한국소음진동공학회지 제 10 권 제 4 호, pp. 610~614, 2000.

〈논 문〉

세포자동자법에 의한 파동전파의 시뮬레이션

Simulation of Wave Propagation by Cellular Automata Method

안 영 공* · 양 보 석** · 森 下 信*

Young Kong Ahn, Bo-Suk Yang and Shin Morishita

(2000년 2월 9일 접수 : 2000년 7월 13일 심사완료)

Key Words : Cellular Automata(CA : 세포 자동자), Wave Propagation(파동전파)

ABSTRACT

Cellular Automata (CA)s are used as a simple mathematical model to investigate self-organization in statistical mechanics, which are originally introduced by von Neumann and S. Ulam at the end of the 1940s. CAs provide a framework for a large class of discrete models with homogeneous interactions, which are characterized by the following fundamental properties: 1) CAs are dynamical systems in which space and time are discrete. 2) The systems consist of a regular grid of cells. 3) Each cell is characterized by a state taken from a finite set of states and updated synchronously in discrete time steps according to a local, identical interaction rule. 4) The state of a cell is determined by the previous states of a surrounding neighborhood of cells. A cellular automaton has been attracted wide interest in modeling physical phenomena, which are described generally, partial differential equations such as diffusion and wave propagation. This paper describes one and two-dimensional analysis of wave propagation phenomena modeled by CA, where the local interaction rules were derived referring to the Lattice Gas Model reported by Chen et al., and also including finite difference scheme. Modeling processes by using CA are discussed and the simulation results of wave propagation with one wave source are compared with that by finite difference method.

1. 서 론

물리적인 현상을 해석하기 위해 계를 모델링하여 수학적인 지배방정식을 유도하고 그 해를 구하는 방법이 일반적으로 수행되어져 왔고, 많은 성공을 거두었다.[1] 그러나, 현상을 물리적인 모델링과 수학적으로 표시하기 어려운 복잡한 계의 경우, 이 방법으로는 해석이 불가능하다. 따라서 복합된 물리적인 현상이나, 생물학적, 사회적, 경제학적인 현상등을 구성하는 요소사이의 상호작용에 주목하여 그 현상을 모델링하고자 하는 새로운 방법론의 도입이 시도되고 있다. 이 새로운 방법론의 특징은 계를 구성하는 요소사이의 상호작용 규칙(rule)에 따른 기능을 가지며, 국소적인 상호작용에 의해 전체의 상태나 행동이 결정된다는 것이다. 그러나, 분해 가능한 각 요소를 단순히 조합하는 것으로 전체가 이루어져 있는 계를 의미하는 것이 아니며 전체를 각 요소로 분리시키면 그 본질이 누락해 버리는 특수한 계이다.

이와 같이 전체적인 행동을 토대로 각 구성요소의 법칙, 기능, 관계가 변화하여가는 계를 복합계(complexity system)[2, 3]라 부르며, 최근 주목을 모으고 있는 연구 분야이다. 세포자동자(CA)는 그 계산방법의 특징으로부터 복합된 계에 대해 유력한 모델링기법으로 간주되어 군집류해석,[4, 5] 입자형상물체해석[6], 유체해석 등의 다양한

* Department of Mechanical Engineering, Yokohama National University

** 정회원, 부경대학교 기계공학부

분야에 적용이 시도되고 있다. 또 종래로부터 방정식에 의한 해석이 일반적으로 이루어져 온 물리현상에 대해서도 이 방법이 적용되고 있다. CA에서 파생한 Lattice Gas Automata(LGA)라 하는 이산해석방법을 이용하여, 수학모델인 편미분방정식으로 기술되어온 파동전파나 확산현상 등에 대해 해석을 수행한 예가 보고되고 있다.[9, 10]

본 연구에서는 음장에 관한 파동전파문제에 CA를 적용하고, 파동방정식의 차분법에 의한 해석결과와 비교를 수행함으로써 본 방법의 유용성을 검토한다. 차분법은 어떤 현상을 해석하기 위해 먼저 물리적으로 그 현상을 모델화하고 그 모델을 토대로 하여 거시적인 역학방정식을 유도하여 그 방정식의 해를 구하는 방법이다. 그러나 물리적인 모델화 과정에 많은 간략화가 행하여짐으로 그 방정식의 해가 현상을 정확하게 재현하는 것은 어렵다. 이에 비해 CA법은 요소사이의 상호작용만을 고려함으로써 물리적인 현상을 해명하는 방법으로서, 복잡한 경계조건을 가진 공간에서의 파동전파현상을 해석하는데 차분법의 경우보다 유용함을 본 연구에서 확인하였다.

2. 세포자동자

CA는 인공생명, 즉 생물학적으로 자기자신을 복제하는 기능을 가지는 특유의 생물학적인 시스템을 수학적인 형식으로 나타낸 것으로서, Von Neumann과 Ulam에 의해 1940년대에 제안되었다.[2, 3]

CA를 이용한 해석절차로서는 Fig. 1과 같이 먼저 해석공간을 셀(cell)이라 하는 부분영역으로 분할하고, 각 셀상에 이산적인 상태량을 정의한다. 다음은 가까운 근방의 셀간에 정의된 국소근방규칙을 이용하여 이산적인 시간변화에 따라 상태량을 추이함으로써 물리적인 현상을 나타내는 모델링 방법이다. 국소근방규칙만으로 계 전체의 현상을 표현할 수 있으므로 계 전체에 대하여 해석을 수행할 필요가 없고, 일부분을 추출하여 검토하는 것이 가능하다.

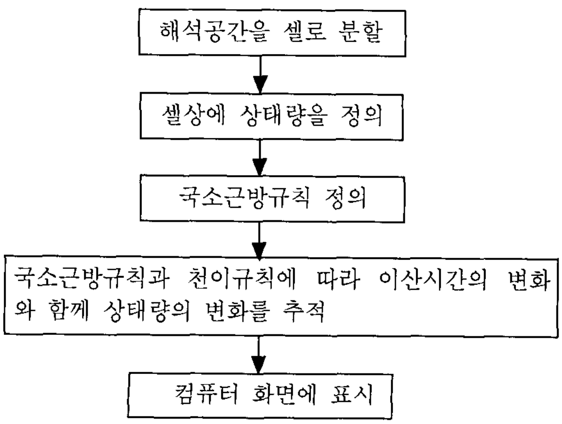


Fig. 1 Flow chart of simulation by using CA

이 국소근방규칙을 임의로 설정할 수가 있는 것이 본 방법의 큰 장점으로, 해석대상이 물리적인 현상을 나타내는 것이면 물리법칙을 근방규칙으로서 취급하는 것도 가능하지만, 일반적인 도출방법에 대해서는 아직 확립되어 있지 않다. 단지, 종래의 수학적 지배방정식을 대신할 수 있는 부분이 있으므로 해석대상에 따라서 충분히 음미할 필요가 있다. 또, 셀에 가해지는 상태량으로써는 매질 등의 상태를 정수로 표현할 수도 있지만, 변위나 속도 등 각종 물리량을 할당하는 것도 가능하다. 2차원 CA의 경우에 해석공간은 사각형상 혹은 삼각형상의 셀로 분할되기 때문에 상태량에는 방향성이 부가된다.

본 연구에서는 유체해석 분야에 적용된 LGA를 파동전파문제에 응용한 예로써 공간에 존재하는 입자의 밀도분포로 파동을 표현한 Chen의 모델[10]에 대해, 셀상태량으로써 이 입자밀도를 음압의 실수치로 치환하여 음장의 파동을 표현하는 것을 시도하였다. 그 결과 계산과정이 간략하고, 또한 계산시간이 단축되는 장점이 있다.

3. CA에 의한 2차원공간의 모델링

평면파의 전파현상을 CA로 해석하기 위한 2차원공간을 Fig. 2와 같은 사각형의 셀로 이산화 하였다. 각 셀에 대한 국소근방규칙의 적용범위로서 중앙에 존재하는 셀의 음압 상태량 u는 상하좌우의 4근방 셀 N, S, W, E로 전파되어가는 것으로 국소근방규칙을 정의하였다.

파가 전파될 때 각 셀의 시간변화량 Δt에 대한 공간에 있어서 상태량의 변화량 Δu의 관계를 식 (1)에 나타내었다.

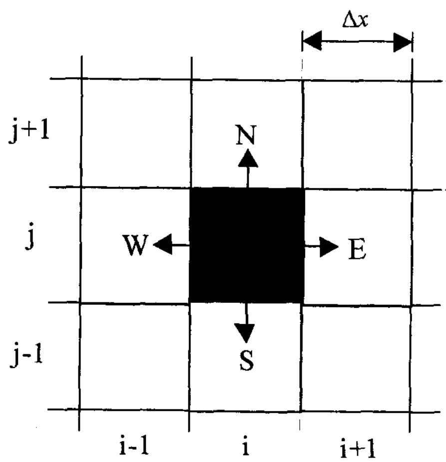


Fig. 2 Neighborhood structures considered for two-dimensional CA

$$\Delta u(i,j,t+\Delta t)=\Delta u(i,j,t)+m_N\{u(i,j+1,t)-u(i,j,t)\}+m_S\{u(i,j-1,t)-u(i,j,t)\}+m_W\{u(i-1,j,t)-u(i,j,t)\}+m_E\{u(i+1,j,t)-u(i,j,t)\} \quad (1)$$

여기서 i,j는 공간좌표를 나타내고, t는 시간을 의미하며, m_N, m_S, m_W, m_E는 Fig. 2와 같이 N, S, W, E 방향으로 파가 전파해 나가는 각각의 속도를 의미한다.

식 (1)의 변화량과 함께 시간변화량 Δt에 의한 상태량 u의 갱신을 식 (2)와 식 (3)으로부터 구한다.

$$u(i,j,t)=u(i,j,t-\Delta t)+\Delta u(i,j,t) \quad (2)$$

$$u(i,j,t+\Delta t)=u(i,j,t)+\Delta u(i,j,t+\Delta t) \quad (3)$$

식 (1)~(3)을 이용하면 평면파의 수학적인 모델은 식 (4)와 같이 된다.

$$u(i,j,t+\Delta t)-2u(i,j,t)+u(i,j,t-\Delta t)=m\left\{\begin{bmatrix}u(i+1,j,t)+u(i-1,j,t)\\+u(i,j+1,t)+u(i,j-1,t)\end{bmatrix}-N_d u(i,j,t)\right\}$$
$$m=m_N=m_S=m_W=m_E,\ N_d=4 \quad (4)$$

여기서 m은 파의 전파속도를 나타내는 매개 변수이며, 이 변수를 결정하는 것이 중요하다. 2차원 평면에서의 전파속도를 결정하기 위해 일반적으로 잘 알려진 차분법을 이용한 파동방정식의 수학적표시와 비교하여 그 매개변수를 결정하였다. 2차원에서의 파동방정식은 식 (5)와 같다.

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}=c\left\{\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right\}$$
$$c=\sqrt{K/\rho} \quad (5)$$

여기서 u는 파동진폭, c는 파동속도, K는 매질의 탄성율, ρ는 매질의 밀도이다. 식 (5)를 중앙차분 근사에 의해 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(i,j,t+\Delta t)-2u(i,j,t)+u(i,j,t-\Delta t)=(c_c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2\left\{\begin{bmatrix}u(i+1,j,t)+u(i-1,j,t)\\+u(i,j+1,t)+u(i,j-1,t)\end{bmatrix}-N_d u(i,j,t)\right\} \quad (6)$$

단, $\Delta x=\Delta y$

2차원에서 파동방정식의 차분해에 대한 안정 조건인 Courant의 조건식 (7)을 이용하여 파의 임계 전파속도, c_c를 식 (8)과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta t\le\frac{\Delta x}{c_c},\quad c_c\le c \quad (7)$$

$$c_c=\frac{\Delta L}{2\ \text{Time Steps}}=\frac{\sqrt{2}\Delta x}{2\Delta t}=\frac{\Delta x}{\sqrt{2}\Delta t}=\frac{c}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

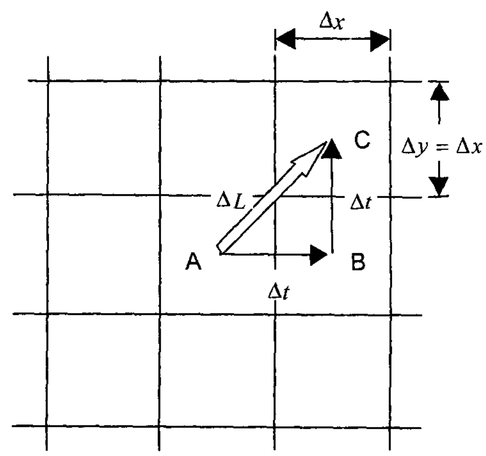


Fig. 3 Wave propagation in two-dimensional CA

Fig. 3은 사각형으로 이산화된 각 셀을 통하여 파가 2차원 공간상으로 전파하는 모습을 나타낸다. 여기서 주목해야 할 평면파의 전파규칙으로는 셀 A의 상태량이 셀 C까지 전파하는 데에는 셀 A에서 셀 B로, 셀 B에서 셀 C로 전달되는 것이다.그러나 파가 셀 A에서 셀 C로 도약(jump)는 것은 불가능하다. 식 (6)~(8)에 의해 2차원에서의 파의 전파속도 m은 식 (9)와 같이 구하여진다.

$$m=(c_c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2=(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta x})^2=\frac{1}{2} \quad (9)$$

4. 파동전파의 시뮬레이션

한 개의 점 음원이 존재하는 2차원 자유공간에 평면파의 전파를 CA법으로 계산한 결과를 Fig. 4에 나타내었다. 파가 동심원으로 전파되어 가는 모습을 알 수 있다. 이 시뮬레이션에서 음원의 주파수는 150 Hz, 분할공간은 100×100의 셀, 시간간격은 1셀폭/c로 하였다. 이 시뮬레이션의 정도를 확인하기 위해 차분법으로 계산한 경우와 비교한 것이 Fig. 5이다. 두 방법의 결과는 잘 일치하는 것을 알 수 있다. Fig. 6은 진폭과 파장이 동일한 2개의 음원 S_1, S_2에서 같은 위상으로 음파를 송출할 때 파가 진행하는 모습을 CA법으로 계산한 결과를 나타낸다. 파의 특징인 간섭과 회절현상이 CA법에 의해 잘 나타남을 이 그림에서 확인할 수가 있다.

Fig. 7은 1차원 파의 간섭현상과 회절현상을 CA법에 의해 시뮬레이션한 결과이다. 1차원이 대한 상태량의 변화량 Δu는 2차원 공간에서의 평면파의 전파속도 m_N와 m_S는 영이기 때문에, 식 (1)로부터 식 (10)과 같이 표현될 수 있다.

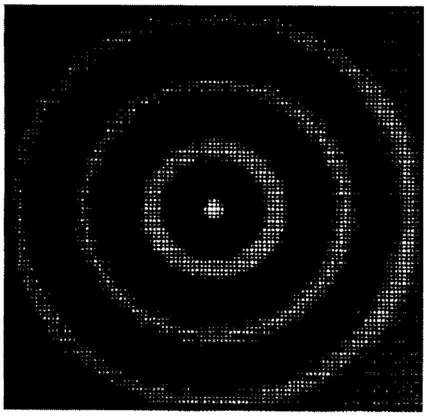


Fig. 4 Plane wave propagation in two-dimensional grid from a wave source

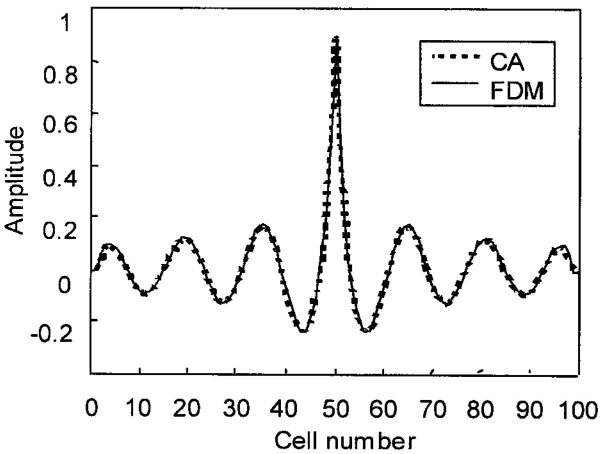


Fig. 5 A cross sectional view of two-dimensional wave propagation calculated by CA and FDM methods

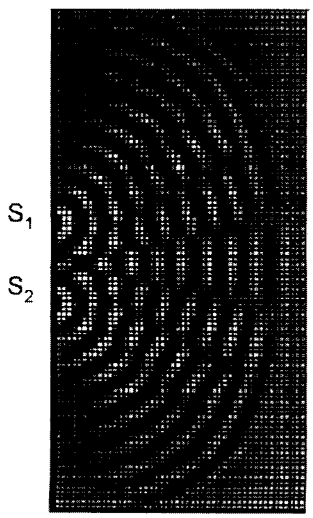


Fig. 6 Wave interference of two-dimensional waves

$$\Delta u(i, t+\Delta t) = \Delta u(i, t) + m_W\{u(i-1, t) - u(i, t)\} + m_E\{u(i+1, t) - u(i, t)\} \qquad (10)$$

식 (10)을 이용한 상태량의 시간변화에 따른 갱신은 식 (11)에서 구할 수 있다.

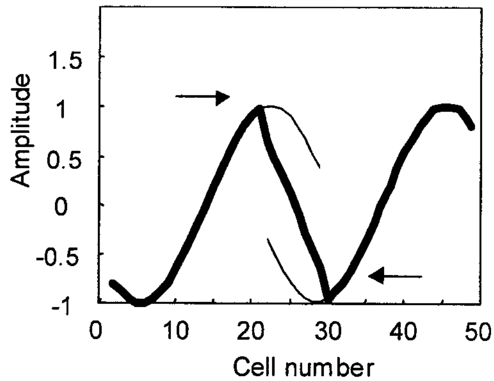
$$u(i, t+\Delta t) = u(i, t) + \Delta u(i, t+\Delta t) \qquad (11)$$

이들 식 (10)과 (11)을 이용하여, 평면파의 수학적 모델을 구하면 다음과 같이 구할 수 있다.

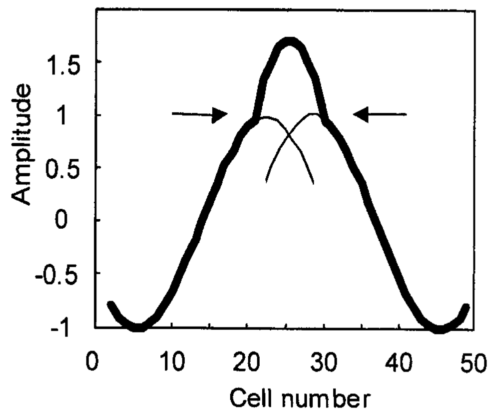
$$u(i, t+\Delta t) - 2u(i, t) + u(i, t-\Delta t) = m\{[u(i+1, t) + u(i-1, t)] - N_d u(i, t)\} \qquad (12)$$

단, $N_d = 2$이고 파의 전파속도는 $\Delta x / \Delta t = 1$이므로 $m = m_W = m_E = 1$로 된다.

Fig. 7의 (a)는 파의 위상이 반대일 때 서로 상쇄되는 모습을 보여주며, (b)는 파의 위상이 동일할 때 서로 합성되어지는 중첩현상을 잘 나타내고 있다. Fig. 8은 2차원 자유공간상에 장애물이 있을 때 파가 진행하는 모습을 CA 법으로 계산한 결과를 보여주며, 장애물의 영향으로 회절현상이 장애물의 배후에 나타나고 있음을 이 결과에서 잘 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 7 Wave interference principles

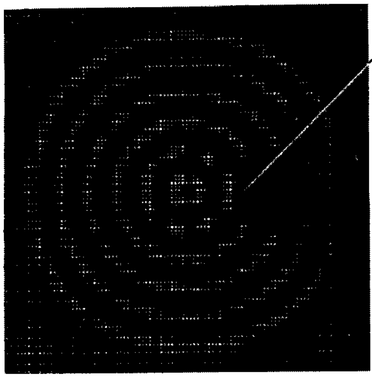


Fig. 8 Wave diffraction patterns from a barrier

차분법을 이용하여 이와 같은 경우를 계산하기 위해서는 복잡한 경계조건을 고려해야 한다. 그러나 CA법에서는 자유공간의 셀과 장애물이 있는 공간의 셀에 대한 상태량의 전달조건만 고려하면 쉽게 계산될 수 있는 장점이 있다.

5. 결　론

복합된 물리적인 현상이나, 생물학적, 사회적, 경제학적인 현상 등을 구성하는 요소사이의 상호작용에 주목하여 모델링하고자 하는 새로운 방법으로서 CA법이 최근 주목을 받고 있다.

본 연구에서는 CA법을 물리적 현상인 파동전파 해석에 적용하였고, 2차원 자유공간에서의 파동전파해석으로부터 얻어진 결론은 다음과 같다.

(1) CA법을 이용하여 파동방정식을 시뮬레이션한 결과는 차분법으로 해석한 결과와 잘 일치하고, 파의 전파특성인 간섭과 회절현상을 정확히 나타내고 있는 것을 확인하였다.

(2) 복잡한 공간형상을 가진 경우에 대한 파동전파해석에 차분법 보다 CA법이 유용하게 사용될 수 있음을 보였다.

참 고 문 헌

(1) Jackson, E. A., 1991, "Perspectives of Nonlinear Dynamics," Cambridge University Press, Vol. 1, Vol. 2.

(2) Levy, S., 1992, "Artificial Life: The Quest for a New Creation", Pantheon Books.

(3) Waldrop, M. M., 1992, "Complexity: The Emerging Science at the Edge of order and Chaos", Simon & Schuster.

(4) 森下 信, 山本直史, 中野孝昭, 1998, セルラオートマトン法による交通流解析, 第47回応用力学連合講演会講演予稿集, pp. 273~274.

(5) Morishita, S., Yamamoto, N. and Nakano, T., 1998, "Traffic Flow Simulation System by Cellular Automata", Proceedings of 4th International Symposium on Advanced Vehicle Control, pp. 561~565.

(6) 中野孝昭, 宮本俊輔, 森下 信, 佐藤勇一, 1998, セルラオートマトン法による粒状体の挙動解析, 日本機械学会論文集(C), Vol. 64, No.617, pp. 134~140.

(7) Chopard, B. and Droz, M., 1998, "Cellular Automata Modeling of Physical Systems", Cambridge University Press.

(8) Wolfram, S., 1994, "Cellular Automata and Complexity", Addison-Wesley Publishing Company.

(9) Krutar, R. A., Numrich, S. K., Squier, R. K., Pearson, J. and Doolen, G., 1991, "Computation of Acoustic Field Behavior Using a Lattice Gas Model", in IEEE Ocean Technologies and Opportunities in the pacific for the 90's, pp. 446~452.

(10) Chen, H., Chen, S., Doolen, G. and Lee Y. C., 1988, "Simple Lattice Gas Models for Waves", Complex Systems, Vol. 2, pp. 259~267.