Omega} P_{2j} - r\dot{\Omega} Q_{2j} + \phi_{2j}(L) F \sin(\Omega t) \quad (14)$$

$(j=1, \dots, \mu_2)$

여기서 M_{ij}^{kl} , K_{ij}^S , K_{ij}^B , K_{ij}^{G1} , K_{ij}^{G2} , P_{ki} 그리고 Q_{ki} 는 다음과 같이 정의된다.

$$M_{ij}^{kl} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ki} \phi_{lj} dx \quad (15)$$

$$K_{ij}^S \equiv \int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (16)$$

$$K_{ij}^B \equiv \int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \quad (17)$$

$$K_{ij}^{G1} \equiv \int_0^L \rho(L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (18)$$

$$K_{ij}^{G2} \equiv \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (19)$$

$$Q_{ki} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ki} dx \quad (20)$$

$$P_{ki} \equiv \int_0^L \rho x \phi_{ki} dx \quad (21)$$

2.2 변형률—응력 관계

2차원 평면운동 시 보에 작용하는 응력은 보의 인장변형과 굽힘변형에 의한 것으로 나누어 생각할 수 있다. 먼저 인장변형에 의한 응력을 구하기 위해 다음과 같은 Hook's 법칙을 사용한다.

$$\sigma_s = E \epsilon \quad (22)$$

σ_s 는 보에 걸리는 인장응력, E 는 Young's 계수, 그리고 ϵ 은 인장 변형률로 인장방향의 변형 s 를 x 에 대해 편미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\epsilon = \frac{\partial s}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\mu_1} \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial x} q_{1i} \quad (23)$$

이상의 과정을 종합하면 다음과 같은 인장응력에 대한 식을 구할 수 있다.

$$\sigma_s = E \frac{\partial s}{\partial x} = E \sum_{i=1}^{\mu_1} \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial x} q_{1i} \quad (24)$$

보의 굽힘에 의해 늘어난 부분은 굽힘 인장응력을, 줄어든 부분은 굽힘 압축응력을 받게 된다. 이 굽힘에 의한 응력은 중립축에서는 존재하지 않지만 Fig. 1의 y 가 최대가 되는 부분에서 각각 최대 굽힘 인장응력과 굽힘 압축응력을 받게된다. 굽힘응력에 대한 식은 다음 같이 정리할 수 있다.

$$\sigma_b = \frac{M_b y}{I} \quad (25)$$

식 (25)에서 굽힘 방향 모멘트는 굽힘 방향 변위를 공간변수 x 에 대해 2번 미분하여 구할 수 있다.

$$M_b = EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) = EI \sum_{i=1}^{\mu_2} \frac{\partial^2 \phi_{2i}}{\partial x^2} q_{2i} \quad (26)$$

이상의 결과를 종합한 굽힘응력은 다음과 같다.

$$\sigma_b = Ey \sum_{i=1}^{\mu_2} \frac{\partial^2 \phi_{2i}}{\partial x^2} q_{2i} \quad (27)$$

3. 해석 결과

해석에 사용된 보의 재질은 통상 구조물에 가장 많이 사용되는 철이며 주요 물성치는 Table 1에 나타나 있다. Table 1에서 ρ 는 보의 단위길이당 질량, b 는 보의 단면의 폭, h 는 보의 단면의 두께, r 은 축 반경, A 는 보의 단면적, L 은 보의 길이, E 는 보의 탄성계수, I 는 보의 면적관성 모멘트, P 는 작용외력의 크기, t_s 는 정상상태 도달시간, f_N 은 외팔보의 회전주파수이기도 하며 그 때의 고유진동 주파수이기도 한 값이고 σ_y 는 항복 응력이다.

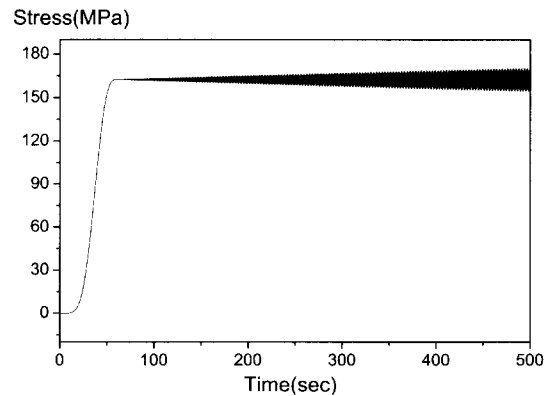


Fig. 2 Tensile stress of the rotating beam at the tuned angular speed

Table 1 Data for the numerical example

Notation	Numerical data
ρ	15.84(kg/m)
b	0.2(m)
h	0.01(m)
r	0.5(m)
A	0.002(m ²)
L	1(m)
E	193*10 ⁹ (N/m ²)
I	1.7*10 ⁻⁸ (m ²)
P	0.25(N)
t_S	60(sec)
f_N	16.55(Hz)
σ_y	7.6*10 ⁸ (N/m ²)

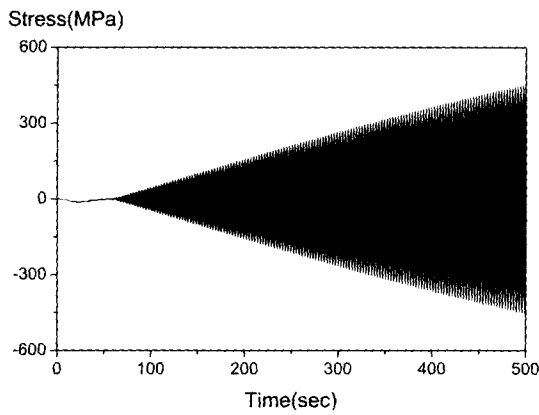


Fig. 3 Bending stress of the rotating beam at the tuned angular speed

Fig. 2와 Fig. 3은 스피업 모션(Spin-up motion)의 정상 상태의 회전주파수가 공진주파수 (16.55 Hz)와 정확히 일치하는 경우 구한 인장 및 굽힘 방향 변위를 보여주는데 가진력에 의한 공진으로 인해 발산하는 것을 관찰할 수 있다. Fig. 4와 Fig. 5는 회전주파수가 (16.63 Hz) 공진주파수와 약간 떨어져 있을 때의 인장 및 굽힘 변위를 보여준다. 사실은 이 회전주파수는 굽힘방향 운동방정식만을 가지고 구한 근사적 공진주파수인데, 이 때 굽힘 변위는 발산하는 대신 회전주파수와 공진주파수 차이에 의한 맥놀이 현상이 발생하며 일정한 크기로 한정되는 것을 보여준다. 또 Fig. 4에 보는 바와 같은 인장변위의 크기는 팁 클리어런스(Tip Clearance) 설계시 매우 유용하게 사용될 수 있다. Fig. 6과 Fig. 7은 그 때의 인장 및 굽힘 응력을 보여주는

데 굽힘 응력의 경우 발산하지는 않으나 인장응력의 약 20%까지 크기를 갖는 것을 보여주며 이는 이러한 구조물의 피로파괴를 야기할 수 있는 값으로서 공진주파수 부근에서의 작동을 피해야함을 잘 보여준다.

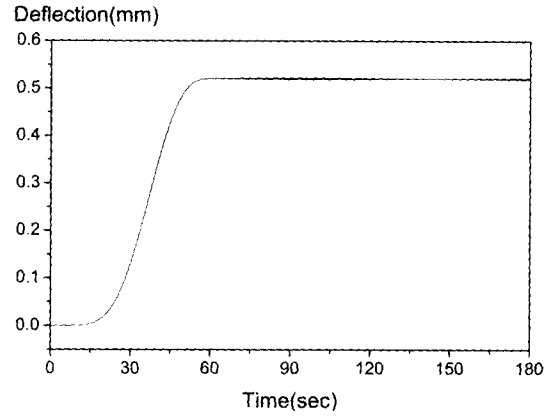


Fig. 4 Tensile deflection of the rotating beam around the tuned angular speed

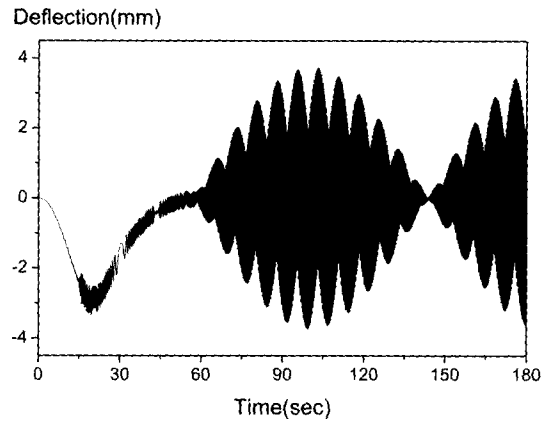


Fig. 5 Bending deflection of the rotating beam around the tuned angular speed

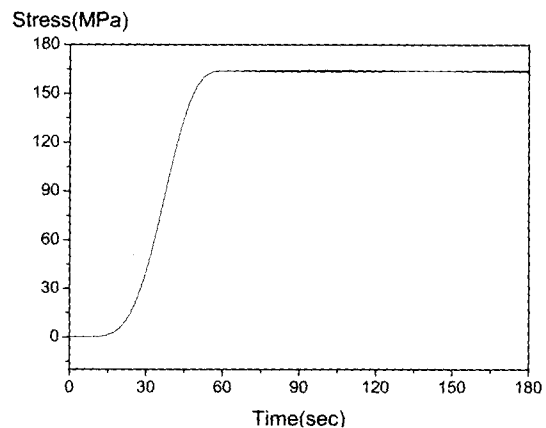


Fig. 6 Tensile stress of the rotating beam around the tuned angular speed

일반적으로 터빈 같은 회전체는 공진주파수를 지나 더 높은 회전수에서 동작을 하는 경우가 많다. Fig. 8과 Fig. 9는 회전주파수가 33.1 Hz로 공진주파수의 2배일 때의 고정

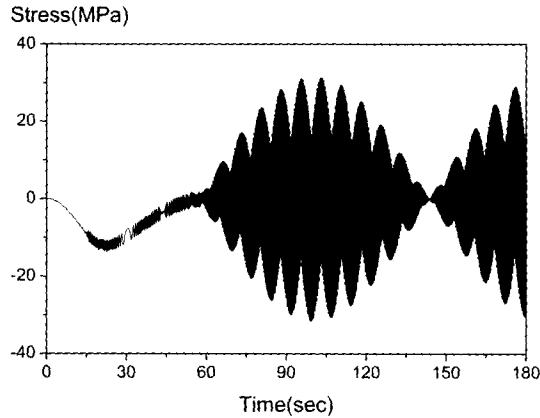


Fig. 7 Bending stress of the rotating beam around the tuned angular speed

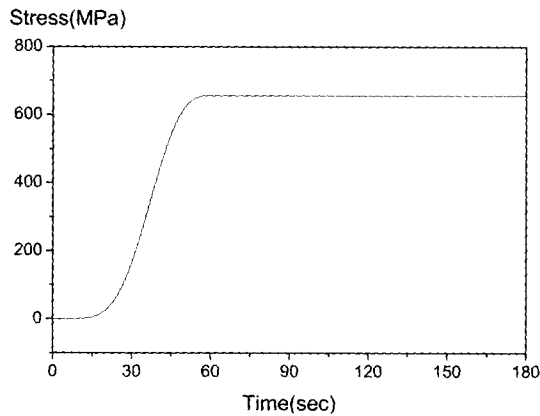


Fig. 8 Tensile stress of the rotating beam passing the tuned angular speed

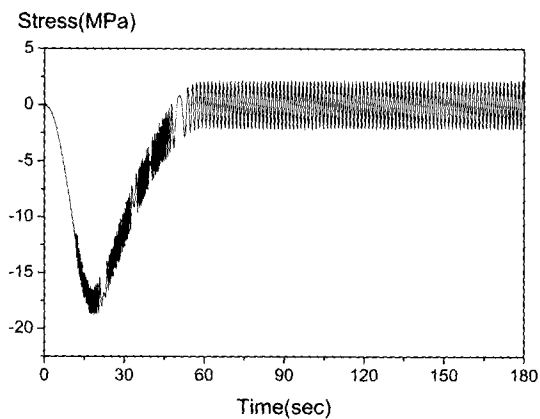


Fig. 9 Bending stress of the rotating beam passing the tuned angular speed

단에 작용하는 인장 및 굽힘 방향 응력을 보여준다. 이 경우에는 외팔보 회전각속도의 상승시 공진주파수를 통과하게 되나 공진주파수와 일치하는 시간은 짧은 순간이므로 공진으로 인한 변위 증폭 현상은 발생하지 않는다. 따라서 정상상태에서의 굽힘방향 응력은 Fig. 7에 나타난 값에 비해 크게 감소하는 것을 관찰할 수 있다. 그러나 회전주파수가 2배로 증가했으므로 원심력이 증가하여 인장방향 변위 및 응력은 4배 가량 증가하게 된다.

4. 결 론

본 논문에서는 회전운동을 하는 외팔보의 인장 및 굽힘 방향 운동방정식을 유도하였으며 이에 근거하여 수치해석을 실시하여 회전시 보에 발생하는 동적 변위 및 응력을 구하였다. 보가 공진주파수로 회전하는 경우 굽힘 변위 및 응력은 공진으로 인해 발산하는 것을 관찰할 수 있었으며, 그 주변주파수에서도 발산하지는 않으나 제한된 크기의 맥놀이형 굽힘 변위와 응력이 발생하는 것을 알 수 있었다. 공진주파수보다 큰 정상상태 회전각속도를 갖는 경우는 인장 변위 및 응력은 각속도의 자승에 비례하는 원심력에 의해 증가하나 정상상태에서의 굽힘 변위 및 응력은 감소하는 것을 알 수 있었다. 본 논문에 제시된 해석방법 및 결과는 외팔보 형태를 갖는 터보 기계류의 블레이드와 같은 구조물의 설계 시 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No.766.
- (2) Scilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," Trans. of ASME J. of Appl. Mech., Vol.25, pp.28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," J. of Sound and Vibration, Vol. 56, pp.175~185.
- (4) Simo, J. and Vu-Quoc, L., 1986, "On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall

Motions-the Plane Case : Part I and Part II," Trans. of ASME J. of Appl. Mech., Vol. 53, pp.849~863.

(5) Chirstensen, E. and Lee, S., 1986, "Nonlinear Finite Element Modeling of the Dynamics of Unrestrained Flexible Structures," Computers and Structures, Vol. 23, pp.819~829.

(6) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987. "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," J. of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, pp.139~151.

(7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995 "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," J. of Sound and Vibration, Vol. 181, No.2, pp.261~278.

(8) Yoo, H. and Shin, S. W., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," J. of Sound and Vibration, Vol.212, No.5, pp.807~828.