시간 지연을 갖는 불확실 대형 연결 시스템의 분산 H_∞ 제어

Decentralized H_∞ Control with Performance for Uncertain Linear Interconnected Systems with Time Delay

심 덕 선, 김 연 재
(Duk-Sun Shim and Younjae Kim)

Abstract : This paper considers the decentralized control problem of linear time-invariant interconnected systems with delays. A decentralized output-feedback controller to obtain both stability and performance of the interconnected system is designed using the standard H_∞ control theory. This paper provides sufficient conditions for such a controller to exist and provides an output feedback controller.

Keywords : decentralized control, uncertainty, time delay, H_∞ control

I. 서론

대형 연결 시스템의 분산 제어는 최근 20여 년 동안 중요한 연구과제가 되어 왔다. 제어대상에 있어서 대형 시스템은 많은 부분을 차지하며 전력 시스템, 교통 시스템, 통신 시스템 등 많은 예를 볼 수 있다.

모든 시스템에는 신호의 전달에 있어 시간지연이 발생하는데 이는 시스템을 불안정하게 만드는 요인이 된다. 최근에는 시간지연을 포함한 시스템이 주요 연구과제 중 하나가 되었다[1]. 특히 전력 시스템과 같은 대형 시스템은 지리적으로 멀리 떨어진 많은 부시스템들로 이루어져 있으며 부시스템들 사이의 시간지연은 피할 수 없다.

그러나 시간지연을 포함한 대형 연결 시스템에 대한 연구는 많지 않다[2-7]. [6]에서는 시간지연을 포함한 대형 선형 연결 시스템의 H_∞ 성능문제의 분산 출력 궤환 제어기가 대수 리카티 방정(ARE)을 이용하여 설계되었다. 한편 [7]과 [8]에서는 시간지연을 포함하지 않은 불확실 선형 연결 시스템의 H_∞ 제어 문제를 다루었다.

본 논문에서는 부시스템들의 상호연결에 시간지연이 있는 대형 불확실 선형 연결 시스템을 다룬다. 제어문제는 분산제어기를 사용하여 전체 연결 시스템이 점근 안정하며 외란에서 제어출력사이의 노옴한계(norm bound)를 갖는 성능을 갖도록 하는 것이다. 본 논문에서는 분산 제어기가 존재하기 위한 충분조건을 시간지연에 무관한 식으로 구하였다. 시간지연을 포함하지 않는 변형 시스템을 구하고 이 변형 시스템에 표준 H_∞ 제어 이론을 적용하여 안정성 및 성능을 얻을 수 있는 분산 출력궤환 제어기를 구하였다. 제2절에서 분산 제어 문제를 정의하고 필요한 가정과 보조정리를 설명한다. 제3절에서는 원하는 성능과 점근적 안정성을 얻기 위한 무입력 연결 시스템의 해석결과를 얻고 이를 이용하여 상태궤환 제어기를 설계하며 제4절에서 안정성과 성능을 모두 만족하는 분산 출력 궤환 제어기를 설계한다. 마지막으로 제5절에서 본 논문의 결론을 기술한다.

접수일자 : 1999. 8. 16., 수정완료 : 2000. 2. 9.
심덕선, 김연재 : 중앙대학교 전자전기공학부
※ 본 연구는 한국과학재단 핵심전문연구비(971-0920-133-2) 지원으로 수행하였으며 지원에 감사를 드립니다.

II. 문제정의

상호 연결에 시간지연이 있는 N개의 부시스템으로 이루어진 불확실 선형 연결 시스템은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= (A_i+\Delta A_i(t))x_i(t)+B_{1i}w_i(t)\\&\quad+(B_{2i}+\Delta B_{2i}(t))u_i(t)\\&\quad+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(A_{ij}+\Delta A_{ij}(t))x_j(t-\tau_{ij})\\z_i(t) &= C_{1i}x_i(t)+D_{1i}u_i(t)\\y_i(t) &= (C_{2i}+\Delta C_{2i}(t))x_i(t)+D_{2i}w_i(t)\\&\quad+(D_i+\Delta D_i(t))u_i(t)\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $i=1,2,\cdots,N$이고 $x_i(t)\in R^{n_i}$는 상태변수, $w_i(t)\in R^{m_{1i}}$는 외란, $u_i(t)\in R^{m_{2i}}$는 제어 입력, $z_i(t)\in R^{p_{1i}}$는 제어 출력, $y_i(t)\in R^{p_{2i}}$는 측정 출력이며 행렬 $A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{1i}, D_{2i}, D_i$와 A_{ij}는 알맞은 차원의 실행렬이고 τ_{ij}는 j번째 부시스템에서 i번째 부시스템으로의 시간지연이며 임의의 상수인 실수이다. $\Delta A_i(t), \Delta A_{ij}(t), \Delta B_{2i}(t), \Delta C_{2i}(t), \Delta D_i(t)$는 시변 불확실 변수를 나타내는 실행렬로 다음과 같은 성질을 가진다고 가정하도록 한다.

$$\begin{bmatrix}\Delta A_i(t) & \Delta B_{2i}(t)\\ \Delta C_{2i}(t) & \Delta D_i(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{1i}\\L_{2i}\end{bmatrix}F_i(t)\,[\,E_{1i}\;\;E_{2i}\,],$$

$$\Delta A_{ij}(t)=L_{ij}F_{ij}(t)E_{ij}$$

이 때 $L_{1i}, L_{2i}, E_{1i}, E_{2i}, L_{ij}$와 E_{ij}는 적절한 차원의 상수 실행렬이며 행렬 $F_i(t), F_{ij}(t)$는 Lebesque Measurable한 원소를 갖고 다음 조건을 만족한다.

$$F_i^T(t)F_i(t)\le I,\;\; F_{ij}^T(t)F_{ij}(t)\le I,\quad \forall t,\; \forall i,j\in\{1,2,\cdots,N\}$$

본 논문에서는 시스템 (1)에 대해서 분산 H_∞ 성능 문제를 다음과 같이 정의한다.

모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 $\gamma_i>0$인 벡터 $\gamma=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N]^T$가 주어졌을 때 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하고 초기치가 0인 조건에서 0이 아닌 임의의 외란 $w_i\in L_2[0,\infty)$에 대하여 $\sum_{i=1}^N\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^N\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$이 되게 하는 분산 제어 법칙 $u_i=G_{ci}(s)y_i$, $(i=1,2,\cdots,N)$을 설계하라.

분산 H_∞ 성능문제의 제어기 설계와 관련하여 H_∞ Disturbance Attenuation γ를 다음과 같이 정의한다.

정의 1 [9] : 다음과 같은 시스템 Σ를 고려하자. $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bw(t)$, $z(t)=Cx(t)$. A, B와 C는 알맞은 차원을 갖는 실행렬이다. 주어진 상수 $\gamma>0$에 대하여 행렬 A가 안정하고 $\|C(sI-A)^{-1}B\|_\infty<\gamma$이면 시스템 Σ는 H_∞ Disturbance Attenuation γ를 갖는다 라고 한다.

(1)에 대한 분산제어문제에 대하여 식을 간단히 하기 위하여 다음과 같은 가정을 하도록 한다.

가정 1 : (1)의 분산 시스템은 다음과 같은 가정을 만족한다.

i) $D_{1i}^T[\ C_{1i}\ \ D_{1i}\ ]=[\ 0\ \ I\ ]$.

ii) $\begin{bmatrix} B_{1i} \\ D_{2i}\end{bmatrix}D_{2i}^T=\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}$.

다음의 보조정리는 H_∞ Disturbance Attenuation γ와 동등한 조건을 ARI(Algebraic Riccati Inequaltiy)의 형태로 표현하고 있다.

보조정리 1 [10] : 점근적으로 안정한 선형 시불변 시스템 $x(t)=Ax(t)+Bw(t)$, $z(t)=Cx(t)$ 에 대하여 다음은 모두 동일하다.

i) $\|C(sI-A)^{-1}B\|_\infty<\gamma$.

ii) 다음 식을 만족시키는 행렬 $P=P^T>0$가 존재한다.

$$A^TP+PA+\frac{1}{\gamma^2}PBB^TP+C^TC<0$$

iii) 다음 식을 만족시키는 행렬 $P=P^T>0$가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A^TP+PA+C^TC & \frac{1}{\gamma}PB \\ \frac{1}{\gamma}B^TP & -I\end{bmatrix}<0$$

다음은 제어기 설계과정에서 사용될 행렬 부등식의 관계식이다.

보조정리 2 [7] : D,E,K와 G는 적당한 차원의 실행렬이며 $FF^T\le I$을 만족한다고 하면 다음 두 가지 행렬 부등식이 성립한다.

i) 임의의 상수 $\varepsilon>0$에 대하여

$$DFE+E^TF^TD^T\le\varepsilon DD^T+\varepsilon^{-1}E^TE.$$

ii) $\varepsilon E^TE<I$이 성립하는 임의의 상수 $\varepsilon>0$에 대하여

$$\begin{aligned}&(G+DFE)(G+DFE)^T\\ &\qquad\le G(I-\varepsilon E^TE)^{-1}G^T+\varepsilon^{-1}DD^T\end{aligned}$$

III. 해석 결과 및 분산 상태궤환 제어기

이번 절에서는 무입력 연결 시스템의 안정성 및 성능 해석 결과를 유도하고 이를 이용하여 상태변수 궤환 제어기를 설계하도록 한다. 시스템 (1)에서 무입력 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)&=(A_i+L_{1i}F_iE_{1i})x_i(t)+B_{1i}w_i(t)\\ &\quad+\sum_{j=1,j\ne i}^N(A_{ij}+L_{ij}F_{ij}E_{ij})x_j(t-\tau_{ij}) \qquad (2)\\ z_i(t)&=C_{1i}x_i(t)\end{aligned}$$

정리 1 : 무입력 연결 시스템 (2)에서 모든 $i=1,2,\cdots,N$에 대하여 행렬 A_i가 안정하고 아래의 조건 i)과 ii)를 만족하면 무입력 연결 시스템 (2)는 점근적으로 안정하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^N\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^N\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다. 여기서 $I_i\in R^{n_i\times n_i}$이고 N은 부 시스템의 수이다.

i) $\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij}<I$.

ii) 다음 ARI를 만족하는 대칭행렬 $P_i>0$와 매개변수 ε_i와 λ_{ij}가 존재한다.

$$\begin{aligned}&A_i^TP_i+P_iA_i+P_i\Big(\sum_{j=1,j\ne i}^N\{A_{ij}(I-\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij})^{-1}A_{ij}^T\\ &\quad+\frac{1}{\lambda_{ij}^2}L_{ij}L_{ij}^T\}+\frac{1}{\varepsilon_i^2}L_{1i}^TL_{1i}+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^T\Big)P_i \qquad (3)\\ &\quad+\varepsilon_i^2E_{1i}^TE_{1i}+(N-1)I_i+C_{1i}^TC_{1i}<0\end{aligned}$$

증명 : 정리 1의 i)를 만족하면 보조정리 2에 의하여 ARI (3)의 좌변은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}_i^TP_i+P_i\widetilde{A}_i+P_i\Big(\sum_{j=1,j\ne i}^N\widetilde{A}_{ij}\ \widetilde{A}_{ij}^T+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^T\Big)P_i\\ &+(N-1)I_i+C_{1i}^TC_{1i}\ \le\ A_i^TP_i+P_iA_i\\ &\quad+P_i\Big(\sum_{j=1,j\ne i}^N\{A_{ij}(I-\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij})^{-1}A_{ij}^T\\ &\quad+\frac{1}{\lambda_{ij}^2}L_{ij}L_{ij}^T\}-\frac{1}{\varepsilon_i^2}L_{1i}^TL_{1i}+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^T\Big)P_i\\ &\quad+\varepsilon_i^2E_{1i}^TE_{1i}+(N-1)I_i+C_{1i}^TC_{1i}\end{aligned}$$

여기서 $\widetilde{A}_i=A_i+L_{1i}F_iE_{1i}$이고 $\widetilde{A}_{ij}=A_{ij}+L_{ij}F_{ij}E_{ij}$이다. 그러므로 ARI (3)을 만족하는 대칭행렬 $P_i>0$와 매개변수 ε_i와 λ_{ij}가 존재하면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}_i^TP_i+P_i\widetilde{A}_i+P_i\Big(\sum_{j=1,j\ne i}^N\widetilde{A}_{ij}\ \widetilde{A}_{ij}^T+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^T\Big)P_i \qquad (4)\\ &\quad+(N-1)I_i+C_{1i}^TC_{1i}<0\end{aligned}$$

리아프노프 함수 $V(x,t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}V(x,t)&=\sum_{i=1}^NV_i(x,t)=\sum_{i=1}^N\{x_i^T(t)P_ix_i(t)\\ &\quad+\sum_{j=1,j\ne i}^N\int_{t-\tau_{ij}}^tx_j^T(\sigma)x_j(\sigma)d\sigma\}.\end{aligned}$$

시스템 (2)가 점근 안정함을 보이기 위해서 $w_i(t)\equiv 0$으로 놓고 $\frac{d}{dt}V(x,t)$를 계산해 본다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x,t) &= \sum_{i=1}^{T} x_i^T(t)\left(\widetilde{A}_i^T P_i + P_i\widetilde{A}_i\right)x_i(t)\\ &+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} x_j^T(t-\tau_{ij})\widetilde{A}_{ij}^T P_i x_i(t)\\ &+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} x_i^T(t)P_i\widetilde{A}_{ij}x_j(t-\tau_{ij})\\ &+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} x_j^T(t)x_j(t)\\ &-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} x_j^T(t-\tau_{ij})x_j(t-\tau_{ij})\end{aligned}$$

ARI (4)를 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x,t) < -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}&\left(x_j(t-\tau_{ij})-\widetilde{A}_{ij}^T P_i x_i(t)\right)^T\\ &\left(x_j(t-\tau_{ij})-\widetilde{A}_{ij}^T P_i x_i(t)\right)\\ -\sum_{i=1}^{N} x_i^T(t)&\left\{\frac{1}{\gamma_i^2}P_iB_{1i}B_{1i}^TP_i + C_{1i}^TC_{1i}\right\}x_i(t)\end{aligned}$$

가 된다. 그러므로 모든 i에 대해서 $x_i(k)\equiv 0$이 아닌 경우에는 $\frac{d}{dt}V(x,t)<0$가 성립한다. 따라서 잘 알려진 리아프노프의 정리에 의하여 무입력 연결 시스템 (2)는 점근적으로 안정하다.

다음의 성능지수 J를 이용하여 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$를 증명하도록 한다.

$$J=\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty\{z_i^T(t)z_i(t)-\gamma_i^2 w_i^T(t)w_i(t)\}\,dt$$

$J<0$을 보임으로써 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$임을 보여줄 수 있다. 초기 상태변수가 0일 때 위 식은 다음 식과 같다.

$$J=\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty\left\{z_i^T(t)z_i(t)-\gamma_i^2 w_i^T(t)w_i(t)+\frac{d}{dt}V_i(x,t)\right\}dt.$$

ARI (4)를 이용하여 정리하면 아래의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}J < \sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty\Big\{-&\left(\gamma_i w_i(t)-\frac{1}{\gamma_i}B_{1i}^TP_ix_i(t)\right)^T\\ &\left(\gamma_i w_i(t)-\frac{1}{\gamma_i}B_{1i}^TP_ix_i(t)\right)\\ -\sum_{j=1,j\neq i}^{N}&\left(x_j(t-\tau_{ij})-\widetilde{A}_{ij}^T P_i x_i(t)\right)^T\\ &\left(x_j(t-\tau_{ij})-\widetilde{A}_{ij}^T P_i x_i(t)\right)\Big\}dt\end{aligned}$$

따라서 $J<0$이다. 그러므로 무입력 연결 시스템 (2)는 점근적으로 안정하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$의 성능을 만족하게 된다. ■

정리 1은 무입력 연결 시스템 (2)가 원하는 성능을 가지면서 안정하기 위한 충분조건을 제시하여 준다. 또한 ARI (3)에는 지연시간 τ_{ij}가 포함되어 있지 않다.

다음의 변형 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i(t) &= A_i\xi_i(t)+\left[\frac{1}{\gamma_i}B_{1i}\ \ \overline{B}_i\right]\eta_i(t)\\ \widetilde{z}_i(t) &= \begin{bmatrix} C_{1i}\\ \varepsilon_iE_{1i}\\ \sqrt{N-1}\,I\end{bmatrix}\xi_i(t)\end{aligned}\tag{5}$$

여기서

$$\begin{aligned}\overline{B}_i\overline{B}_i^T=\frac{1}{\varepsilon_i^2}L_{1i}^TL_{1i}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\Big\{&A_{ij}(I-\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij})^{-1}A_{ij}^T\\ &+\frac{1}{\lambda_{ij}^2}L_{ij}L_{ij}^T\Big\}\end{aligned}$$

이고 $\xi_i, \eta_i, \widetilde{z}_i$는 각각 변형시스템의 상태변수, 외란, 출력변수이다. 변형시스템은 연결시스템의 ARI (3)과 같은 ARI 조건을 갖는 시스템으로서, 연결 시스템을 비연결 시스템으로 바꾸어 주는 시스템이다.

정리 2 : 무입력 연결 시스템 (2)에서 아래 두 조건이 만족하면 연결 시스템 (2)는 점근적으로 안정하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다.

i) $\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij} < I.$

ii) 변형 시스템 (5)가 Unitary H_∞ Disturbance attenuation을 갖는다.

증명 : 시스템 (5)가 Unitary H_∞ Disturbance Attenuation를 갖는 것은 보조정리 1의 i)⇔ii)에 의해서 ARI조건으로 바뀌고 또 보조정리 2에 의해서 (4)를 얻는다. 그 후 정리 1을 이용하면 정리 2가 증명된다. ■

이번에는 연결 시스템 (1)의 분산 H_∞ 성능문제를 풀기 위한 상태궤환 분산 제어기 설계에 관하여 생각해보기로 하자.

정리 3 : 연결 시스템 (1)에서 $y_i(t)=x_i(t)$라 가정하자. 모든 $i=1,2,\cdots,N$에 대하여 행렬 A_i가 안정하고 아래의 조건 i)와 ii)를 만족하면 연결 시스템 (1)은 $K_i=-(I+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_i)^{-1}(B_{2i}^TP_i+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_{1i})$인 상태궤환 제어기 $u_i(t)=K_ix_i(t)$에 의하여 원하는 성능 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족하며 점근적으로 안정하게 된다. 여기서 $I_i\in R^{n_i\times n_i}$이고 N은 부 시스템의 수이다.

i) $\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij} < I.$

ii) 다음 ARI를 만족하는 대칭행렬 $P_i>0$와 매개변수 ε_i와 λ_{ij}가 존재한다.

$$\begin{aligned}&(A_i-\varepsilon_i^2B_{2i}(I+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_{2i})^{-1}E_{2i}^TE_{1i})^TP_i\\ &+P_i(A_i-\varepsilon_i^2B_{2i}(I+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_{2i})^{-1}E_{2i}^TE_{1i})\\ &+P_i\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\Big\{A_{ij}(I-\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij})^{-1}A_{ij}^T+\frac{1}{\lambda_{ij}^2}L_{ij}L_{ij}^T\Big\}\\ &-B_{2i}(I+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_{2i})^{-1}B_{2i}^T+\frac{1}{\varepsilon_i^2}L_{1i}^TL_{1i}+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^T\Big)P_i\\ &+(N-1)I_i+C_{1i}^TC_{1i}+\varepsilon_i^2E_{1i}^T(I-\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij})^{-1}E_{1i} < 0\end{aligned}\tag{6}$$

증명 : 상태궤환 제어기가 $u_i(t)=K_ix_i(t)$인 연결 시스템 (1)의 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= \{A_i+B_{2i}K_i+L_{1i}F_i(E_{1i}+E_{1i}K_i)\}x_i(t)\\ &+B_{1i}w_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(A_{ij}+L_{ij}F_{ij}E_{ij})x_j(t-\tau_{ij})\\ z_i(t) &= (C_{1i}+D_{1i}F_i)x_i(t)\end{aligned}$$

위 시스템은 무입력 연결 시스템 (2)와 같은 형태를 하고 있다. 정리 1에서 위 시스템이 점근적으로 안정하고 원

하는 성능을 얻기 위한 충분조건을 구하면 $A_i+B_{2i}K_i$가 안정하고 $\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij}<I$이며 다음 ARI를 만족하는 대칭행렬 $P_i>0$와 매개변수 ε_i와 λ_{ij}가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned}&(A_i+B_{2i}K_i)^TP_i+P_i(A_i+B_{2i}K_i)\\&+P_i\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\Big\{A_{ij}(I-\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij})^{-1}A_{ij}^T+\frac{1}{\lambda_{ij}^2}L_{ij}L_{ij}^T\Big\}\\&+\frac{1}{\varepsilon_i^2}L_{1i}^TL_{1i}+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^T\Big)P_i\\&+\varepsilon_i^2(E_{1i}+E_{1i}K_i)^T(E_{1i}+E_{1i}K_i)\\&+(N-1)I_i+(C_{1i}+D_{1i}K_i)^T(C_{1i}+D_{1i}K_i)<0\end{aligned}\tag{7}$$

그런데 $K_i=-(I+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_i)^{-1}(B_{2i}^TP_i+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_{1i})$이면 (6)과 (7)은 같은 식이다.

$A_i+B_{2i}K_i=A_i-B_{2i}(I+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_i)^{-1}(B_{2i}^TP_i+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_{1i})$ 이므로 (6)은 다음 형태가 된다.

$$(A_i+B_{2i}K_i)^TP_i+P_i(A_i+B_{2i}K_i)+R_i<0.$$

여기서 $P_i>0$이고 $R_i>0$이므로 $A_i+B_{2i}K_i$는 안정한 행렬이다. 그러므로 연결 시스템 (1)은 $K_i=-(I+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_i)^{-1}(B_{2i}^TP_i+\varepsilon_i^2E_{2i}^TE_{1i})$인 상태궤환 제어기 $u_i(t)=K_ix_i(t)$에 의하여 원하는 성능을 만족하면서 점근적으로 안정하게 된다. ■

정리 3은 H_∞ 제어 이론을 적용하여 변형 시스템으로 증명될 수 있다. 다음의 변형 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i(t)&=A_i\xi_i(t)+\Big[\frac{1}{\gamma_i}B_{1i}\ \ \overline{B_i}\Big]\eta_i(t)+B_{2i}u_i(t)\\ \overline{z_i}(t)&=\begin{bmatrix}C_{1i}\\ \varepsilon_iE_{1i}\\ \sqrt{N-1}I\end{bmatrix}\xi_i(t)+\begin{bmatrix}D_{1i}\\ \varepsilon_iE_{2i}\\ 0\end{bmatrix}u_i(t)\end{aligned}\tag{8}$$

여기서

$$\overline{B_i}\,\overline{B_i}^T=\frac{1}{\varepsilon_i^2}L_{1i}^TL_{1i}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\{A_{ij}(I-\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij})^{-1}A_{ij}^T+\frac{1}{\lambda_{ij}^2}L_{ij}L_{ij}^T\}$$

이다. 상태변수를 알 수 있으면 제어기는 $u_i(t)=K_i\xi_i(t)$의 모양을 갖게 되어 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i(t)&=(A_i+B_{2i}K_i)\xi_i(t)+\Big[\frac{1}{\gamma_i}B_{1i}\ \ \overline{B_i}\Big]\eta_i(t)\\ \overline{z_i}(t)&=\begin{bmatrix}C_{1i}+D_{1i}K_i\\ \varepsilon_i(E_{1i}+E_{2i}K_i)\\ \sqrt{N-1}I\end{bmatrix}\xi_i(t)\end{aligned}\tag{9}$$

시스템 (9)는 (5)와 같은 모양이며 시스템 (9)가 Unitary H_∞ Disturbance Attenuation을 갖기 위한 조건식은 (6)이다. 그러므로 시스템 (1)에 대한 상태궤환 분산 제어기 설계 문제는 변형 시스템 (9)에 대한 표준 H_∞ 제어 문제가 된다.

IV. 분산 출력궤환 제어기

이 절에서는 연결 시스템의 분산 출력궤환 제어기를 설계하도록 한다. 출력궤환의 경우에는 안정성 및 성능에 관하여 새로운 분석이 필요하다. 예를 들어, 분산 출력궤환 제어기를 사용하면 부시스템의 원래 상태변수는 다른 부시스템에 영향을 주겠지만 제어기의 상태변수는 영향을 주지 않는다. 따라서 부시스템의 일부 상태변수만이 다른 부시스템에 영향을 미치는 부분 연결 시스템에 관하여 생각할 필요가 있다. 다른 부시스템에 영향을 미치는 상태변수를 능동 상태변수라고 하고 그렇지 않은 상태변수를 수동 상태변수라고 하자. 그리고 편의를 위해 i번째 부시스템의 상태변수 $x_i(t)\in R^{n_i}$를 능동 상태변수 $x_{i1}(t)\in R^{n_{i1}}$와 수동 상태변수 $x_{i2}(t)\in R^{n_{i2}}$로 나누고 $x_i(t)=[x_{i1}^T(t)\ x_{i2}^T(t)]^T$와 $n_{i1}+n_{i2}=n_i$의 성질을 만족한다고 하자.

다음의 무입력 부분 연결 시스템을 생각해 보자.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)&=(A_i+L_{1i}F_iE_{1i})x_i(t)+B_{1i}w_i(t)\\&\quad+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\widehat{A}_{ij}+\widehat{L}_{ij}\widehat{F}_{ij}\widehat{E}_{ij})x_{j1}(t-\tau_{ij})\\ z_i(t)&=C_{1i}x_i(t)\end{aligned}\tag{10}$$

여기서

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\widehat{A}_{ij}+\widehat{L}_{ij}\widehat{F}_{ij}\widehat{E}_{ij})x_{j1}(t-\tau_{ij})\\&=\sum_{j=1,j\neq i}^{N}[\widehat{A}_{ij}+\widehat{L}_{ij}\widehat{F}_{ij}\widehat{E}_{ij}\ \ 0]x_j(t-\tau_{ij})\end{aligned}$$

이다.

다음 정리는 무입력 부분 연결 시스템 (10)의 분석결과이다.

정리 4 : 무입력 부분 연결 시스템 (10)에서 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 행렬 A_i가 안정하고 아래의 조건 i)과 ii)를 만족하면 연결 시스템 (10)은 점근적으로 안정하고 초기상태가 0일 때 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2<\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다. 이 때 $I_{i1}\in R^{i1\times i1}$이며 $0_{i2}\in R^{i2\times i2}$이고 N은 부시스템의 개수이다.

i) $\lambda_{ij}^2E_{ij}^TE_{ij}<I$.

ii) 다음 ARI를 만족하는 대칭행렬 $P_i>0$와 매개변수 ε_i와 λ_{ij}가 존재한다.

$$\begin{aligned}&A_i^TP_i+P_iA_i+P_i\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\{\widehat{A}_{ij}(I-\lambda_{ij}^2\widehat{E}_{ij}^T\widehat{E}_{ij})^{-1}A_{ij}^T\\&+\frac{1}{\lambda_{ij}^2}\widehat{L}_{ij}\widehat{L}_{ij}^T\}+\frac{1}{\varepsilon_i^2}L_{1i}^TL_{1i}+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^T\Big)P_i\\&+\varepsilon_i^2E_{1i}^TE_{1i}+(N-1)\begin{bmatrix}I_{i1}&0\\0&0_{i2}\end{bmatrix}+C_{1i}^TC_{1i}<0\end{aligned}\tag{11}$$

증명 : 정리 1의 증명과 거의 같으며 정리1에서 A_{ij}대신 $[\widehat{A}_{ij}\ 0]$를 사용하면 된다. ■

마지막으로 분산 출력 제어에 관한 정리에 앞서 다음 변형 시스템을 도입한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)&=A_ix_i(t)+\Big[\frac{1}{\gamma_i}B_{1i}\ \ \frac{1}{\varepsilon_i}L_{1i}\ \ \overline{B_i}\Big]\widetilde{w_i}(t)+B_{2i}u_i(t)\\ \widetilde{z_i}(t)&=\begin{bmatrix}C_{1i}\\ \varepsilon_iE_{1i}\\ \sqrt{N-1}I\end{bmatrix}x_i(t)+\begin{bmatrix}D_{1i}\\ \varepsilon_iE_{2i}\\ 0\end{bmatrix}u_i(t)\\ y_i(t)&=C_{2i}x_i(t)+\Big[\frac{1}{\gamma_i}D_{2i}\ \ \frac{1}{\varepsilon_i}L_{2i}\ \ 0\Big]\widetilde{w_i}(t)+D_{1i}u_i(t)\end{aligned}\tag{12}$$

$\overline{B_i}\,\overline{B_i}^T = \sum_{j=1, j\neq i}^{N}\left\{A_{ij}(I-\lambda_{ij}^2 E_{ij}^T E_{ij})^{-1}A_{ij}^T + \frac{1}{\lambda_{ij}^2} L_{ij}L_{ij}^T\right\}$이고 ε_i와 λ_{ij}는 매개변수이며 $\lambda_{ij}^2 E_{ij}^T E_{ij} < I$의 성질을 만족하여야 한다.

이제 다음과 같은 연결 시스템의 분산 출력 궤환 제어 문제를 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= (A_i + L_{1i}F_iE_{1i})x_i(t) + B_{1i}w_i(t) \\ &\quad + (B_{2i} + L_{1i}F_iE_{2i})u_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1, j\neq i}^{N}(A_{ij} + L_{ij}F_{ij}E_{ij})x_j(t-\tau_{ij}) \\ z_i(t) &= C_{1i}x_i(t) + D_{1i}u_i(t) \\ y_i(t) &= (C_{2i} + L_{2i}F_iE_{1i})x_i(t) + D_{2i}w_i(t) \\ &\quad + (D_i + L_{2i}F_iE_{2i})u_i(t) \end{aligned} \tag{13}$$

정리 5 : 변형 시스템 (12)가 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 $u_i = G_{ci}(s)y_i$인 분산 출력 궤환 제어기를 사용하여 피드백시스템이 Unitary H_∞ Disturbance Attenuation을 가지면 연결 시스템 (13)은 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 분산 출력 궤환 제어기 $u_i = G_{ci}(s)y_i$로 점근적으로 안정화 가능하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$을 만족한다.

증명 : 분산 출력 제어기 G_{ci}를 다음과 같이 상태식으로 표현하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ci}(t) &= A_{ci}x_{ci}(t) + B_{ci}y_i(t) \\ u_i(t) &= K_{ci}x_{ci}(t) \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 $x_{ci}(t) \in R^{n_{ci}}$이고 행렬 A_{ci}, B_{ci}와 K_{ci}는 알맞은 차원의 실행렬이다. 이 때 제어기 (14)와 연결 시스템 (13)의 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= (\overline{A}_i + + \overline{L_{1i}}F_i\overline{E_{1i}})\xi_i(t) + \overline{B}_{1i}w_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1, j\neq i}^{N}(\overline{A}_{ij} + \overline{L_{ij}}F_{ij}\overline{E_{ij}})\xi_j(t-\tau_{ij}) \\ z_i(t) &= \overline{C}_{1i}\xi_i(t) \end{aligned} \tag{15}$$

이고

$$\xi_i(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_{ci}(t) \end{bmatrix},\quad \overline{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_{2i}K_{ci} \\ B_{ci}C_{2i} & A_{ci} + B_{ci}D_iK_{ci} \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{B}_{1i} = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ B_{ci}D_{2i} \end{bmatrix},\ \overline{L_i} = \begin{bmatrix} L_{1i} \\ B_{ci}L_{2i} \end{bmatrix},$$

$$\overline{L_{ij}} = \begin{bmatrix} L_{ij} \\ 0 \end{bmatrix},\ \overline{E_i} = [\,E_{1i}\ E_{2i}K_{ci}\,],$$

$$\overline{E_{ij}} = [\,E_{ij}\ 0\,],\ \overline{C}_{1i} = [\,C_{1i}\ D_{1i}K_{ci}\,].$$

부분 연결 시스템 (15)가 점근적으로 안정하고 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$의 성능을 만족하기 위한 문제는 정리 2에서처럼 아래의 변형 시스템의 Unitary H_∞ Disturbance Attenuation 문제로 바뀌어 질 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \overline{A}_ix_i(t) + \left[\frac{1}{\gamma_i}\overline{B_{1i}}\ \ \widehat{B}_i(\varepsilon_i,\lambda_{ij})\right]\widetilde{w}_i(t) \\ \widetilde{z}_i(t) &= \begin{bmatrix} \overline{C_{1i}} \\ \varepsilon_i\overline{E_{1i}} \\ \sqrt{N-1}[\,I_i\ 0\,] \end{bmatrix}x_i(t) \end{aligned} \tag{16}$$

여기서

$$\widehat{B}_i\widehat{B}_i^T = \frac{1}{\varepsilon_i^2}\overline{L_{1i}^T}\,\overline{L_{1i}} + \sum_{j=1, j\neq i}^{N}\left\{\overline{A_{ij}}(I-\lambda_{ij}^2\overline{E_{ij}^T}\,\overline{E_{ij}})^{-1}\overline{A_{ij}^T} + \frac{1}{\lambda_{ij}^2}\overline{L_{ij}}\,\overline{L_{ij}^T}\right\}$$

그런데 시스템 (16)은 제어기 (14)와 시스템 (12)의 폐루프 시스템과 같다. 그러므로 연결 시스템 (13)이 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 분산 출력 궤환 제어기 $u_i = G_{ci}(s)y_i$로 점근적으로 안정화 가능하고 초기상태가 0인 경우에 $\sum_{i=1}^{N}\|z_i\|_2^2 < \sum_{i=1}^{N}\gamma_i^2\|w_i\|_2^2$의 성능을 만족하기 위한 문제는 시스템 (12)에 대해서 모든 $i=1,2,\cdots,N$에서 $u_i = G_{ci}(s)y_i$인 분산 출력 궤환 제어기를 사용하여 피드백 시스템이 Unitary H_∞ Disturbance Attenuation을 가지기 위한 문제가 된다. ■

(12)의 변형시스템은 (17)과 같이 간단한 형태로 표현할 수 있는데

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \tag{17}$$

$D_{11} = 0$인 경우이다. (17)에서 w에서 z로의 전달함수 T_{zw}가 안정하고 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$가 되기 위한 제어기 설계는 [11,12]에 나와있다.

V. 결론

본 논문에서는 대형 시스템이 여러 부시스템들의 연결로 주어지고 상호 연결부분에 시간지연을 갖는 불확실 선형 연결 시스템을 다루었다. 이 때 지연시간은 임의의 상수가 될 수 있으며 부시스템마다 다를 수 있다. 제어 문제는 분산 제어를 사용하여 전체 연결 시스템이 안정하며 시스템의 노움(norm)제한의 성능을 얻는 것이다. 연결 시스템의 점근적 안정성과 성능을 만족하는 분산 출력 궤환 제어기는 표준 H_∞ 제어 이론을 통하여 얻을 수 있었으며 제어기는 지연시간과 무관하게 얻을 수 있었다.

참고문헌

[1] K. Watanabe, E. Nobuyama, and A. Kojima, "Recent advances control of time delay systems : a tutorial review," *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control,* pp. 2083-2089, 1996.

[2] Z.-H. Guan, "Robust stability of impulsive large-scale time-varying interval delay systems," *Proceeding of 13th Triennial World Congress,* San Francisco, USA, pp. 119-124, 1996.

[3] Z. Hu, "Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 39, pp. 180-182, Jan. 1994.

[4] Y. Jing, P. Yuan, and G. M. Dimirovski, "Decentralized control of linear composite systems with delays," *Proceedings of IEEE Conference on*

Decision and Control, (Kobe, Japan), pp. 3447-3452, 1996.

[5] T. N. Lee and U. L. Radovic, "Decentralized stabilization of linear continuous and discrete-time system with delays in interconnections," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 33, pp. 757-760, Aug. 1988.

[6] H. Wu, "Decentralized output feedback control of large scale interconnected time-delay systems," *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control,* pp. 1611-1616, 1996.

[7] Y. Wang, L. Xie, and C. E. de Souza, "Robust decentralized control of interconnected uncertain linear systems," *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control,* pp. 2653-2658, 1996.

[8] Y. Wang, L. Xie, and C. E. de Souza, "Robust control of a class of uncertain nonlinear systems," *System & Control Letters,* vol. 19, pp. 139-149, 1992.

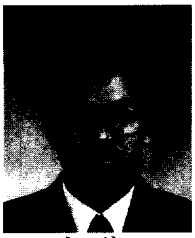
[9] I. R. Petersen, "Disturbance attenuation and H_∞ optimization: A design method based on the algebraic riccati equation," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. AC-32, pp. 427-429, May 1987.

[10] K. Zhou and P. P. Khargonekar, "An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization," *System & Control Letters,* no. 11, pp. 85-91, 1988.

[11] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.

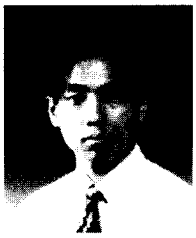
[12] M. G. Satonov, D. J. N. Limebeer, and R. Y. Chiang, "Simplifying the H_∞ theory via loop-shifting, matrix pencil and descriptor concepts," *International Journal of Control,* vol. 50, no. 6, pp. 2467-2488, 1988.

[13] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and K. Zhou, "Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 35, no. 3, pp. 356-361, 1990.



심 덕 선

1961년 10월 18일생. 1984년 서울대학교 제어계측공학과 졸업(공학사), 1986년 동대학원 졸업(공학석사), 1993년 University of Michigan 항공우주공학과 졸업(공학박사), 1994년 1월 ~ 1995년 1월 University of Michigan 전기 및 컴퓨터 공학과 Post-doc, 1995년 3월 ~ 현재 중앙대학교 전자전기공학부 부교수, 관심분야는 견실 제어, 전력 시스템 안정도 제어, 관성항법 시스템, GPS, VLSI 설계 등.



김 연 재

1974년 1월 16일. 1996년 중앙대 제어계측공학과 졸업. 동대학원 석사(1999), 1999년~현재 동대학원 박사과정 재학중. 관심분야는 H_∞ 제어 및 ASIC.