

# 접촉 이론에 의한 스퍼 기어의 전달 하중 해석

## Analysis of Transmission Load for Spur Gear Using Contact Theory

독 고 옥\*      김 형 렬\*  
Wook Dokko, Hyung-Ryul Kim

### ABSTRACT

The transmission load of gear devices is important factor in the design of gear system. To design gear system precisely, an analysis and calculation methods for transmission load of gears are demanded. The purpose of this study is to develop a computer program for analyzing tooth load sharing of a spur gear system by means of the contact theory.

In this paper, load transmission characteristics is identified with elastic contact problem which is assumed to quasi-static equilibrium. The modeling of spur gear tooth is accomplished by application of I-DEAS.

주요기술용어 : Spur Gear(스퍼기어), Elastic Contact Theory(탄성접촉이론), Contact Force(접촉력), Finite Element Method(유한요소법)

### 1. 서 론

동력전달 메카니즘에 있어서 기어는 매우 중요한 역할을 하고 있으며 산업발전과 더불어 동력장치는 더욱 고성능화 되고 있다. 특히 추진동력 전달장치가 제한된 공간에 탑재되는 수중무기의 경우, 경량화, 고부하, 저소음화를 위해 기어장치는 더욱 정밀한 설계가 필요하며 이를 위해 기어 전달하중 및 강도에 대한 정확한 해석이 요구된다. 지금까지 기어 강도 계산을 위해 AGMA식, BS식, DIN식 및 ISO 등을 적용하고 있으며 이들 식은 1893년 Wilfred Lewis가 제안한 굽힘 강도 계산식을 기초로 하여, 기어 치는 외

팔 보로 단순화하고, 주로 한 개의 치에 전달하중이 전부 걸려 있다고 가정하여 강도 계산을 하였다.<sup>(1)-(3)</sup> 기어 구동에서는 전달 하중 전체가 한 기어 치에 집중적으로 작용하는 경우가 있는 반면에, 일부에서는 두 개 이상의 기어 치에 전달 하중이 분배되어 한 기어 치에는 전달 하중의 일부가 작용하게 되는 경우도 있다. 앞서 기술한 바와 같이 Lewis의 계산 방식은 기어의 치형을 유지하지 않고 외팔보로 단순화하여 계산하였다. 본 연구에서는 기어의 치형을 그대로 유지하면서, 전달 하중의 분배가 기어의 물음률에 따라 어떠한 방식으로 이루어지는지를 탄성 접촉 문제<sup>(4)</sup>로 정의하여 보다 정확한 치의 강도 계산을 수행하는 유한요소 수치해석 방법을 제안

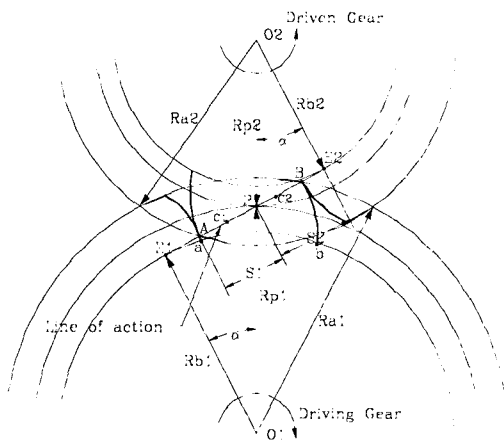
\* 국방과학연구소

하고 스퍼 기어를 모델로 하여 해석을 수행하였다.

## 2. 인볼류트 치형의 기구학적 특성

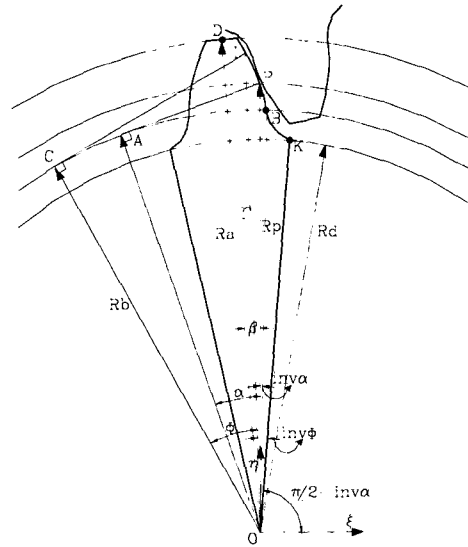
피니언과 기어가 끊임없이 균일한 속도 비로 회전을 전달하려면 한 쌍의 기어 치가 접촉을 끝마칠 때까지 적어도 다음의 한 쌍의 기어 치가 물음 상태에 들어가 있어야 한다.<sup>(5)</sup>

그림 1에 있어서,  $\overline{E_1E_2}$ 는 한 쌍의 기어 치의 접촉점을 연속적으로 이은 선인 접촉 경로(작용선)를 나타내며 인볼류트 치형인 경우 접촉 경로는 직선이 된다. 중동 기어의 이끝원과 작용선의 교점인 점 A에서 접촉이 시작되며, 구동 기어의 이끝원과 작용선의 교점인 B에서 접촉이 종료된다. 그리고 A와 B로부터 각각의 법선 피치의 거리에 있는 점  $C_1$ 과  $C_2$ 를 취할 때,  $AC_2$ 와  $BC_1$ 사이에서는 각각 2개의 이가 맞물리게 되며,  $C_1C_2$ 사이에서는 1개의 이가 맞물리게 된다.



(그림 1) 기어 쌍의 회전에 따른 접촉 경로

그림 2와 같이 인볼류트 치형의 계산은 FORTRAN을 사용하였으며, 계산절차는 다음과 같다.



(그림 2) 인볼류트 치형 곡선

단계 1 : 피니언 상 B점의 위치  $(x_0, y_0)$ 와 기어 상의 B'점의 위치  $(x_0', y_0')$ 를 계산한다.

$$x_0 = R_{b1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{inv } \alpha\right) \quad (1)$$

$$y_0 = R_{b1} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{inv } \alpha\right)$$

$$x_0' = R_{b2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \text{inv } \alpha\right) \quad (2)$$

$$y_0' = (R_{p1} + R_{p2}) + R_{b2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{inv } \alpha\right)$$

단계 2 : 임의의 위치 I 을 계산하기 위하여  $\phi$ 를 계산한다.

$$\cos \phi_k = \frac{R_{bk}}{r_{ki}} \quad (3)$$

$$\phi_k = \cos^{-1}\left(\frac{R_{bk}}{r_{ki}}\right) \text{ on } k=1, 2$$

여기서,  $R_b \leq r_i \leq R_a$ 이며, 기초원 반경에서부터 이끝원 반경까지 얻고자 하는 데이터 수만큼 분할한다.

$$\text{inv } \Phi_k = \tan \Phi_k - \Phi_k \quad \text{on } k = 1, 2 \quad (4)$$

$$x_1 = r_{1i} \cos \left( \left( \frac{\pi}{2} - \text{inv } \alpha \right) + \text{inv } \Phi_1 \right) \quad (5)$$

$$y_1 = r_{1i} \sin \left( \left( \frac{\pi}{2} - \text{inv } \alpha \right) + \text{inv } \Phi_1 \right)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= r_{2i} \cos \left( \left( \frac{3\pi}{2} - \text{inv } \alpha \right) + \text{inv } \Phi_2 \right) \\ y_2 &= (R_{p1} + R_{p2}) \\ &\quad + r_{2i} \sin \left( \left( \frac{3\pi}{2} - \text{inv } \alpha \right) + \text{inv } \Phi_2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

단계 3 : D점의 위치 ( $x_{dk}, y_{dk}$ )를 계산해서  $\overline{OD}$ 를 축으로 복사한다.

$$t_k = 2R_{pk} \beta_k \quad (7)$$

$$\beta_k = \frac{t_k}{2R_{pk}} \quad \text{on } k = 1, 2$$

$$\begin{aligned} x_{dk} &= R_{ak} \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2} + \frac{t_k}{2R_{pk}} \right) \\ y_{dk} &= R_{ak} \sin \left( \frac{(2k-1)\pi}{2} + \frac{t_k}{2R_{pk}} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

on  $k = 1, 2$

단계 4 : 좌표변환을 통한 기어의 회전을 표현한다. 기어 1의 점O가 회전 중심이며, 초기 좌표값 ( $x_k, y_k$ )에서 표현하고자 하는 일정 시간에서의 좌표값 ( $x_k^*, y_k^*$ )을 계산하면 다음식과 같다.

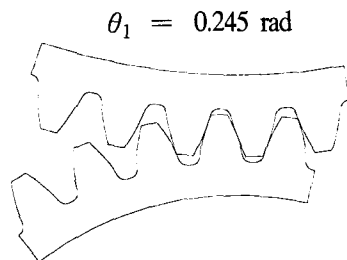
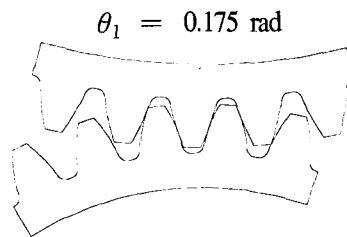
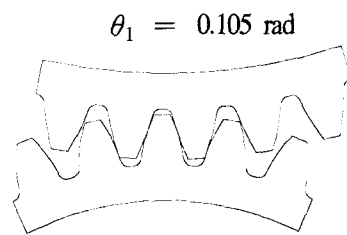
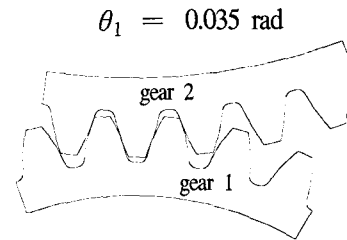
$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k \cos \theta_k - y_k \sin \theta_k \\ y_k^* &= x_k \sin \theta_k + y_k \cos \theta_k \end{aligned} \quad \text{on } k = 1, 2 \quad (9)$$

$$\theta_1 = \frac{2N_1 \pi}{60} (\Delta t) \quad (10)$$

$$\theta_2 = \frac{2N_2 \pi}{60} (\Delta t) = -\frac{P_{r1}}{P_{r2}} \theta_1 \quad (11)$$

여기서,  $N_i$ 는 기어의 회전수(rpm),  $P_{ri}$ 는 피치원의 반경,  $\Delta t$ 는 표현하고자 하는 시간 step이다. 그림 3

은 맞물려 회전하는 기어 접촉 경로를 시뮬레이션한 결과이다.

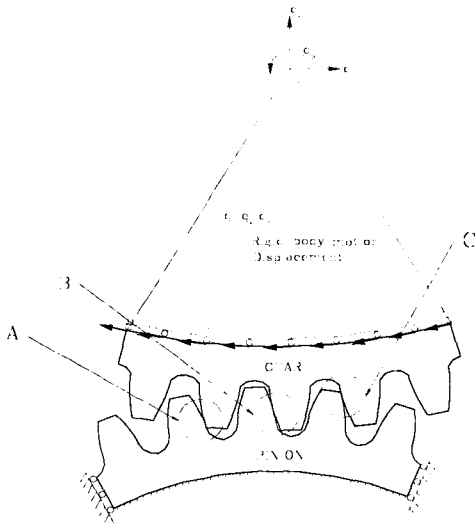


(그림 3) 회전에 따른 기어 접촉 경로

### 3. 탄성 접촉 문제의 정식화<sup>(4)</sup>

기어는 일반적으로 두 물체의 회전운동에 의해 작

동하므로 접촉 문제는 두 물체를 해석 대상으로 한다. 두 물체가 모두 운동하고 있는 경우에도 상대운동을 고려하면, 한 물체만 강제운동을 고려하고 한 물체는 고정되어 있다고 볼 수 있다. 그림 4와 같이 두 물체를 1, 2로 구분하며, 이때 강제 운동이 가능한 물체(gear)를 항상 물체 1로 표현하고, 물체 1 내부의 한 점에서의 강제 변위를  $q_i$ 로 나타낸다.



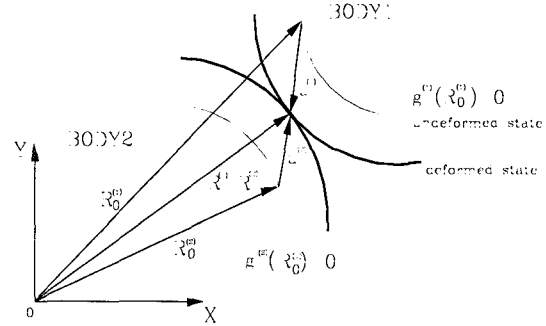
(그림 4) 스퍼 기어 쌍의 접촉 모델

탄성 접촉 문제에서 마찰을 무시하여 표면력에서 수직인 법선 성분만을 갖고, 비접착 접촉으로 가정하면 접촉면에서의 접촉력은 압축력에 의한 성분만을 가지며, 그 방향은 압축 방향이다. 두 물체의 접촉에 있어서 한 접촉점에 대한 접촉력의 상호 관계는 작용, 반작용에 의해 서로 크기는 같고 방향이 반대이므로, 접촉 압력은 다음과 같다.

$$S = -\sigma_{ij}^1 n_i^1 n_j^1 = -\sigma_{ij}^2 n_i^2 n_j^2 \geq 0 \quad (12)$$

접촉 압력  $S$ 는 두 물체의 경계에서 각각 그 내부의 응력과 평형을 이루고, 음의 부호는 압축력을 양

으로 택하기 위하여 사용된다. 그리고  $n_i^k$ 는 물체  $k$ 의 경계 위의 단위 외향 법선 벡터의  $i$ 번째 공간 좌표 성분이다.



(그림 5) 접촉 예상 영역 도식화

접촉 예상 영역에서 접촉 여부의 기하학적 조건은 물체 1의 경계가 물체 2의 영역 내부를 침투하지 않는다는 조건이므로, 그림 5에서 보는 바와 같이 물체  $k$ 의 접촉 예상 구간을 수학적으로 표현하면 다음 식으로 정의 되어진다.

$$g^{(k)}(R_0^{(k)}) = 0 : \text{경계 영역}$$

$$g^{(k)}(R_0^{(k)}) > 0 : \text{내부 영역}$$

$$g^{(k)}(R_0^{(k)}) < 0 : \text{외부 영역}$$

변형후 상태를 수학적으로 표현하면,

$$R^{(k)} = R_0^{(k)} + u^{(k)} \quad \text{on } k = 1, 2 \quad (13)$$

두 물체가 접촉한 경우는  $R^{(1)}$ 과  $R^{(2)}$ 가 같으므로, 이를 이용하여 물체 1의 경계가 물체 2의 영역 내부로 침투하지 않을 조건은 다음 식으로 표현 가능하다.

$$g^{(2)}(R_0 + \bar{u}^{(1)} - u^{(2)}) \leq 0 \quad (14)$$

$$\bar{u}^{(1)} = u^{(1)} + \alpha_{ij} q_j \quad (15)$$

여기서,  $u^i$ 는  $i$ 번째 좌표 방향으로의 변위의 크기를 나타내고,  $\alpha_{ij}$ 는 접촉 경계상의 점에 대해 정의되어지며 각각  $j$ 번째 강체 운동 변위  $q_j$ 가 단위량 1일 때  $i$ 번째 방향으로의 변위의 크기를 나타낸다. 등호는 접촉을 이루고 있는 상태를 나타내고 부등호는 비접촉 상태를 나타낸다. 식(12)에서 정의된 접촉력  $S$ 의 수식을 이용하여 접촉력  $S$ 와 접촉 예상 구간을 나타내는  $g^{(2)}$ 의 관계를 표현하면 다음 식과 같다.

$$S \cdot g^{(2)} = 0 \quad (16)$$

단,  $S \geq 0, \quad g^{(2)} \leq 0$

강체 운동이 고려되는 물체 1의 변형을 해석할 때 고려되는 힘은 외력과 접촉력이며, 접촉 여부에 의해서 결정되는 접촉력이 외력  $F_i$ 와 평형을 이루지 못하면 강체 운동을 고려한 점에서 반력이 생기게 된다. 이 반력이 0이 되게 하려면 가상 일의 원리에 따라 다음 식을 만족해야 한다.

$$\int_{\Gamma_F^1} F_i^1 h_{ij} dS = \int_{\Gamma_C} S \alpha_{ij} n_j^1 dS \quad (17)$$

여기서  $h_{ij}$ 는 물체 1이 외력 경계상의 점에 의해 정의되어지며 각각  $j$ 번째 강체 운동 변위  $q_j$ 의 값이 단위량 1일 때  $i$ 번째 좌표 방향으로의 변위의 크기를 나타내고, 이 값은 물체 1의 기하학적 형태와 강체 운동이 정의된 점의 변위 및 강체 운동 방향에 의해 일의 적으로 결정되는 양이다. 그리고 미분량  $dS$ 는 경계면 면적의 미소 요소이다. 접촉 조건식(14)는 비선형이고, 부등식이므로 직접 해를 구하는 것은 매우 어렵다. 따라서 최소화 문제로 변환하여 보다 효율적으로 해를 구한다. 제안된 최소화 문제는 다음 식과 같이 정의된다.

$$\min J(u^1, u^2, q) \quad \text{s.t.} \quad g^{(2)} \leq 0 \quad (18)$$

$J$ 는 목적함수로 다음과 같이 표현된다.

$$J = E_p - E_F \quad (19)$$

$$E_F = \int_{\Gamma_F^1} \overline{F}_i^1 (u_i^1 + h_{ij} q_j) dS + \int_{\Gamma_F^2} \overline{F}_i^2 u_i^2 dS$$

$$E_p = \int_{\Omega^1} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^1 \epsilon_{ij}^1 d\Omega^1 + \int_{\Omega^2} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2 \epsilon_{ij}^2 d\Omega^2$$

여기서,  $E_p$ 는 변형 에너지,  $E_F$ 는 외력에 의한 일량을 나타내고,  $d\Omega$ 는 물체의 체적에 대한 미분 요소이며 최소화 문제의 설계 변수는  $u_1, u_2, q$ 이다. 라그랑지 승수  $\lambda$ 를 도입하고 범함수  $J$ 에 제한 조건 식을 부가시키면 다음 식으로 표현된다.

$$J_1 = J - \int_{\Gamma_C} \lambda g^{(2)} dS \quad (20)$$

식 (20)에 변분을 취하고 Kuhn-Tucker<sup>(6)</sup> 조건을 정리하면 다음 식들과 같다.

$$\delta J_1 = 0 \quad (21)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (22)$$

$$\int_{\Gamma_C} \lambda g dS = 0 \quad (23)$$

여기서,  $J_1$ 의 변분을  $du^1, du^2, dq$ 에 대해서 취하면 다음과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{ii,j}^k = 0 \quad \text{in } \Omega^k \quad (24)$$

$$\sigma_{ij}^k n_j^k = F_i^k \quad \text{on } \Gamma_i^k \quad (25)$$

$$\sigma_{ij}^k n_j^k + \lambda (\nabla g^{(2)})_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_C, k=1,2 \quad (26)$$

$$\int_{\Gamma_F^1} F_i^1 h_{ij} dS = \int_{\Gamma_C} \lambda (\nabla g^{(2)})_i \alpha_{ij} dS \quad (27)$$

여기서,  $\nabla g^{(2)}$ 는  $-n^2 (=n^1)$ 이므로 다음 식

으로 표현된다.

$$\sigma_{ij}^k n_j^k n_i^k = -\lambda = S \quad \text{for } k = 1, 2 \quad (28)$$

식(26)으로부터 라그랑지 승수 함수  $\lambda$ 는 변형 후 각 접촉점에서 접촉력을 나타내고, 이 값들은 물체 k의 경계에서 각각 내부 응력과 평형을 이루고 있음을 알 수 있다. 또한 모든 접촉점에 대해  $\lambda \geq 0$ 이고  $g^{(2)} \leq 0$  이므로 식(16)은  $\lambda \cdot g^{(2)} = 0$ 로 표현할 수 있다. 이로써 최소화 문제의 필요조건을 만족하는 해는 탄성 접촉 문제의 모든 식들을 만족한다.

#### 4. 유한 요소 수식화

목적함수인 식(19)를 유한 요소 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} U^T K^1 U^1 + \frac{1}{2} U^2 T K^2 U^2 - U^1 T R^1 - U^2 T R^2 - F_e^T H q \quad (29)$$

여기서, 식(19)에 포함된 각 항들에 대한 유한 요소 수식은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} U^T B^T C B U d\Omega = \frac{1}{2} U^T K U \quad (30)$$

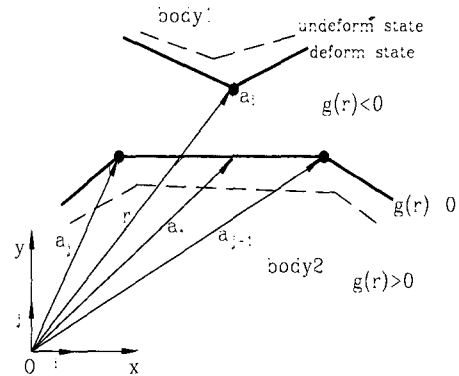
$$\int_{\Gamma_f^k} F_i^k u_i^k dS = U^k T R^k \quad (31)$$

$$R^k = \int N^T F^k d\Gamma \quad \text{on } k = 1, 2$$

$$\int_{\Gamma_c} F_i^1 h_{ij} q_j dS = F_e^T H q \quad (32)$$

$$= [ F_{e1} \quad F_{e2} \quad F_{e3} ] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

여기서,  $R^k$ 는 절점 하중 벡터,  $N$ 은 형상함수,  $U$ 는 절점 변위 벡터,  $h_{ij}$ 는 강제 변위  $q_j$ 가 1일 때 하중 경계 표면에서  $i$ 번째 방향의 변위 크기를 나타낸다.



(그림 6) 선형 유한 요소의 접촉 모델

또한 접촉 조건 식인 식(14)를 유한 요소 수식화로 표현하기 위해 그림 6에 도시한 바와 같이 물체 1의 접촉 여부에 대한 조사는 물체 2의 경계를 나타내는 수식인  $g(r) = 0$ 을 이용한다.

$$g(r) = \frac{i_3 \cdot [(r - a^j) \times (a^{j+1} - a^j)]}{\|a^{j+1} - a^j\|} \quad (33)$$

물체 1의 접촉 조건 예상 구간 내의 조사 절점  $a_i$ 에서 물체 2의  $a_j, a_{j+1}$ 를 다음과 같은 조건을 만족하는 것들 중 가장 큰 값을 선정한다.

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (34)$$

$$\text{여기서, } \gamma = \frac{(a^{j+1} - a^j) \cdot (a^i - a^j)}{\|a^{j+1} - a^j\|^2}$$

$a_*$ 는  $a_i$ 에서 물체 2로 수선을 내렸을 때  $a_j$ 와  $a_{j+1}$ 을 내분하는 점을 나타낸다. 그리고, 변형 후의 상태를 접촉 조건 수식에 대입하고, 함수  $g^{(2)}$ 를 급

수 전개하여 1차항 까지 취하여 접촉 조건을 선형화시키면 다음 식과 같이 정의된다.

$$g^{(2)} (R_0^{(1)} + u^{(1)} + \alpha q - u^{(2)}) \quad (35)$$

$$\doteq M^1 U^1 + M^2 U^2 + Aq - G$$

G는  $-g^{(2)}(R_0^{(1)})$ 로써 변형 전의 초기 간극을 나타내고,  $M_1, M_2$ 는 절점 자유도로 부터 접촉 간극의 감소량을 계산하는 행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$M_1 = [\beta_{ii}^1] = \begin{bmatrix} (a_2^{k+1} - a_2^k) & 0 \\ 0 & (-a_1^{k+1} + a_1^k) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[\beta_{ik}^2] = \begin{bmatrix} (-a_2^{k+1} + a_2^k) & 0 \\ 0 & (a_1^{k+1} - a_1^k) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$[\beta_{ik+1}^2] = \begin{bmatrix} (a_2^k - a_2^i) & 0 \\ 0 & (-a_1^k + a_1^i) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$G = [-G_i] = -(a_1^i - a_1^k)(a_2^{k+1} - a_2^k) + (a_2^i - a_2^k)(a_1^{k+1} - a_1^k) \quad (39)$$

이상의 유한 요소 수식을 정리하면 다음과 같다.

$$\min J(u^1, u^2, q) \quad (40)$$

$$\text{s.t. } g^{(2)} \doteq M^1 U^1 + M^2 U^2 + Aq - G \leq 0$$

유한요소법을 적용해서 얻어진 2차계획법 문제는 설계 변수 ( $u^1, u^2, q$ )의 갯수가 상당히 많고, 상대적으로 제한 조건은 예상 접촉점에서만 검토되기 때문에 그 수가 적다. 이경우 쌍대문제(Dual Problem)<sup>(7)</sup>로 접근함으로써 해를 보다 효율적으로 구할 수 있다. 식(40)을 선형화된 유한 요소 문제의 쌍대문제로 바꾸면 다음과 같다.

$$\max_P \min_{u_k, q} \{J_2 + P^T (M^k U^k + Aq - G)\} \quad (41)$$

$$\text{s.t. } P \geq 0, k = 1, 2$$

식(41)의 최소화 문제에 대한 필요조건은 다음과

같다.

$$K^k U^k - R^k + M^{kT} P = 0 \quad \text{on } k = 1, 2 \quad (42)$$

$$A^T P - H^T F_e = 0 \quad (43)$$

식(42)를 식(41)에 대입하면, 다음과 같은 2차계획법 문제로 표현된다.

$$\max_P \left\{ -\frac{1}{2} P^T Q P - R^T P \right\} \quad (44)$$

$$\text{s.t. } P \geq 0$$

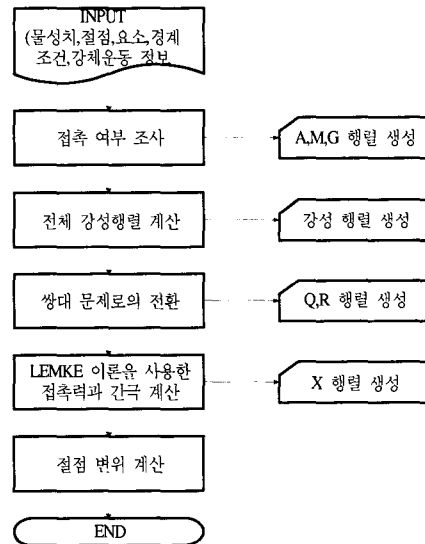
$$A^T P = H^T F_e \quad (45)$$

$$Q = M^1 (K^1)^{-1} M^{1T} + M^2 (K^2)^{-1} M^{2T} \quad (46)$$

$$R = G - M^1 (K^1)^{-1} R^1 - M^2 (K^2)^{-1} R^2 \quad (47)$$

식(44)~식(47)들은 쌍대 공간에서의 2차 계획법 문제이며 제한조건식을 비교적 정확히 알고 있는 문제를 신속히 계산할 수 있는 Lemke 방법<sup>(4)</sup>을 이용하여 해를 구할 수 있다.

유한요소 해석을 위한 프로그램 흐름도는 그림 7과 같다.

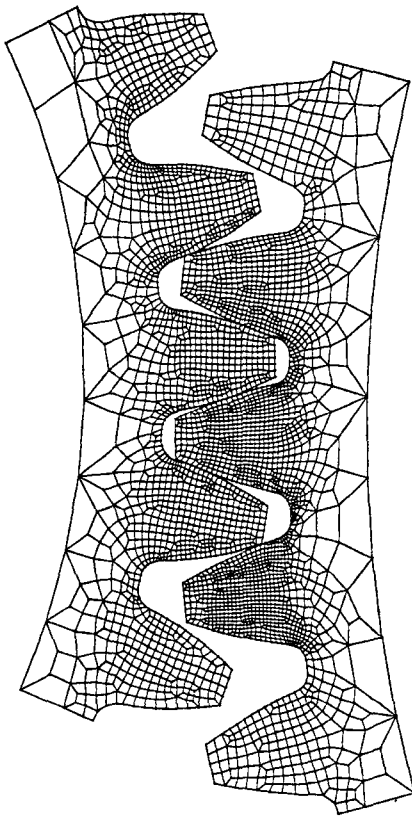


(그림 7) 프로그램 흐름도

절점 변위 계산

### 5. 계산결과 및 고찰

인블류우트 치형은 FORTRAN으로 좌표값을 계산하여 I-DEAS의 Universal file<sup>(12)</sup> 형태로 출력하고 이것을 I-DEAS에서 읽어들이어 그림 8과 같이 절점과 요소를 생성하였다. 접촉 하중에 대한 계산 역시, FORTRAN을 사용하였으며, 해석에 사용된 기어의 모델은 압력각 14.5도, 모듈 2.5 및 물음률 1.72, 구동 기어 잇수는 62개, 종동 기어 잇수는 36개이고, 총절점수는 3853이고 총요소수는 3574이다.



(그림 8) 스퍼 기어의 유한 요소 모델

기어 쌍에서 전달 토크가 1390N-m 일 때 일정 시간에서 맞물려 있는 기어 쌍을 접촉 문제로 구성하

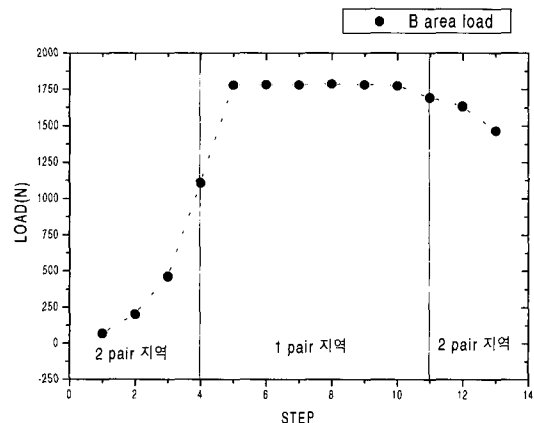
여 접촉력을 구하였다.

그림 3에 제시한 바와 같이 기어 쌍이 접촉 경로를 따라 회전이 진행될 때 기어의 접촉 하중의 전달 값을 표 1에 나타내었다.

[표 1] 기어 쌍의 회전시 하중 전달 값

Step	A지역 (절점번호)	하중값 (N)	B지역 (절점번호)	하중값 (N)	C지역 (절점번호)	하중값 (N)	접촉수
1	101	1693.95	1962	70.88			2 pair
2	69	1576.44	1987	202.93			2 pair
3	42	1326.67	2008 2029	199.35 263.76			2 pair
4	42	688.06	2029	1108.04			2 pair
5			2052	1783.25			1 pair
6			2073	1783.63			1 pair
7			2094	1783.41			1 pair
8			2114 2133	1480.11 310.44			1 pair
9			2133 2150	971.57 814.09			1 pair
10			2150 2163	526.96 1250.22			1 pair
11			2164	1694.68	478	70.13	2 pair
12			2174	1634.62	412	144.71	2 pair
13			2188	1465.89	374	323.89	2 pair

대상 모델의 물음률이 1.72이므로, 그림 9에서 보는 바와 같이 구동 기어의 한 기어 치 이 뿌리 부에서 접촉이 시작 될 때에는 회전 방향의 직전 기어 치와 동시에 접촉이 이루어지고 있고, 회전이 진행되면



(그림 9) 기어 쌍의 하중 전달 특성



서 한 기어 치에서만 접촉하다가 기어 치의 이 끝 부분이 접촉될 때에는 회전 방향의 후방 기어 치와 동시에 접촉하게 된다. 따라서 운동중인 한 기어 치를 중심으로 볼 때 동시 접촉하는 기어 치의 수는 2개→1개→2개로 구성되고 있다. 또한, 운동 중인 한 기어 치에 작용하는 전달 하중의 크기는 구동기어 이 뿌리 부(기어 치 2개가 동시 접촉)에서 70~460N이고, 한 기어 치에서만 접촉하는 경우에는 1783N이며 이후 이 끝 부분(기어 치 2개가 동시 접촉)에서는 1465~1700N 이다. 연속적인 두 기어 치가 동시에 접촉하고 있는 경우에 접촉이 시작하는 기어 치의 전달 하중은 70~460N으로 비교적 작고, 접촉이 끝나는 기어 치의 전달 하중은 1465~1700N으로 크게 나타났다.

## 6. 결 론

동력을 전달하고 있는 스퍼 기어쌍에서 각 기어 치의 전달 하중을 결정하기 위하여 물려 있는 두 기어를 준정적 평형 상태로 가정하여 접촉 문제를 구성하였다. 또한 접촉 문제가 비선형 문제이므로 선형 상보상 문제(Linear Complementarity Problem)와 이차 계획법을 이용하여 인벌류우트 치형을 갖는 스퍼 기어쌍에서 각 기어 치에 작용하는 전달 하중의 분배량을 계산할 수 있는 전용 유한요소 해석 프로그램을 개발하였다. 본 연구에서 제안한 수치해석적 방법은 임의의 치형을 갖는 기어에 대해서도 해석이 가능하므로 기어 설계시 사용되고 있는 치형 수정에 관한 해석 및 사이클로이드 치형에 대한 해석에도 적용이 가능할 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

1. A.H. Elkholy, "Tooth Load Sharing in High-Contact Ratio Spur Gears", Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, March 1985, Vol. 107
2. Raymond, J. Drago, "Fundamental of Gear Design", Butterworths, 1988
3. J.E. Shigley, "Mechanical Engineering Design", International student edition, 1977
4. G.J. Huh, B.M. Kwak, "Constrained Variational Approach for Dynamic Analysis of Elastic Contact Problems". Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 10, 1991
5. Gitin. M. Maitra, "Handbook of Gear Design", Mc Graw-hill, 1989
6. R. CHAN, E. J. HAUG, and K. Rim, "Analysis of Unbounded Contact Problem by Means of Quadratic Programming", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 20, NO. 2, October, 1976
7. C. VAN DE PANNE and ANDREW WHINSTON, "The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming", Operational Research Quarterly, Vol. 15, No. 4
8. V. Simon, "Load and Stress Distributions in Spur and Helical Gears", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 110, June 1988
9. I. Huseyin Filiz and O. Eyercioglu, " Evaluation of Gear Tooth Stresses by Finite Element Method", Journal of Engineering for Industry, Vol. 117, 1995
10. J.R. Colbourne, "The Geometry of Involute Gears", Springer-Verlag, 1987
11. Dennis P. Townsend, "DUDLEY'S GEAR HANDBOOK", McGraw-Hill, 1992
12. I-DEAS User's Manual