

# LMI 기법을 이용한 2자유도 표준모델에 대한 비결합 제어기의 $H_\infty$ 설계

## $H_\infty$ Design for Decoupling Controllers Based on the Two-Degree-of-Freedom Standard Model Using LMI Methods

강기원, 이종성, 박기현  
(Kiwon Kang, Jong-sung Lee, and Kiheon Park)

**Abstract** : In this paper, the decoupling  $H_\infty$  controller which minimizes the maximum energy in the output signal is designed to reduce the coupling properties between the input/output variables which make it difficult to control a system efficiently. The state-space formulas corresponding to the existing transfer matrix formulas of the controller are derived for computational efficiency. And for a given decoupling  $H_\infty$  problem, an efficient method are sought to find the controller coefficients through the LMI(Linear Matrix Inequalities) method by which the problem is formulated into a convex optimization problem.

**Keywords** : decoupling control,  $H_\infty$  control, vectorization, linear matrix inequalities

### I. 서론

#### 1. 연구 배경 및 동기

구조적으로 다양화되어가는 현대의 제어시스템에 기존의 단일 입출력 시스템의 제어방식을 이용할 경우, 요구되는 여러 설계사항을 만족시키기에는 한계가 있다. 따라서 효과적인 제어를 위해서 플랜트의 다변수 특성을 이용한 다변수 제어시스템 설계가 널리 이용되고 있으며 이 분야에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다[1][2][3][4].

일반적으로 다변수 시스템의 입출력 변수들 사이에는 많은 결합(coupling)이 존재하여 효율적인 제어가 어렵다. 따라서 비결합 제어문제는 다변수의 입력과 출력 사이의 결합효과를 제거하여 각 채널의 출력변수는 대응되는 입력신호에 의해서만 독립적으로 조정되도록 제어를 설계하는 것이다. 참고문헌 [5][6]에서는 일반 상태공간 모델에 대한 상태 궤환 비결합 제어기 문제를 다루었고 [7]에서는 단위 출력 궤환의 비결합 제어문제를 다루었고 [8]에서는 비결합 조건과 함께 최적 안정도 여유문제를 다루었는데 이러한 제어기들은 모두 1-자유도 구조의 제어기이고 따라서 성능 개선에 근본적인 제한이 있게 된다. 2 혹은 3자유도 구조의 비결합 제어기 문제는 [9][10][11][12]에서 다루어 졌는데 [9]에서는 비결합 조건을 만족시키는 입력 제어기의 형태가 유도되었으며 [11][12]에서는 이 결과를 이용하여 자승 형태의 평가함수를 최소화시키는 최적 제어기가 유도되었다. [11][12]의 결과는 비결합 조건과 제어계의 성능문제를 함께 다루었기 때문에 큰 의미가 있으나 제어기의 공식이 워너-호프 분해항을 이용한 전달행렬 형태로 서술되어 있기 때문에 계산상에 어려움이 생긴다. 이와 같이 지금까지

의 연구는 비결합 제어문제 중에서도 성능 최적화 문제에 비중을 두어 연구가 주로 이루어졌지만 이러한 문제에서 추종해야 하는 기준입력은 제한된 에너지의 알려지지 않은 임의의 신호라는 점을 주목해야 한다. 따라서 비결합 제어문제도 입력측으로 최악의 가능한 신호(worst possible signal)가 인가되었을 때 이에 대응할 수 있는 적절한 제어시스템을 설계하는 관점으로 접근할 필요성이 있다. 특히  $H_\infty$  노음은 제한된 에너지를 갖는 임의의 입력에 의해 출력에서 나타나는 신호의 최대 에너지를 표현하므로  $\infty$ -노음을 최소화시키는 것은 입력신호에 기인하는 출력신호의 에너지를 최소화시키는 것을 의미한다[13]. 이러한 관점에서 본 논문에서 다루는 비결합 제어문제는 시스템에서 발생할 수 있는 최악의 상황(worst case), 즉 주어진 제한된 입력신호에 의해 출력에서 나타날 수 있는 오차항의 에너지 값이 최대인 경우를  $H_\infty$  노음으로 정의하여 이 값을 최소화시키면서 동시에 비결합성을 만족시킬 수 있는 비결합  $H_\infty$  제어기를 설계하는 것이다.

따라서 본 논문에서는 제어기의 계산을 용이하게 하기 위하여 [11]의 결과를 표준 모델로 확장시킨 후 비결합 제어기의 전달행렬을 상태공간 계수로 표현하였다. 이렇게 표현된 상태공간 계수를 이용하여 주어진  $H_\infty$  문제를 선형 행렬 부등식(LMI; Linear Matrix Inequalities, 이하 LMI) 형태로 표시하였으며 이러한 문제는 볼록할 최적화 문제(convex optimization problem)로 설정될 수 있다[14][15]. 따라서 본 논문에서는 LMI를 이용하여 비결합  $H_\infty$  제어기의 계수값들을 구하는데 효과적인 알고리즘을 제시하고자 한다.

#### 2. 용어 및 표기법

본 논문에서는 실계수 유리행렬  $G(s)$ 는 혼동이 없는 경우  $G$ 로 표시한다.  $[g_{ij}]$ 는 행렬  $G(s)$ 의 또다른 표현

접수일자 : 2000. 5. 13., 수정완료 : 2000. 11. 18.

강기원 : (주)마이다스코리아(kwkang@dreamwiz.com)

이종성, 박기현 : 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부(ljs@sorak.skku.ac.kr/khpark@yurim.skku.ac.kr)

이며, 이 때  $g_{ij}$ 는 행렬의  $i$ 번째 행,  $j$ 번째 열의 원소를 의미한다.  $G, G_*$ 는 각각 행렬  $G$ 의 전치(transpose)행렬,  $G'(-s)$ 을 나타낸다.  $vec(G)$ 는 행렬  $G$ 의  $i$ 번째 열벡터를  $g_i$ 로 나타낼 때  $[g_1' g_2' \dots g_n']'$ 를 의미한다. 또한,  $G$ 가 대각행렬일 때  $vecd(G)$ 는  $[g_{11} g_{22} \dots g_{nn}]'$ 를 나타내며  $diag\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 는  $G_i$ 를 대각 블록으로 갖는 대각 블록행렬을 표시한다.  $G \circ R$ 은 두 행렬  $G$ 와  $R$ 의 Schur 곱으로  $G \circ R = [g_{ij} \times r_{ij}]$ 로 정의한다.  $G \otimes R$ 은  $G$ 와  $R$ 의 Kronecker 곱을 표시하며  $G$ 와  $R$ 의 Khatri-Rao 곱  $G \odot R$ 은  $g_i, r_i$ 가  $G$ 와  $R$ 의 열벡터를 표시할 때  $[g_1 \otimes r_1 : g_2 \otimes r_2 : \dots : g_n \otimes r_n]$ 으로 정의된다[16].

**II. 상태공간 계수를 이용한 비결합  $H_\infty$  제어기의 LMI 표현**

**1. 비결합 제어문제**

본 논문에서 다룰 비결합 문제는 기준입력 추종문제와 관련이 있으므로 기준입력  $r(s)$ 를 분리하여 처리할 수 있는 구조가 필요한 데 이를 가능케 하는 구조가 그림 1의

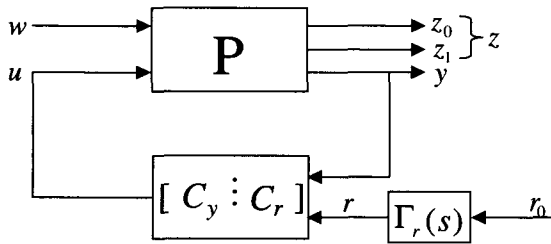


그림 1. 2자유도 구조의 표준모델.  
Fig. 1. 2-degree-of-freedom standard model.

2자유도 표준모델 구조이다. 각 신호  $w(s), u(s), z(s) = [z_0' z_1']', y(s), r(s)$ 는 각각 외부입력, 제어입력, 조정변수, 측정변수, 기준입력이고 그 차원은 각각  $r_1 \times 1, r_2 \times 1, m_1 \times 1, m_2 \times 1, q \times 1$ 이다. 조정변수중  $z_0$ 는 기준입력  $r(s)$ 를 추종하는 변수이고  $q \times 1$ 의 차원이며  $z_1$ 은 그 외의 변수들을 표시하며  $(m_1 - q) \times 1$ 의 차원이다. 기준입력  $r(s)$ 는

$$r(s) = \Gamma_r(s) r_0 \tag{1}$$

의 형태이고  $r_0$ 는 백색잡음이며 파워 스펙트럼은  $I$ 이다. 여기서  $\Gamma_r(s)$ 는 정방 안정행렬로 가정하자. 이 경우  $r(s)$ 의 파워 스펙트럼은

$$\Phi_r(s) = \Gamma_r(s) \Gamma_r^*(s) \tag{2}$$

이다. 그림 1에서 제어기 전달행렬  $T_c(s)$ 는

$$T_c(s) = [C_y(s) : C_r(s)] \tag{3}$$

의 2자유도 제어기 구조이고, 시스템 전달함수를

$$\begin{bmatrix} z_0(s) \\ z_1(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{01} & P_{02} \\ P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \tag{4}$$

와 같이 나타내면, 조정변수  $z(s)$ 는

$$z(s) = \begin{bmatrix} z_0(s) \\ z_1(s) \end{bmatrix} = T_{zw}(s)w(s) + T_{zr}(s)r(s) \tag{5}$$

이다. 여기에서

$$T_{zw}(s) = \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix} R_y P_{21} \tag{6}$$

$$T_{zr}(s) = \begin{bmatrix} P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix} R_r \tag{7}$$

$$[R_y : R_r] = (I - C_y P_{22})^{-1} [C_y : C_r] \tag{8}$$

로 나타낼 수 있는데, (8)에서  $C_y, C_r$ 를 구하면

$$[C_y : C_r] = (I + R_y P_{22})^{-1} [R_y : R_r] \tag{9}$$

이 되므로  $(R_y, R_r)$ 와  $(C_y, C_r)$ 는 1:1 대응 관계가 있다. 그러므로 앞으로 편의상 전달함수  $(R_y, R_r)$ 를 제어기로 부르기로 하고 모든 제어기 설계 공식도  $R_y, R_r$ 에 대해 구하고자 한다. 두 제어기  $R_y, R_r$ 의 특성에 대해 알아보면, (5)와 (6), (7)에서 기준입력을 조정하는 항은 전적으로  $R_r$ 이고 측정잡음 및 외란을 조정하는 항은  $R_y$ 임을 쉽게 알 수 있다. 비결합 문제가 기준입력 추종문제와 관계있음을 생각한다면 비결합 제어문제는 결국 원하는 조건을 갖는  $R_r$ 를 구하는 문제라고 생각할 수 있다. 두 제어기의 설계에서  $R_y$ 는 임의의 제어기법을 이용하여 안정한 제어기 형태를 별도로 구했다고 가정하고, 본 논문에서는 비결합 조건을 만족시키는  $R_r$ 만을 구하기로 한다.

이제 비결합 문제의 설정을 위해 (5)에서 다음과 같이  $r$ 에 대한 항

$$z_r = \begin{bmatrix} z_{r0} \\ z_{r1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{02} \\ P_{12} \end{bmatrix} R_r \cdot r \tag{10}$$

만을 생각하자. 여기서,  $z_r$ 은  $w=0$ 일 경우의  $z$ 를 의미한다. 이제 비결합 제어의 내용은 기준입력  $r(s)$ 에서 기준입력에 추종하는 변수  $z_{r0}$ 까지의 전달함수  $P_{02} R_r$ 를 대각행렬로 만드는 제어기를 구하는 것이다. 따라서  $R_r$ 이 비결합 조건을 만족시키는 제어기라면 결과적인  $P_{02} R_r$ 는  $D_a$ 를 폐우평면에서 해석적인 임의의 안정한 유리 대각행렬이라고 할 때

$$P_{02} R_r = D_a \tag{11}$$

의 형태이어야 한다. 결국 비결합 조건을 만족하는 제어기  $C_r$ 의 설계는 (11)을 만족하는  $R_r$ 을 구하는 문제로

생각할 수 있다. 앞으로 (11)의 조건을 만족시키는 제어기  $R_r$ 을 비결합 제어기라고 부르기로 한다.

정의 1 : 그림 1의 시스템에서, 대응하는 제어기  $C_r$ 이 폐루프 시스템을 내부적으로 안정화시킬 때 실 유리행렬  $R_r$ 은 허용가능하다고 한다[17].

그리고, 다음은 그림 1의 플랜트  $P$ 가 안정화 가능을 보장하는 조건이다[4].

가정 1 : 플랜트  $P$ 는 우반평면의 잠복극점(hidden pole)이 없으며,  $\Psi_{P_{22}}^+ = \Psi_P^+$ 이다.

여기서  $\Psi_{P_{22}}$ 와  $\Psi_P$ 는 각각  $P_{22}$ 와  $P$ 의 특성 분모식[1]이고,  $\Psi^+$ 와  $\Psi^-$ 는 각각 다항식  $\Psi$ 의 페우평면과 개좌평면에 위치한 영점만을 갖는 다항식이다.

일반적으로 제어입력  $u$ 와 입력신호  $r$ 의 차원은 서로 같지 않다. 본 논문에서는 제어 입력신호와 기준 입력신호의 차원이 같은 경우만을 생각하기로 하자. 이 경우,  $r_2 = q$ 가 되고 따라서  $R_r$ 과 제어기  $C_r$ 은 정방행렬이 된다. 이제

$$P_{22} = B_1 A_1^{-1} \quad (12)$$

의 우 서로소 다항식 쌍(right coprime polynomial pair)을 생각하고  $H_1$ 이 페우평면에서 해석적인 임의의 실 유리행렬이라고 하면 가정 1이 만족될 때 허용가능한  $R_r$ 의 형태는

$$R_r = A_1 H_1 \quad (13)$$

인 것이 알려져 있다[2]. 여기에  $P_{02} = B_{p1} A_{p1}^{-1}$ 의 우 서로소 다항식 쌍을 생각하고, (13)의 허용가능한  $R_r$ 이 비결합 제어기가 될 조건을 서술하기 위해 다음과 같은 행렬을 정의하자[9][11].

정의 2 :  $\Delta_L$ 과  $\Delta_R$ 은  $q \times q$ 의 차원을 갖는 대각행렬이며 각각의 형태는 다음과 같다:

- $\Delta_L = \text{diag} \{ \Delta_{L1}/\Delta_{L1^*}, \Delta_{L2}/\Delta_{L2^*}, \dots, \Delta_{Lq}/\Delta_{Lq^*} \}$ 의 형태이며  $\Delta_{Li}$ 는  $B_{p1}$ 의  $i$ 번째 행에 있는 원소들의 페우평면 영점항들의 최대 공약 다항식이며 최고 차항의 계수는 1이다. 따라서,  $B_{p1} = \Delta_L \tilde{B}_{p1}$ ,  $\tilde{B}_{p1}$ 은 다항식 행렬의 표현이 가능하다.

- $\Delta_R = \text{diag} \{ \Delta_{R1}/\Delta_{R1^*}, \Delta_{R2}/\Delta_{R2^*}, \dots, \Delta_{Rq}/\Delta_{Rq^*} \}$ 의 형태이며  $\Delta_{Rj}$ 는  $A_1^{-1} A_{p1} \tilde{B}_{p1}^{-1}$ 의  $j$ 번째 열에 있는 원소의 분모들의 페우평면 영점항들의 최소 공배 다항식이며 최고 차항의 계수는 1이다.

이제 (11)을 (12),(13) 그리고 정의 2에 따라 다시 쓰면

$$\begin{aligned} P_{02} R_r &= B_{p1} (A_{p1})^{-1} A_1 H_1 \\ &= \Delta_L \tilde{B}_{p1} A_{p1}^{-1} A_1 H_1 \end{aligned} \quad (14)$$

이 되고, 따라서 비결합 제어문제는 위의 전달행렬이 안정한 대각 유리행렬이 되게 하는  $H_1$ 을 구하는 문제로 귀착된다.

가정 2 :  $P_{02}(s)$ 는 역행렬이 존재한다.

정리 1 : 가정 1~2가 만족될 때 허용가능한 비결합 제어기  $R_r$ 의 형태는

$$R_r = P_{02}^{-1} \Delta_L \Delta_R D \quad (15)$$

이다. 단,  $D$ 는 페우평면에서 해석적인 임의의 실 유리 대각행렬이다[11].

### 2. 평가 함수 설정

본 논문에서는 허용가능한 비결합 제어기  $R_r$ 의 집합에서 주어진 전달함수의  $\infty$ -노름을 최소화시키는 제어기를 구하고자 한다. 기준입력과 관련된 조정변수  $z_0(s)$ 와 기준입력과의 오차항  $e(s)$ 는

$$e(s) = (I - T_{z_0 r}) \Gamma_r r_0 \quad (16)$$

으로 주어지고  $z_0(s)$ 이외의 조정변수  $z_1(s)$ 와 기준입력사이의 관계는

$$z_1 = T_{z_1 r} \Gamma_r r_0 \quad (17)$$

로 주어진다. 따라서  $H_\infty$  문제는 (16)에서  $\|(I - T_{z_0 r}) \Gamma_r\|_\infty$ 을, (17)에서는  $\|T_{z_1 r} \Gamma_r\|_\infty$ 을 최소화시키는 문제로 각각 생각할 수 있으며, 이 두 가지 경우를 동시에 고려하는 경우 다음과 같은 결합된 형태로 나타낼 수 있다.

$$E_r = \left\| \begin{bmatrix} (I - T_{z_0 r}) \Gamma_r \\ k_i T_{z_1 r} \Gamma_r \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{z_0 r} \\ k_i T_{z_1 r} \end{bmatrix} \Gamma_r \right\|_\infty \quad (18)$$

여기서  $k_i$ 는 안정한 가중치 행렬인데 표준 모델  $T_{z_1 r}$ 에 흡수시킬 수 있으므로  $k_i$ 는 단위 행렬로 가정하자. 따라서

$$I_0 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{P}_{12}(s) = \begin{bmatrix} P_{02}(s) \\ P_{12}(s) \end{bmatrix}, T_{zr} = \begin{bmatrix} T_{z_0 r} \\ T_{z_1 r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{02}(s) \\ P_{12}(s) \end{bmatrix} R_r \quad (19)$$

이라 하면 이제 (18)은

$$E_r = \|(I_0 - \tilde{P}_{12} R_r) \Gamma_r\|_\infty \quad (20)$$

으로 나타낼 수 있다.

### 3. 상태공간 계수를 이용한 공식 표현

비결합  $H_\infty$  문제를 LMI 형태로 표시하기 위해 앞에서 제시된 평가함수를 상태공간 계수로 표현해보자. 앞으로  $H(sI - F)^{-1}G + J = \left[ \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & J \end{array} \right]$ 의 간략식을 사용하며  $M = ARE(F, R, Q)$ 의 표현은  $FM + MF - MRM + Q = 0$ 의 방정식의 해 중에서  $F - RM$ 이 안정행렬이 되게 하는  $M$ 을 나타내며,  $M^+$ 는 행렬  $M$ 의 Moore-Penrose 역행렬을 표시한다.

플랜트  $P(s)$ 와 (1)의  $\Gamma_r(s)$ 의 상태공간 모델이 다음과 같다 하자;

$$\begin{bmatrix} P_{01}(s) & P_{02}(s) \\ P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G_1 & G_2 \\ H_0 & J_{01} & J_{02} \\ H_1 & J_{11} & J_{12} \\ H_2 & J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\Gamma_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F_r & G_r \\ \hline H_r & 0 \end{array} \right] \quad (22)$$

이 때 상태공간 모델에 대한 가정들은 다음과 같다.

가정 3 :  $(F, G_2)$ 는 제어가능하고  $(F, H_2)$ 는 관측가능하다.

가정 4 :  $J_{02}$ 는 역행렬이 존재한다.

가정 5 : 행렬  $F_r$ 은 안정행렬이다.

가정 6 : 행렬  $\left[ \begin{array}{cc|c} F-j\omega I & G_2 & \\ \hline H_0 & J_{02} & \\ H_1 & J_{12} & \end{array} \right]$ 는 모든  $\omega$ 에 대하여 열계수(column rank)를 가진다.

가정 7 : 행렬  $\left[ \begin{array}{cc|c} F-j\omega I & G_2 & \\ \hline H_0 & J_{02} & \end{array} \right]$ 는 모든  $\omega$ 에 대하여 열계수를 가진다.

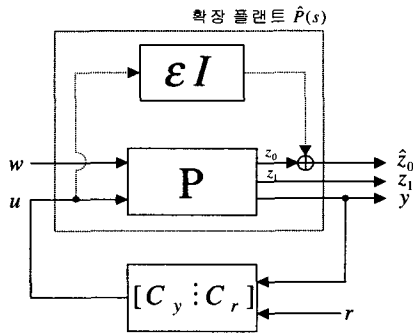


그림 2. 확장 플랜트  $\hat{P}(s)$ .

Fig. 2. The augmented plant  $\hat{P}(s)$ .

$J_{02}^{-1}$ 가 존재하지 않는 경우에는 그림 2와 같이  $\epsilon I$  항을 도입하여 근사(approximation) 설계를 할 수 있다. 그림 2의 확장 플랜트  $\hat{P}(s)$ 에서  $\hat{P}_{02}(s) = P_{02}(s) + \epsilon I$ 인데  $\epsilon I$ 를  $J_{02} + \epsilon I$ 가 역행렬이 존재하도록 선택하여  $\hat{P}(s)$ 에 대하여 비결합 제어를 설계한다. 이 결과로  $r$ 에서  $\hat{z}_0$ 까지의 전달행렬  $\hat{T}_{z_0 r} = T_{z_0 r} + \epsilon R_r$ 는 대각행렬이 되지만  $T_{z_0 r}$ 는 그렇지 않을 것이다. 그러나  $\epsilon$ 값을 충분히 작게 하면  $T_{z_0 r}$ 는  $\hat{T}_{z_0 r}$ 에 접근하여 거의 대각행렬이 될 것이다.

다음 보조정리들은 앞으로 상태공간 계수의 공식을 유도하는데 이용되는 기본적인 공식들인데 이의 증명은 [18]을 참고하고 여기서는 결과만을 표시하기로 한다.

정의 3 : 유리행렬의 곱  $P_1(s)P(s)$ 가  $P_1(s)$ 의 극(pole)을 가지고 있지 않으면 유리행렬  $P(s)$ 는  $P_1(s)$ 의 우측 소거소(right eliminator)라고 한다.

보조정리 1 :  $P_1(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F_1 & G_1 \\ \hline H_1 & J_1 \end{array} \right]$ ,  $P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & J \end{array} \right]$ 이고  $F$ 와  $F_1$ 은 같은 고유값(eigenvalue)을 공유하지 않는다고 가정하자.  $P(s)$ 가  $P_1(s)$ 의 우측 소거소가 될 충분 조건은  $M_1$ 이

$$F_1 M_1 - M_1 F = -G_1 H \quad (23)$$

의 유일해일 때

$$G_1 J - M_1 G = 0 \quad (24)$$

이 되는 것이다. 이 경우  $P_1(s)P(s)$ 의 상태공간 계수는

$$P_1(s)P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline J_1 H + H_1 M_1 & J_1 J \end{array} \right] \quad (25)$$

이 된다. 만일  $(F_1, H_1)$ 이 관측가능하면 위의 조건은 필요충분 조건이 된다.

보조정리 2 :  $P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F_p & G_p \\ \hline H_p & J_p \end{array} \right]$ ,  $Q(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F_q & G_q \\ \hline H_q & J_q \end{array} \right]$ 이고  $P(s)$ 와  $Q(s)$ 의 크기가 각각  $l \times m$ ,  $r \times m$ 인 경우 다음과 같이 된다;

$$P(s) \odot Q(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} F_p \otimes I_r & G_p \otimes H_q & G_p \odot J_q \\ \hline 0 & I_m \otimes F_q & I_m \odot G_q \\ \hline H_q \otimes I_r & J_p \otimes H_q & J_p \odot J_q \end{array} \right] \quad (26)$$

보조정리 3 :  $P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & J \end{array} \right]$ 이고  $F$ 는 안정행렬이며  $J$ 는 열계수를 가지고 있고  $\det P_*(j\omega)P(j\omega) \neq 0$ 이라 하자. 행렬  $\Lambda(s)$ 를  $P_*(s)P(s) = \Lambda_*(s)\Lambda(s)$ 의 위너-호프 분해항이라 하면

$$\Lambda(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline R^{-1/2}(JH + GX) & R^{-1/2} \end{array} \right] \quad (27)$$

$$X = ARE(F - GR^{-1}JH, H'(I - JR^{-1}J)H, GR^{-1}G) \quad (28)$$

이다. 이 때  $PA^{-1}$ 은 내행렬(inner)이고 상태공간 계수는 다음과 같다.

$$PA^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} F - GK_1 & GR^{-1/2} \\ \hline H - JK_1 & JR^{-1/2} \end{array} \right], \quad K_1 = R^{-1}(JH + GX) \quad (29)$$

보조정리 4 :  $P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & J \end{array} \right]$ 이고 크기가  $l \times m$ 인 경우  $vec P(s)$ 는 다음과 같다.

$$vec P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} I_m \otimes F & vec G \\ \hline I_m \otimes H & vec J \end{array} \right] \quad (30)$$

보조정리 5(부분 분수 전개) : 상수행렬  $F_1$ 과  $F_2$ 가 서로 다른 고유값을 가지고 있으면 다음 등식이 성립한다;

$$H_1(sI - F_1)^{-1}H(sI - F_2)^{-1}H_2 = -H_1(sI - F_1)^{-1}MH_2 + H_1M(sI - F_2)^{-1}H_2 \quad (31)$$

여기서  $M$ 은  $F_1M - MF_2 = -H$ 의 유일해이다.

3.1 정리 1의  $P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R$ 의 상태공간 계수

행렬  $\Lambda(s)$ 를 다음 식의 위너-호프 분해항이라 하자;

$$A_1 * P_{02} * P_{02} A_1 = \Lambda * \Lambda \quad (32)$$

정리 1의  $R_r$ 를 다시 정리하면

$$R_r = P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R D = A_1 \Lambda^{-1}(P_{02} A_1 \Lambda^{-1})^{-1}\Delta_L\Delta_R D \quad (33)$$

인데  $P_{02}A_1\Lambda^{-1}$ 이 정방 내행렬이므로  $(P_{02}A_1\Lambda^{-1})^{-1} = (P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*$ 이고 따라서

$$R_r = A_1\Lambda^{-1}(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*\Delta_L\Delta_R D \quad (34)$$

이다. 위 식에서  $\Delta(s) = \Delta_L\Delta_R$ 의 역할은  $(P_{02}A_1)^{-1}$ 의 불안정 극(pole)을 없애주는 것인데 이것은  $\Lambda(P_{02}A_1)^{-1} = (P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*$ 의 불안정 극을 없애는 것과 동가이므로 결국  $\Delta(s)$ 는  $(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*$ 의 우측 소거소가 된다.

보조정리 6 :  $A_1\Lambda^{-1}$ 의 상태공간 계수는 다음과 같다:

$$A_1\Lambda^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} F - G_2K_1 & G_2R_1^{-1/2} \\ \hline -K_1 & R_1^{-1/2} \end{array} \right] \quad (35)$$

$$R_1 = J_{02}'J_{02}, \quad K_1 = R_1^{-1}(J_{02}'H_0 + G_2'M_0) \quad (36)$$

$$M_0 = ARE(F - G_2J_{02}^{-1}H_0, 0, G_2R_1^{-1}G_2') \quad (37)$$

따라서  $E(s) = P_{02}A_1\Lambda^{-1}$  상태공간 계수는 (35)를 이용하여

$$E(s) = P_{02}A_1\Lambda^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} F - G_2K_1 & G_2R_1^{-1/2} \\ \hline H_0 - J_{02}K_1 & J_{02}R_1^{-1/2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} F_e & G_e \\ \hline H_e & J_e \end{array} \right] \quad (38)$$

이 된다. 다음은  $\Delta = \Delta_L\Delta_R$ 이  $E_*(s)$ 의 우측 소거소임을 이용하여  $\Delta(s)$ 의 상태공간 계수를 구하자.  $E(s)$ 를 행렬로 표시하기 위해  $h_{ei}, J_{ei}$ 는 행벡터라 할 때

$$\begin{aligned} H_e &= [h_{e1} \ h_{e2} \ \dots \ h_{eq}]', \\ J_e &= [J_{e1} \ J_{e2} \ \dots \ J_{eq}]' \end{aligned} \quad (39)$$

로 분해하면 다음과 같이 된다;

$$E(s) = [e_1(s) \ e_2(s) \ \dots \ e_q(s)]', \quad (40)$$

$$e_i(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F_e & G_e \\ \hline h_{ei} & J_{ei} \end{array} \right]$$

이제  $\Delta(s) = \text{diag}\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q\}$ 로 하면  $E_*\Delta = [e_{1*}\Delta_1 : e_{2*}\Delta_2 : \dots : e_{q*}\Delta_q]$ 가 되므로 결국  $\Delta_i$ 는  $e_{i*}$ 의 우측 소거소가 된다. 보조정리 1의 내용과  $\Delta_i$ 가 내행렬임을 이용하면 그 결과는 다음과 같다.

보조정리 7 :  $\Delta(s) = \Delta_L\Delta_R$ 와  $\Delta_i(s)$ 의 상태공간 계수는 다음과 같다;

$$\Delta_i(s) = \left[ \begin{array}{c|c} F_e & -M_i^+ h_{ei}' \\ \hline h_{ei} & 1 \end{array} \right] \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \left[ \begin{array}{c|c} I_q \otimes F_e & -I_q \otimes \{ \hat{M}^+ \text{vec}(H_e') \} \\ \hline (I_q \otimes H_e') & I_q \end{array} \right] \quad (42) \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} F_\Delta & G_\Delta \\ \hline H_\Delta & J_\Delta \end{array} \right] \end{aligned}$$

여기서  $M_i$ 는

$$F_e'M_i + M_iF_e = -h_{ei}'h_{ei}, \quad 1 \leq i \leq q \quad (43)$$

의 유일해이며  $\hat{M} = \text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_q\}$ 이다.

이 경우  $(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*\Delta_L\Delta_R$ 와  $P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R$ 의 상태공간 계수는 다음과 같다;

$$(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*\Delta_L\Delta_R = \left[ \begin{array}{c|c} F_\Delta & G_\Delta \\ \hline H_N & J_e \end{array} \right] \quad (44)$$

$$H_N = I_q \odot [h_{n1} : h_{n2} : \dots : h_{nq}] \quad (45)$$

$$h_{ni} = J_{ei}'h_{ei} + G_e'M_i, \quad 1 \leq i \leq q \quad (46)$$

$$\begin{aligned} P_{02}^{-1}\Delta_L\Delta_R &= \left[ \begin{array}{c|c} F_e & G_e H_N \\ 0 & F_\Delta \\ \hline -K_1 & R_1^{-1/2} H_N \\ \hline F_{ed} & G_{ed} \\ \hline H_{ed} & J_{ed} \end{array} \right] \quad (47) \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} F_e & G_e \\ \hline H_{ed} & J_{ed} \end{array} \right] \end{aligned}$$

### 3.2 행렬 $\Gamma(s)$ 의 상태공간 계수

행렬  $\Gamma(s) = \hat{P}_{12}P_{02}^{-1}\Delta = \hat{P}_{12}A_1\Lambda^{-1}(P_{02}A_1\Lambda^{-1})_*\Delta$ 는  $\hat{P}_{12} = \left[ \begin{array}{c|c} F & G_2 \\ \hline \hat{H}_1 & \hat{J}_{12} \end{array} \right]$ ,  $\hat{H}_1 = [H_0 \ H_1]'$ ,  $\hat{J}_{12} = [J_{02} \ J_{12}]'$ 의 관계일 때 상태공간 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \left[ \begin{array}{c|c} F_e & G_e H_N \\ 0 & F_\Delta \\ \hline \hat{H}_1 - \hat{J}_{12}K_1 & \hat{J}_{12}R_1^{-1/2}H_N \\ \hline F_g & G_g \\ \hline H_g & J_g \end{array} \right] \quad (48) \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} F_g & G_g \\ \hline H_g & J_g \end{array} \right] \end{aligned}$$

이제 (20)의 평가함수를 앞에서 구한 상태공간 계수 공식들을 이용하여 표시하면

$$\begin{aligned} E_r &= \|(I_0 - \hat{P}_{12}R_r)\Gamma_r\|_\infty \\ &= \left\| \left[ \begin{array}{c|c} F_r & G_r \\ \hline \hat{H}_r & 0 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c|c} F_e & G_e H_N \\ 0 & F_\Delta \\ \hline \hat{H}_1 - \hat{J}_{12}K_1 & \hat{J}_{12}R_1^{-1/2}H_N \\ \hline F_g & G_g \\ \hline H_g & J_g \end{array} \right] \right\|_\infty \quad (49) \\ &\triangleq \|T_0 + T_a D T_b\|_\infty \end{aligned}$$

이 되고 이를 LFT(Linear Fractional Transformation)로 표기하면

$$\begin{aligned} E_r &= \|T_0 + T_a D T_b\|_\infty \\ &= \|F_l \left( \begin{bmatrix} T_0 & T_a \\ T_b & 0 \end{bmatrix}, D \right)\|_\infty \end{aligned} \quad (50)$$

이 된다. 여기서 플랜트 부분에 해당하는  $\begin{bmatrix} T_0 & T_a \\ T_b & 0 \end{bmatrix}$ 와 제어기 부분에 해당하는  $D$ 의 동적 방정식은

$$T : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_r r + Bu \\ z = C_z x + D_z r + D_2 u \\ y = Cx + D_r r \end{cases} \quad (51)$$

$$D : \begin{cases} \dot{x}_d = F_d x_d + G_d y \\ u = H_d x_d + J_d y \end{cases} \quad (52)$$

과 같이 표현되고 각각의 상태공간 계수는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_e \\ T_b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_r & 0 & 0 & G_r & 0 \\ 0 & F_e & G_e H_N & 0 & -G_e J_e' \\ 0 & 0 & F_\Delta & 0 & -G_\Delta \\ \hline \hat{H}_r & \hat{H}_1 - J_{12} K_1 & J_{12} R_1^{-1/2} H_N & 0 & -J_{12} R_1^{-1/2} J_e' \\ \hat{H}_r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{ii} \end{bmatrix} \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} F_d & G_d \\ \hline H_d & J_d \end{array} \right] \quad (54)$$

따라서 (51)의 동적 방정식의 상태공간 계수는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$A = \begin{bmatrix} F_r & 0 & 0 \\ 0 & F_e & G_e H_N \\ 0 & 0 & F_\Delta \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} G_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -G_e J_e' \\ -G_\Delta \end{bmatrix}, \\ C_z = [ \hat{H}_r \quad \hat{H}_1 - J_{12} K_1 \quad J_{12} R^{-1/2} H_N ], C = [ H_r \quad 0 \quad 0 ], \\ D_{zr} = [ 0 ], D_z = [ -J_{12} R_1^{-1/2} J_e' ], D_r = [ 0 ] \quad (55)$$

따라서 전체 페루프 시스템의 동적 방정식이 다음과 같이 표현되면

$$T_{zr} : \begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} r \\ z = C_{cl} x_{cl} + D_{cl} r \end{cases} \quad (56)$$

이때 각각에 대한 상태공간 계수는 다음과 같다.

$$T_{zr} = \left[ \begin{array}{cc|cc} A + B J_d C & B H_d & B_r + B J_d D_r & \\ \hline G_d C & F_d & G_d D_r & \\ \hline C_z + D_z J_d C & D_z H_d & D_{zr} + D_z J_d D_r & \end{array} \right] \quad (57)$$

비결합 \$H\_\infty\$ 제어문제는 (57)과 같이 주어지는 전체 페루프 전달함수의 \$\infty\$-노음을 최소화시키면서 정방형의 대각행렬 형태를 가지는 제어기의 자유 매개변수의 상태공간 계수 \$F\_d, G\_d, H\_d, J\_d\$를 LMI를 이용하여 구하는 것이다. 그러나 대각 전달행렬 형태를 보장하는 상태공간 계수의 구조를 찾기는 쉽지 않으므로 처음부터 대각행렬 형태를 보장할 수 있는 방법이 필요하게 된다. 이를 위해서 (50)에 벡터연산(vectorization)을 취하는데 벡터를 취하게 되면 벡터연산 성질에 의해 행렬의 대각 요소만을 구하게 되므로 이를 다시 주 대각 요소로 배치해 주면 정방의 대각행렬 형태의 비결합 제어기를 구할 수 있게 된다. 그러나 평가함수로 주어지는 전달함수에 벡터를 취하게 되면 그 결과 전체 \$H\_\infty\$ 노음 값이 벡터를 취하기 전보다 증가하게 된다. 이러한 현상은 다음과 같이 벡터를 취하기 전과 취한 후의 노음 값들을 정의하는 식을 통해 알 수 있다.

$$\| T_{zr} \|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma} [ T_{zr}(j\omega) ] \\ = \sup_\omega \sqrt{\lambda_{\max} ( \overline{T_{zr}(j\omega)}^T T_{zr}(j\omega) )} \quad (58)$$

$$\| \text{vec} T_{zr} \|_\infty = \sup_\omega \sqrt{\lambda_{\min} ( \overline{T_{zr}^T(j\omega)} T_{zr}(j\omega) ) + \dots \\ + \dots + \lambda_{\max} ( \overline{T_{zr}^T(j\omega)} T_{zr}(j\omega) )} \quad (59)$$

즉, 전체 페루프 전달함수의 \$H\_\infty\$ 노음 값은 최대 특이치 값(maximum singular value)만을 반영하는 반면 벡터를 취한 페루프 전달함수의 \$H\_\infty\$ 노음 값은 최소부터

최대 특이치 값까지의 모든 값들을 반영하게 됨을 알 수 있다. 본 논문에서는 (59)의 \$\infty\$-노음을 최소화하는 비결합 제어기를 구하는데, 이는 기존의 \$H\_\infty\$ 문제와는 약간 다른 형태의 최적화 문제가 되지만 물리적인 의미는 큰 차이가 없다.

이제 (50)에 벡터를 취하면

$$\hat{E}_r = \| \text{vec}(T_0 + T_a D T_b) \|_\infty \\ = \| \text{vec} T_0 + T_b' \odot T_a \text{vec} D \|_\infty \quad (60)$$

이 되고 \$\hat{T}\_1 = \text{vec} T\_0, \hat{T}\_2 = T\_b' \odot T\_a, \hat{T}\_3 = I, \text{vec} D(s) = \hat{D}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{F}\_d & \hat{G}\_d \\ \hline \hat{H}\_d & \hat{J}\_d \end{array} \right]\$로 놓으면 다음과 같이 벡터를 취한 후의 표준 \$H\_\infty\$ 문제 형태로 다시 표시할 수 있다.

$$\hat{E}_r = \| \hat{T}_1 + \hat{T}_2 \hat{D} \hat{T}_3 \|_\infty = \| F_r \left( \begin{bmatrix} \hat{T}_1 & \hat{T}_2 \\ \hat{T}_3 & 0 \end{bmatrix}, \hat{D} \right) \|_\infty \quad (61)$$

여기서 플랜트에 해당하는 부분 \$\left[ \begin{array}{c|c} \hat{T}\_1 & \hat{T}\_2 \\ \hline \hat{T}\_3 & 0 \end{array} \right]\$의 상태공간 계수는 다음과 같이 정해진다.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} I_m \otimes F_r & 0 & 0 \\ 0 & F_r' \otimes I_n & H_r' \otimes [ \hat{H}_1 - J_{12} K_1 \quad J_{12} R_1^{-1/2} H_N ] \\ 0 & 0 & I_m \otimes \begin{bmatrix} F_e & G_e H_N \\ 0 & F_\Delta \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_r = \begin{bmatrix} \text{vec} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_r' \odot [ -G_e J_e' \\ -G_\Delta ] \\ I_m \odot [ -G_e J_e' \\ -G_\Delta ] \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_z = [ I_m \otimes \hat{H}_r \quad G_r' \otimes I_n \\ 0 \otimes [ \hat{H}_1 - J_{12} K_1 \quad J_{12} R^{-1/2} H_N ] ],$$

$$\hat{C} = [ 0 \quad 0 \quad 0 ],$$

$$\hat{D}_{zr} = [ \text{vec} 0 ], \hat{D}_z = [ 0 \odot [ -J_{12} R_1^{-1/2} J_e' ] ], \hat{D}_r = I \quad (62)$$

이 경우 제어기 부분의 매개변수 \$\hat{F}\_d, \hat{G}\_d, \hat{H}\_d, \hat{J}\_d\$가 정의될 때 벡터를 취한 후의 전체 페루프 전달함수는 다음과 같이 구현된다.

$$\hat{T}_{zr} = \left[ \begin{array}{cc|cc} \hat{A} + \hat{B} \hat{f}_d \hat{C} & \hat{B} \hat{H}_d & \hat{B}_r + \hat{B} \hat{f}_d \hat{D}_r & \\ \hline \hat{G}_d \hat{C} & \hat{F}_d & \hat{G}_d \hat{D}_r & \\ \hline \hat{C}_z + \hat{D}_z \hat{f}_d \hat{C} & \hat{D}_z \hat{H}_d & \hat{D}_{zr} + \hat{D}_z \hat{f}_d \hat{D}_r & \\ \hline \hat{A}_d & \hat{B}_d & & \\ \hline \hat{C}_d & \hat{D}_d & & \end{array} \right] \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A}_d & \hat{B}_d \\ \hline \hat{C}_d & \hat{D}_d \end{array} \right] \quad (63)$$

따라서 벡터를 취한 후의 표준 비결합 \$H\_\infty\$ 제어문제는 \$\| \hat{T}\_1 + \hat{T}\_2 \hat{D} \hat{T}\_3 \|\_\infty < \gamma\$의 제한조건하에서 (63)의 \$H\_\infty\$ 노음을 최소화시키는 안정적인 제어기의 자유 매개변수 부분인 \$\hat{D}\$를 찾는 것이다.

#### 4. 비결합 \$H\_\infty\$ 제어문제의 LMI 표현

다음 (64)를 만족하는 양행정의 대칭행렬 \$P = \begin{bmatrix} P\_{11} & P\_{12} \\ P\_{21} & P\_{22} \end{bmatrix}\$, \$P\_{12} = P\_{21}^T\$가 존재한다고 가정할 때 전체 페루프 시스템을 안정화시키고 \$\hat{E}\_r = \| (I\_0 - P\_{12} \hat{R}\_r) \Gamma\_r \|\_\infty\$

<  $\gamma$ 를 만족하는 비결합  $H_\infty$  제어기의 자유 매개변수 부분의 상태공간 계수  $\widehat{F}_d, \widehat{G}_d, \widehat{H}_d, \widehat{J}_d$ 를 구하는 문제를 LMI 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \widehat{A}_{cl}^T P + P \widehat{A}_{cl} & P \widehat{B}_{cl} & \widehat{C}_{cl}^T \\ \widehat{B}_{cl}^T P & -\gamma I & \widehat{D}_{cl}^T \\ \widehat{C}_{cl} & \widehat{D}_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (64)$$

$$P > 0 \quad (65)$$

(63)을 (64)에 대입하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{f}_d\widehat{C} & \widehat{B}\widehat{H}_d \\ \widehat{G}_d\widehat{C} & \widehat{F}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{f}_d\widehat{C} & \widehat{B}\widehat{H}_d \\ \widehat{G}_d\widehat{C} & \widehat{F}_d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (\widehat{B}_r + \widehat{B}\widehat{f}_d\widehat{D}_r)^T & (\widehat{G}_d\widehat{D}_r)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (\widehat{C}_z + \widehat{D}_z\widehat{f}_d\widehat{C}) & (\widehat{D}_z\widehat{H}_d) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{B}_r + \widehat{B}\widehat{f}_d\widehat{D}_r \\ \widehat{G}_d\widehat{D}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\widehat{C}_z + \widehat{D}_z\widehat{f}_d\widehat{C})^T \\ (\widehat{D}_z\widehat{H}_d)^T \end{bmatrix} \\ -\gamma I & (\widehat{D}_{rr} + \widehat{D}_z\widehat{f}_d\widehat{D}_r)^T \\ \widehat{D}_{rr} + \widehat{D}_z\widehat{f}_d\widehat{D}_r & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (66)$$

윗 식의  $\widehat{A}_{cl}^T P + P \widehat{A}_{cl}$ 에서  $P$ 와 제어기 변수 부분인  $\widehat{F}_d, \widehat{G}_d, \widehat{H}_d, \widehat{J}_d$ 가 곱으로 표시되어 LMI 최적화 형태로 표현할 수가 없다. 따라서 (66)을 LMI 최적화 형태로 표현하기 위해서 다음과 같이  $P$  행렬을 다음과 같이 설정하자[19].

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & * \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & * \end{bmatrix} \quad (67)$$

여기서  $X, Y$ 는 차원이  $n \times n$  ( $n$ : 플랜트 차수)인 대칭 행렬이다.

$PP^{-1} = I$  이므로  $P \begin{pmatrix} X & M \\ M^T & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$ 이 되고 다음의 식이 성립한다.

$$P\Pi_1 = \Pi_2 \quad (68)$$

여기서

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix}, \Pi_2 = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{pmatrix} \quad (69)$$

$P > 0$ 이고  $M, N$ 이 전행계수(full row rank)를 가지면  $\Pi_1, \Pi_2$ 는 정칙이며 (64)의 양변에  $\begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ 를 곱해도 다음과 같이 부등호는 변하지 않으며 이러한 전개를 일치변환 (congruence transformation)이라고 한다.

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \widehat{A}_{cl}^T P + P \widehat{A}_{cl} & P \widehat{B}_{cl} & \widehat{C}_{cl}^T \\ \widehat{B}_{cl}^T P & -\gamma I & \widehat{D}_{cl}^T \\ \widehat{C}_{cl} & \widehat{D}_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \Pi_1^T \widehat{A}_{cl}^T P \Pi_1 + \Pi_1^T P \widehat{A}_{cl} \Pi_1 & \Pi_1^T P \widehat{B}_{cl} & \Pi_1^T \widehat{C}_{cl}^T \\ \widehat{B}_{cl}^T P \Pi_1 & -\gamma I & \widehat{D}_{cl}^T \\ \widehat{C}_{cl} \Pi_1 & \widehat{D}_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (70)$$

이 된다. 그리고  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ 가 다음과 같다 하면

$$\overline{A} = N\widehat{F}_dM^T + N\widehat{G}_d\widehat{C}X + Y\widehat{B}\widehat{H}_dM^T + Y(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{f}_d\widehat{C})X \quad (71)$$

$$\overline{B} = Y\widehat{B}\widehat{f}_d + N\widehat{G}_d \quad (72)$$

$$\overline{C} = \widehat{H}_dM^T + \widehat{f}_d\widehat{C}X \quad (73)$$

$$\overline{D} = \widehat{J}_d \quad (74)$$

(70)은 다음 (75)와 같이 표현되며 이 때 LMI에 영향을 미치는 변수는  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, X, Y$ 가 된다.

$$\begin{bmatrix} \overline{A}X + X\overline{A}^T + \overline{B}\overline{C} + (\overline{B}\overline{C})^T & \overline{A}^T + (\overline{A} + \overline{B}\overline{D}) \\ \overline{A} + (\overline{A} + \overline{B}\overline{D})^T & \overline{A}^T Y + Y\overline{A} + \overline{B}\overline{C} + (\overline{B}\overline{C})^T \\ (\overline{B}_r + \overline{B}\overline{D}\overline{D}_r)^T & (Y\overline{B}_r + \overline{B}\overline{D}_r)^T \\ \overline{C}_z X + \overline{D}_z \overline{C} & \overline{C}_z + \overline{D}_z \overline{D}\overline{C} \\ \overline{B}_r + \overline{B}\overline{D}\overline{D}_r & (\overline{C}_z X + \overline{D}_z \overline{C})^T \\ Y\overline{B}_r + \overline{B}\overline{D}_r & (\overline{C}_z + \overline{D}_z \overline{D}\overline{C})^T \\ -\gamma I & (\overline{D}_{rr} + \overline{D}_z \overline{D}\overline{D}_r)^T \\ \overline{D}_{rr} + \overline{D}_z \overline{D}\overline{D}_r & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (75)$$

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (76)$$

이 되는데 이는  $P > 0$  이고  $\Pi_1$ 은 정칙이므로 성립하며 Schur Complement에 의해  $Y > 0, X - Y^{-1} > 0$ 이 된다. 이는  $I - XY < 0$ 이 성립하는 것과 같으므로  $MN^T = I - XY$ 를 만족하는 정방행의 정칙 행렬  $M$ 과  $N$ 을 항상 구할 수 있다. 따라서 LMI 기법에 의하여  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, X, Y$ 를 구하면 다음 순서에 의해  $\widehat{F}_d, \widehat{G}_d, \widehat{H}_d, \widehat{J}_d$ 를 구할 수 있다. 이러한 과정을 단계 별로 요약하면 다음과 같다.

- ①  $X, Y$ 를 구하면  $M, N$ 을 구할 수 있다.
- ②  $\overline{D} = \widehat{J}_d$ 에서  $\widehat{J}_d$ 를 구한다.
- ③  $\overline{C} = \widehat{H}_dM^T + \widehat{f}_d\widehat{C}X$ 에  $\widehat{H}_d = (\overline{C} - \widehat{f}_d\widehat{C}X)M^{-T}$ 가 되므로  $\widehat{H}_d$ 를 구한다.
- ④  $\overline{B} = N\widehat{G}_d + Y\widehat{B}\widehat{f}_d$ 에서  $\widehat{G}_d = N^{-1}(\overline{B} - Y\widehat{B}\widehat{f}_d)$ 가 되므로  $\widehat{G}_d$ 를 구한다.
- ⑤  $\overline{A} = N\widehat{F}_dM^T + N\widehat{G}_d\widehat{C}X + Y\widehat{B}\widehat{H}_dM^T + Y(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{f}_d\widehat{C})X$ 에서  $\widehat{F}_d = N^{-1}(\overline{A} - N\widehat{G}_d\widehat{C}X - Y\widehat{B}\widehat{H}_dM^T + Y(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{f}_d\widehat{C})X)M^{-T}$ 이 되므로  $\widehat{F}_d$ 를 구한다.

$$\textcircled{6} P = \Pi_2 \Pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \text{로부터 구한다.}$$

그러므로 (20)의  $\overline{E}_r = \|(I_0 - \widehat{P}_{12}\widehat{R}_r)\Gamma_r\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 비결합 제어기의 자유 매개변수 부분의 상태공간 계수 값들을 LMI 기법을 이용하여 구할 수 있다.

III. 적용 예

그림 3의 시스템에서 비결합  $H_\infty$  제어기  $R_r$ 의 계산에 필요한  $\hat{D}$ 를 LMI 기법을 이용하여 구하는 과정을 예시한다. 먼저 (4)의 시스템 전달행렬을 구하면 다음과 같다.

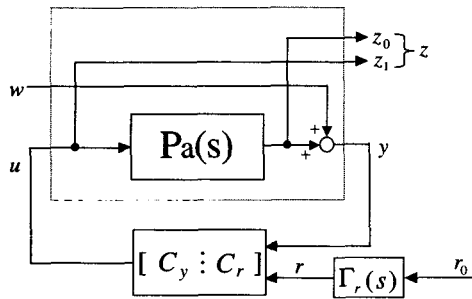


그림 3. 비결합 제어기 적용 예제.

Fig. 3. The example for a decoupling controller design.

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_a(s) \\ 0 & I \\ I & P_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} \quad (77)$$

여기서는 [17]의 예제를 다루기로 하자. 그림 3의 모델에서

$$P_a(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s(s-2)} & \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\Phi_r(s) = \frac{1}{(s+0.01)(-s+0.01)} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (79)$$

으로 주어졌다 하자. 공식 적용에 필요한 상태공간 계수를 정리하면 다음과 같다;

$$P_a(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} F_a & G_a & & & & \\ H_a & J_a & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (80)$$

$$P(s) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} F & G_1 & G_2 & & & \\ H_0 & J_{01} & J_{02} & & & \\ H_1 & J_{11} & J_{12} & & & \\ H_2 & J_{21} & J_{22} & & & \\ \hline F_a & 0 & G_a & & & \\ H_a & 0 & J_a & & & \\ 0 & 0 & I & & & \\ H_a & I & J_a & & & \end{array} \right] \quad (81)$$

$$\Gamma_r(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} F_r & G_r & & \\ H_r & 0 & & \\ \hline -0.0001 & 0 & 1.9841 & 0.2520 \\ 0 & -0.0001 & 0.2520 & 1.9841 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (82)$$

위의 계수에서 문제가 되는 것은  $J_{02} = J_a = 0$ 이기 때문에 가정 4가 만족되지 않는다는 것이다. 따라서 그림 2의 확장 플랜트를 설정하고  $\epsilon = 0.01$  값으로 근사 설

계를 하기로 하자;

3.1절의 상태공간 모델 공식을 이용한 결과를 요약하면 다음과 같다;

$$E(s) = P_{02}A_1A^{-1} = \frac{1}{s+3.9815} \begin{bmatrix} s+2.2995 & 3.2503 \\ 3.2503 & s-2.2995 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$\Delta(s) = \Delta_L(s)\Delta_R(s) = \frac{s-3.9815}{s+3.9815} \cdot I_2 \quad (84)$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{n}_1(s)}{\hat{d}(s)} & 0 \\ 0 & \frac{\hat{n}_2(s)}{\hat{d}(s)} \end{bmatrix} \quad (85)$$

여기서  $\frac{\hat{n}_1(s)}{\hat{d}(s)}$ ,  $\frac{\hat{n}_2(s)}{\hat{d}(s)}$ 는 각각 다음과 같이 표현되며 평가함수  $E_r(s)$  값은 7.3170이 된다.

$$\frac{\hat{n}_1(s)}{\hat{d}(s)} = \frac{-0.005251s^{10} - 4.603s^9 - 1086s^8 - 1.161e5s^7 - 8.64e6s^6 - 9.132e7s^5 - 6.043e8s^4 - 1.337e9s^3 - 3.465e9s^2 - 2.499e9s - 6.746e8}{s^{10} + 187.6s^9 + 3.798e4s^8 + 2.875e5s^7 + 2.119e6s^6 + 1.919e7s^5 + 6.385e8s^4 + 1.012e10s^3 + 8.53e9s^2 + 3.721e9s + 6.747e8}$$

$$\frac{\hat{n}_2(s)}{\hat{d}(s)} = \frac{0.001398s^{10} - 1.623s^9 - 585.1s^8 - 8.408e4s^7 - 9.128e6s^6 - 1.102e8s^5 - 6.043e8s^4 - 1.337e9s^3 - 3.465e9s^2 - 2.499e9s - 6.746e8}{s^{10} + 187.6s^9 + 3.798e4s^8 + 2.875e5s^7 + 2.119e6s^6 + 1.919e7s^5 + 6.385e8s^4 + 1.012e10s^3 + 8.53e9s^2 + 3.721e9s + 6.747e8}$$

구해진 제어기를 이용한 모의 실험은 Matlab의 Simulink를 이용하였다.

그림 4와 5는 기준입력1( $r_{01}$ )과 기준입력2( $r_{02}$ )에 서로 다른 함수인 단위 계단함수와 사인함수를 번갈아가면서 동시에 인가했을 경우 이에 따른 각각의 출력 파형  $z_{01}$ ,  $z_{02}$ 를 표시하고 있으며 각각의 기준 입력신호에 대해서 비결합성을 만족하고 있음을 관찰할 수 있다.

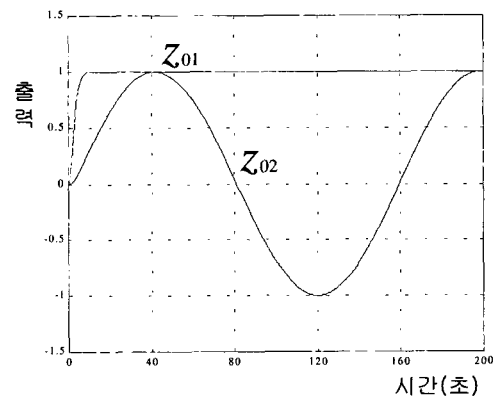


그림 4. 기준입력1( $r_{01}$ )에 단위 계단함수, 기준입력2( $r_{02}$ )에 사인함수를 인가했을 경우 플랜트 출력파형( $z_{01}$ ,  $z_{02}$ ).

Fig. 4. Plant output when applying unit step function to reference input1 and sine function to reference input2.



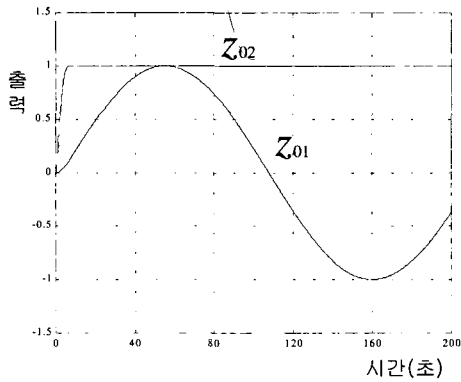


그림 5. 기준입력1( $r_{01}$ )에 사인함수, 기준입력2( $r_{02}$ )에 단위 계단함수를 인가했을 경우 플랜트 출력 파형( $z_{01}$ ,  $z_{02}$ ).

Fig. 5. Plant output when applying sine function to reference input1 and unit step function to reference input2.

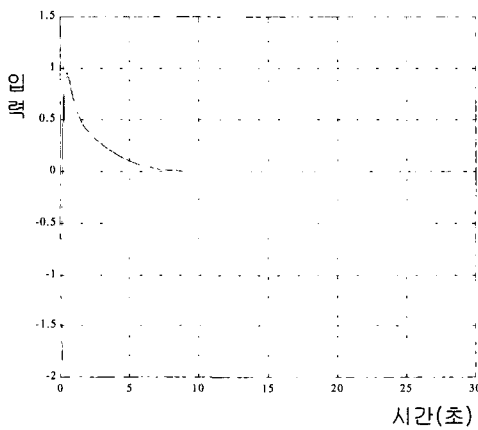


그림 6. 기준입력1( $r_{01}$ )에 단위 계단함수를 인가했을 경우 플랜트 입력파형( $u_{01}$ ).

Fig. 6. Plant input when applying unit step function to reference input1.

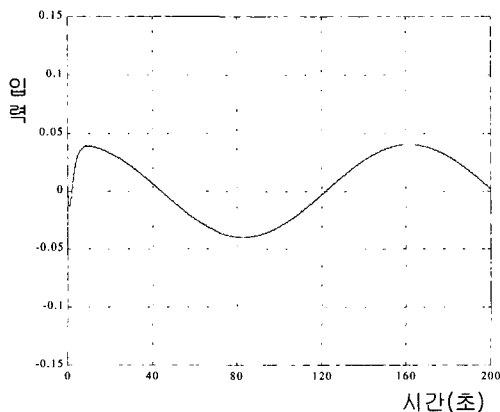


그림 7. 기준입력2( $r_{02}$ )에 사인함수를 인가했을 경우 플랜트 입력파형( $u_{02}$ ).

Fig. 7. Plant input when applying sine function to reference input2.

그림 6과 7은 그림 4의 경우에 있어서 플랜트 입력파형  $u_{01}$ ,  $u_{02}$  를 표시하고 있으며 각각의 출력이 대응되는 입력 신호에 의해 독립적으로 조정되고 있음을 보여 주고 있다.

#### IV. 결론

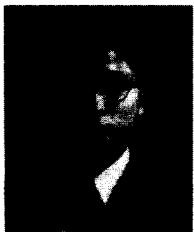
본 논문에서는 2자유도 구조의 표준 플랜트 모델에서 기준입력과 지정된 출력 사이의 전달행렬을 대각화시키는 비결합 제어기 설계문제를 다루었다. 제어기의 공식을 상태공간 변수로 유도하여 계산을 편리하게 하였으며, 제어기 계수값을 구하기 위해 LMI 기법을 적용하였다. 또한 정방형의 대각행렬의 비결합 제어기를 구하기 위해  $D(s)$ 의 상태공간 모델의 형태를  $vecd D(s)$ 로 설정하여 비결합 제어기 형태의 대각화 문제에 따른 여러 제한사항을 해결하였다. III장에서는 LMI 기법을 이용하여  $D(s)$ 를 구하는 과정이 예시되었다.

앞으로 더 연구되어야 할 내용은  $\Delta_L(s)\Delta_R(s)$ 의 우측 소거소를 LMI 형태로 표시하여 보다 일반화된 형태의 비결합 제어기를 LMI 기법을 이용하여 설계하는 것이다. 또한 본 논문에서는 대각행렬 형태의 비결합  $H_\infty$  제어기를 구하기 위해 평가함수로 주어지는 전달함수에 벡터를 취하게 되는데 그 때  $H_\infty$  노음값은 최소부터 최대 특이치 값까지의 모든 값들을 다룰 수 있게 되므로 벡터를 취하게 되면 노음값이 일반  $H_\infty$  노음값보다 증가되는 현상을 보였다. 이러한 의미에서  $H_\infty$  제어기는 최대 특이치에 대한  $\infty$ -노음값을 최소화시키는 역할을 하지만 벡터  $H_\infty$  제어기는 모든 특이치 값들을 더한 최대 값에 대한  $\infty$ -노음값을 최소화시키는 역할을 한다고 볼 수 있다. 따라서 시스템의 특성에 따라 외부입력에 대해 벡터  $H_\infty$  제어기를 사용하는 것이 더 나은 성능을 보일 수도 있을 것으로 판단되며, 이러한 문제는 앞으로 계속적으로 연구되어야 할 문제로 생각된다.

#### 참고문헌

- [1] D. C. Youla, H. Jabr, and J. J. Bongiorno, Jr., "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers-part II ; The multivariable case," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-21, no.3, pp. 319-338, June, 1976.
- [2] D. C. Youla and J. J. Bongiorno, Jr., "A feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf Design," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-30, no. 7, pp. 652-665, July, 1985.
- [3] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 34, pp. 831-847, 1989.
- [4] K. Park and J. J. Bongiorno, Jr., "A general theory for the Wiener-Hopf design of multivariable control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 34, pp. 619-626, 1989.
- [5] A. Ailon, "Decoupling of square singular systems

- via proportional state feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 36, no. 1, pp. 95-102, Jan., 1991.
- [6] P. N. Paraskevopoulos and F. N. Koumboulis, "The decoupling of generalized state-space systems via state feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 1, pp. 148-152, Jan., 1992.
- [7] A. I. G. Vardulakis, "Internal stabilization and decoupling in linear multivariable systems by unity output feedback compensation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-32, no. 8, pp. 735-739, Aug., 1987.
- [8] M. G. Safanov and B. S. Chen, "Multivariable stability margin optimization with decoupling and output regulation," in *Proc. Conf. Decision Contr.*, pp. 616-622, Orlando, FL, Dec. 1982, and *IEE Proc.*, vol. 129, pp. 276-282, Nov., 1982.
- [9] C. A. Desoer and A. N. Gündes, "Decoupling linear multiinput-multioutput plants by dynamic output feedback: An algebraic theory," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 31, no. 8, pp. 744-750, 1986.
- [10] J. J. Bongiorno, Jr., "On the design of optimal decoupled two-degree-of-freedom multivariable feedback control systems," in *Proc. Conf. Decision Contr.*, pp. 591-592, Ft. Lauderdale, FL, Dec., 1985.
- [11] H. P. Lee and J. J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of optimal decoupled multivariable feedback control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 38, no. 12, pp. 1838-1843, Dec., 1993.
- [12] H. P. Lee and J. J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of optimal decoupling controllers for plant with non-square transfer matrices," *International J. of Control*, vol. 58, no. 6, pp. 1227-1246, 1993.
- [13] D. C. McFalane and K. Glover, *Robust Controller Design Using normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, Berlin Springer Verlag, 1989.
- [14] S. Boyd, L. E. Ghoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, vol. 15, 1994.
- [15] V. Balakrishnan and R. L. Kashyap, "Robust stability and performance analysis of uncertain systems using linear matrix inequalities," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 100, no. 3, pp. 457-478, Mar., 1999.
- [16] J. W. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-25, no. 9, Sep., 1978.
- [17] H. P. Lee, *Wiener-Hopf design of decoupled multivariable feedback control systems*, Ph.D. dissertation, Polytechnic University, Farmingdale, New York, 1992.
- [18] 박기현, "비결합 제어 시스템의 위너-호프 설계와 상태공간 계산 공식," Report SKK-CAL-99-02, 1999.
- [19] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali, "Multi-objective Output-Feedback Control via LMI Optimization," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 42, no. 7, Jul., 1997.



강기원

1992년 성균관대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1996), 동대학원 박사(2000). 현재 (주)마이다스코리아 수석연구원. 관심분야는 강인제어이론 및 응용, 선형행렬부등식기법, 네트워크 통신에 의한 시스템 제어.



이종성

1990년 성균관대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1996), 동대학원 박사(2000). 현재 성균관대학교 전기전자 컴퓨터공학부 강사. 관심분야는 지능형 제어, 최적제어 및 강인제어.



박기현

1978년 서울대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1980), Polytechnic University 박사(1987). 1980년~1983년 해군사관학교 전기공학과 전임강사. 1988년~1990년 한국전자통신연구소 선임연구원. 현재 성균관대학교 전기 전자컴퓨터공학부 교수. 관심분야는 최적제어 및 강인제어, LMI최적화, 시스템 식별, 진동제어.