

# M-band 웨이블릿 변환을 이용한 볼테라 적응 등화기

## An Adaptive Volterra Series-based Nonlinear Equalizer Using M-band Wavelet Transform

김 영 근, 강 동 준, 남 상 원  
(Young-Keun Kim, Dong-Jun Kang, and Sang-Won Nam)

**Abstracts** : This paper proposes an adaptive nonlinear equalizer based on Volterra Series along with M-band wavelet transform (M-DWT). The proposed wavelet transform-domain approach leads to diagonalization of the input vector auto-correlation matrix, which yields clustering its eigenvalue spread around one, and improving the convergence rate of the corresponding transform-domain LMS algorithm. In particular, the proposed adaptive Volterra equalizer is employed to compensate for the output distortion produced by a weakly nonlinear system. Finally, some simulation results obtained by using a TWT amplifier model are provided to demonstrate the converging performance of the proposed approach.

**Keywords** : adaptive volterra equalizer, M-band wavelet transform, LMS, convergence speed.

### I. 서론

실제 비선형성이 존재하는 시스템(예를 들어, 디지털 라디오 시스템에서의 QAM, 비선형성으로 인해 소리 재생의 충실도가 크게 저하되는 loudspeaker 등)에서, 시스템 입력력 관계가 선형 특성을 갖는 것이 바람직한 경우, 시스템 선형화가 필수적으로 요구된다. 이러한 비선형 시스템에서 생기는 비선형 왜곡을 보상하는 방법으로는 송신단에서 전치왜곡보상 방법과 수신단에서의 등화 방법이 있다. 본 논문에서는 다양한 공학분야에 많이 응용되어 온 적응 볼테라 필터를 시스템 비선형 특성 보상에 적용한다. 그러나, 적응 볼테라 필터를 이용할 때의 문제점은 비선형 필터 구조에 기인하는 계산량의 증가와 선택한 알고리즘에 따라 그 수렴 성능이 좌우된다는 것이다. 특히, 적응 볼테라 필터 알고리즘에 최소 평균 자승 (LMS)법을 이용할 때, 선형 FIR 필터에서와 마찬가지로 입력 벡터의 상관 행렬 고유치 분포가 수렴 성능에 큰 영향을 미친다. 따라서, 본 논문에서는 전력 정규화의 선행처리 방법을 도입하여, LMS 필터 입력의 고유치 분포를 1에 접근하도록 하여 적응필터의 수렴속도를 향상시킨다. Non-block 알고리즘에서, 입력 신호를 decorrelating시키기 위해서 고정된 데이터 의존 변환에 의해 입력 값들을 연속적으로 변환하였는데, 변환 알고리즘들의 성능은 입력을 선행처리하기 위해서 사용되는 데이터 의존 변환의 직교화 성능에 영향을 받는다[1]. 본 논문에서는 LMS 적응 볼테라 필터의 수렴 속도를 향상시키기 위해, M-band 웨이블릿 변환 영역 볼테라 필터링 방법을 제안하였는데, 볼테라 입력 벡터는 유니터리 M-band 이산 웨이블릿 변환 (MDWT)

후 전력 정규화함으로써 입력 벡터 자기 상관행렬의 고유치 분포를 줄일 수 있는 장점을 이용하였다 [1][2]. 즉, 전력 정규화 및 변환 영역 LMS 선형 필터링 접근 방법을 볼테라 필터에 확장 적용하였다.

끝으로, 본 논문에서 제안된 선형화 기법의 성능을 테스트하기 위해, 위성통신 채널상에서 전력증폭을 위한 비선형 시스템인 TWT(Traveling Wave Tube)를 복소 3차 볼테라 급수로 모델링 하였고, 관련 시스템의 비선형 왜곡을 2차 단에서 보상하였으며, 또한 보상 알고리즘의 수렴속도를 향상시키기 위해서 MDWT (M-band Discrete Wavelet Transform)에 근거한 적응 볼테라 필터를 적용하여 모의실험 결과를 보인다.

### II. 볼테라 모델링

본 논문에서의 선형화 대상 비선형 시스템은 다음과 같이 복소 3차 볼테라 급수로 모델링될 수 있다.

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h_1[i]x[n-i] + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h_3[i, j, k]x[n-i]x[n-j]x^*[n-k] \quad (1)$$

여기서  $x[n]$  과  $y[n]$  은 각각 등화기의 입력과 출력을 나타내며,  $h_1[i]$  와  $h_3[i, j, k]$  는 각각 선형과 3차 비선형 커널이며 [1],  $N$  은 시스템의 메모리 수를 나타낸다.  $K_1$  을 1차 복소 볼테라 커널의 개수,  $K_3$  를 3차 복소 볼테라 커널의 개수,  $K_T$  를 시스템의 총 볼테라 커널 개수라고 나타내면 다음과 같다.

$$K_1 = N \quad (2)$$

$$K_3 = \frac{N(N+1)}{2!} N \quad (3)$$

$$K_T = K_1 + K_3, \quad N = 4 \quad (4)$$

또한, (1)의 입·출력관계를 벡터 형식으로 표현하면 다음과 같다.

접수일자 : 2000. 9. 4., 수정완료 : 2001. 2. 5.

김영근, 강동준, 남상원 : 한양대학교 전자전기공학부 (kandgo@hotmail.com/imkangdj@hotmail.com/swnam@email.hanyang.ac.kr)

\* 이 논문은 2000년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구되었음.

$$y[n] = \mathbf{h}_v^H \mathbf{X}_v[n] \quad (5)$$

여기서  $(\cdot)^H$  은 Hermitian 연산자이고  $\mathbf{h}_v$  는 볼테라 커널 벡터,  $\mathbf{X}_v[n]$  는 전체 볼테라 입력 벡터를 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_v[n] &= [x[n], x[n-1], \dots, x[n-N+1]] \\ & \quad x^2[n]x^*[n], x^2[n]x^*[n-1], \dots, x^2[n-N+1]x^*[n-N+1]]^T \\ &= [\mathbf{x}_L^T[n] \mid \mathbf{x}_C^T[n]]^T \quad (6) \end{aligned}$$

$\mathbf{x}_L[n]$  은 볼테라 필터의 선형 입력 벡터,  $\mathbf{x}_C[n]$  은 선형 입력의 자승부분과 선형입력의 다른 원소들간의 조합으로 이루어진 부분이다.

또한, 볼테라 입력 벡터간의 상관 행렬인  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_v}$  는 다음과 같이 정의되며

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}_v} = E[\mathbf{X}_v[n]\mathbf{X}_v^H[n]] \quad (7)$$

LMS 적응 알고리즘의 수렴 속도는 입력 상관 행렬  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_v}$  의 고유치 분포와 밀접한 관련이 있기 때문에, 고유치 분포를 줄이기 위해서 유니터리 변환(DWT 또는 MDWT)과 전력 정규화(power-normalization)를 통하여 입력신호 벡터  $\mathbf{X}_v[n]$  을 decorrelating 시킬 필요가 있다.

### III. 이산 M-band 웨이블릿 변환

웨이블릿 변환은 신호처리, 수치해석, 수학적 모델링 등등의 분야에 해석적 도구로서 많이 적용되어 왔다 [3]-[6]. 특히, 2-밴드 웨이블릿은 일반적으로 높은 시간 해상도(time resolution)를 가진 짧은 고 주파수 기저 함수(short high-frequency basis functions) 및 높은 주파수 해상도(frequency resolution)를 가진 긴 저 주파수 기저 함수(long low-frequency basis functions)를 이용하여, octave-band 신호 분해를 제공한다. 그러나, octave-band 분해는 긴 고 주파수 성분이 오래 지속되는 신호에는 부적절할 수 있다. 따라서 이러한 신호에는 웨이블릿 이용이 적절하지 못하게 된다. 이러한 문제점들을 해결하기 위해서 주파수 채널의 로그 스케일 분해능을 가지고 더 좋은 에너지 압축을 가진 M-band 웨이블릿을 이용하여 왔다[3]. 본 논문에서는 유니터리 코사인 변조 방법을 이용하여 M-band 웨이블릿 변환을 구성하였다. 코사인 변조 FIR 필터는 유니터리 FIR 필터 बैं크의 한 종류로서, 분석 필터들(analysis filters)  $H_i[n]$  는 저역 통과 선형 위상 원형 필터(low-pass linear-phase prototype filter)  $G[n]$  을 코사인 변조하여 구성할 수 있다[4][7]. 코사인-변조 필터 बैं크의 기본적인 아이디어는 원형 필터를 변조시킴으로써  $(M-1)$  개의 필터들을 결정하는 것이다. 따라서, 코사인 변조 필터 बैं크 구조는 디자인 및 구현이 쉽다. 본 논문에서 필터의 길이는  $N=2M$  ( $M$ : 밴드 수)이다. 먼저 원형 필터를 설계한 후, 변조를 하여 스케일링 필터(scaling filter)와 웨이블릿 필터(wavelet filter)를 구한다. 특히, 원형 필터는 다음과 같다.

$$G[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4M}(2n+1)\right) \quad (8)$$

또한, 스케일링 필터와 웨이블릿 필터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_i[n] &= G[n] \cos\left(\frac{\pi}{2M}(2i+1)(n - \frac{2M-1}{2}) + (-1)^i \frac{\pi}{4}\right) \\ &= G[n] (-1)^i \sin\left(\frac{\pi}{2M}(2i+1)(n + \frac{1}{2}) + (-1)^i \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2M}} \left[ \sin\left(\frac{\pi(i+1)(n+0.5)}{M} - (-1)^i \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi i(n+0.5)}{M} - (-1)^i \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

여기서  $i=0, \dots, M-1$  이다. 이들을 이용하여 구성한 M-band 웨이블릿 변환 행렬은 다음과 같다[6].

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} H_0(N-1) & H_0(N-2) & \dots & H_0(N-M-1) & \dots & H_0(0) \\ & & & H_0(N-1) & H_0(N-2) & \dots & H_0(0) \\ H_1(N-1) & H_1(N-2) & \dots & H_1(N-M-1) & \dots & H_1(0) \\ & & & H_1(N-1) & H_1(N-2) & \dots & H_1(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{M-1}(N-1) & H_{M-1}(N-2) & \dots & H_{M-1}(N-M-1) & \dots & H_{M-1}(0) \\ & & & H_{M-1}(N-1) & H_{M-1}(N-2) & \dots & H_{M-1}(0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서,  $H_0(k)$  와  $H_w(k)$  는 각각 스케일링 필터와 웨이블릿 필터를 나타낸다 ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ,  $w=1, 2, \dots, M-1$ ). 그림 1은 M-band 웨이블릿 필터 बैं크 구조를 나타낸다.

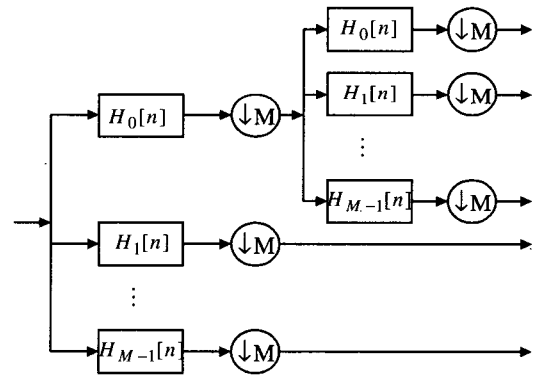


그림 1. M-band 웨이블릿 변환 필터 बैं크 구조  
Fig. 1. Filter bank structure of M-band wavelet transform

### IV. MDWT 영역 적응 볼테라 필터링

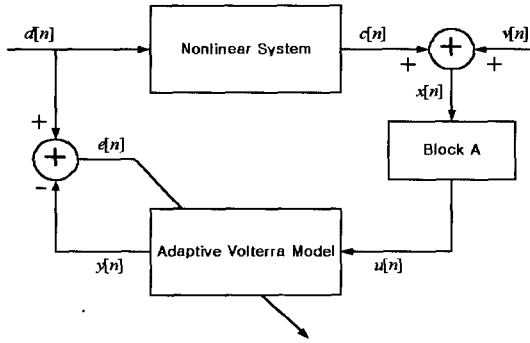
그림 2는 본 논문에서 제안한 M-band 웨이블릿 변환 영역에서 LMS 적응 볼테라 등화기 구조이며 그 방법은 다음과 같다. 우선, 볼테라 입력 벡터  $\mathbf{x}_v[n]$  은 nonlinear combiner를 통해 발생되고, 제안한 코사인 변조 유니터리 변환(MDWT) [6][7]을 통해 변환된다. 변환된 입력 벡터  $\mathbf{z}[n]$  은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{z}[n] = \mathbf{T} \mathbf{x}_v[n] \quad (11)$$

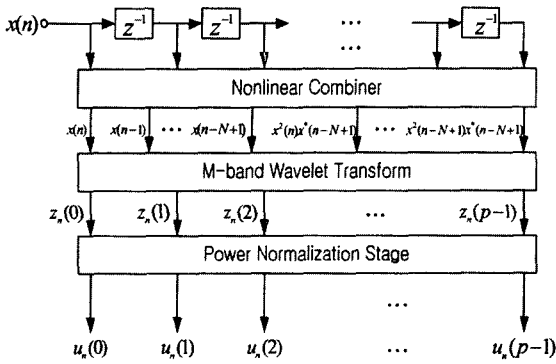
$$(\mathbf{z}[n] = [z_n(0), \dots, z_n(p-1)]^T)$$

여기서 행렬  $\mathbf{T}$  는 (12)의 구조를 가지는 유니터리 MDWT 행렬이다:

$$\mathbf{T} = \prod_{j=J}^1 \mathbf{T}_p^{(j)} \quad (12)$$



(a)



(b) Block A diagram

그림 2. 볼테라 기반 등화기 구조

Fig. 2. The architecture of the Volterra series model equalizer

여기서

$$\mathbf{T}_p^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{(j)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

(12)-(13)에서,  $p$  ( $p = N + N(N+1)N/2$ )는 필터의 길이이며  $j$ 는 스케일 단계를 나타낸다.  $\mathbf{I}^{(j)}$ 는 스케일  $j$ 에서 크기  $(p - p/M^{j-1}) \times (p - p/M^{j-1})$ 를 가지는 단위 행렬이며,  $\mathbf{T}^{(j)}$ 는 스케일  $j$ 에서 크기  $(p/M^{j-1}) \times (p/M^{j-1})$ 를 가지는 M-band 웨이블릿 변환 행렬이다[6].

여기서 MDWT 행렬  $\mathbf{T}$ 는 유니터리 행렬이다(즉,

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}).$$

변환된 입력 벡터  $\mathbf{z}[n]$ 은 추정한 전력  $P_n(i)$ 의 제곱근으로 정규화되며, 추정 전력  $P_n(i)$ 는  $z_n^2(i)$ 를  $0 \leq \beta < 1$  사이의 매개 변수를 갖는 exponentially decaying window로 필터링하여 얻을 수 있다[2]:

$$P_n(i) = \beta P_{n-1}(i) + (1 - \beta)z_n^2(i), \quad u_n(i) = \frac{z_n(i)}{\sqrt{P_n(i) + \epsilon}}, \quad i = 0, 1, \dots, p-1 \quad (14)$$

작은 상수  $\epsilon$ 은 추정 전력  $P_n(i)$ 이 영에 가까울 때, numerical instability를 피하기 위해서 사용된다. 위에서 언급한 선형 처리 방법은 입력 벡터 자기 상관 행렬의 고유치를 감소시켜 거의 1에 가깝게 함으로써 적응 볼테라 필터의 수렴 속도를 향상시키게 된다.

전력 정규화된 신호  $u_n(i)$ 는 그림 2에서와 같이 변환 영역 LMS 적응 볼테라 필터의 입력신호이며, 시스템 커널 갱신 알고리즘은 다음과 같다.

$$e(n) = d(n) - \mathbf{u}^T[n]\mathbf{g}[n], \quad \mathbf{g}[n+1] = \mathbf{g}[n] + \mu e(n)\mathbf{u}^*[n] \quad (15)$$

여기서  $\mathbf{u}[n]$ 은  $\mathbf{u}[n] = [u_n(0), \dots, u_n(p-1)]^T$ 이며  $\mathbf{g}[n]$ 은 적응 등화기의 변환 영역 커널 벡터이다. 또한, 원래의 볼테라 커널 벡터  $\mathbf{h}_v$ 는 다음 식으로부터 추정될 수 있다.

$$\mathbf{h}_v = \mathbf{T}^T \mathbf{g}[n] \quad (16)$$

### V. 모의 실험 및 결과

제안된 방법의 보상기 성능을 평가하기 위하여 위성 통신 채널의 기본 모델을 이용하였다. 위성 통신 채널에서는, 송신단에서 전송된 신호가 위성에 도달하기까지 그 크기가 심하게 감소된다. 이렇게 감소된 신호의 전력을 증폭하기 위하여 Traveling-Wave-Tube(TWT)를 이용한다[8]-[10].

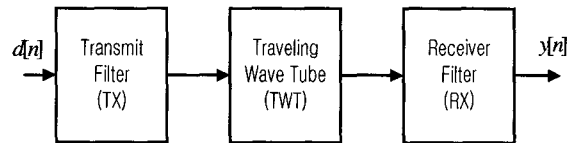


그림 3. 위성 통신 채널의 baseband 모델  
Fig. 3. The satellite communication channel model reduced to baseband

위성통신 채널의 기본 모델은 송신단(TX)과 수신단(RX)의 선형 필터와 신호의 증폭을 위한 TWT의 비선형 필터로 모델링 될 수 있다[8][9]. 본 모의 실험에서는 송신기와 수신기 필터는 각각 TX=[0.8, 0.1]와 RX=[0.9, 0.2, 0.1]로 하였으며, TWT의 비선형성은 다음과 같은 AM/AM과 AM/PM변환에 의해 표현될 수 있다.

$$A(r) = \frac{\alpha_a r}{1 + \beta_a r^2}, \quad \phi(r) = \frac{\alpha_\phi r^2}{1 + \beta_\phi r^2} \quad (17)$$

$\alpha_a = 2, \beta_a = 1, \alpha_\phi = \pi/3, \beta_\phi = 1$ , 그리고  $r$ 은 입력

크기이다. 입력 신호는 12-PSK 신호와 4-QAM 신호로 이루어진 신호이다[10]. M-밴드 웨이블릿 변환으로 22-밴드 코사인 변조 웨이블릿 행렬(스케일 1에서 44x44 크기를 가지는 변환행렬)을 이용하였다[7]. 제안된 알고리즘의 성능을 비교하기 위하여 500회의 독립 시행 실시하여 얻은 ensemble average mean square error를 DFT-LMS, DCT-LMS, DWT-LMS기법들과 normalized LMS를 이용한 적응 볼테라 필터링 기법[8,9,10]을 비교하였고, 또한 다음과 같이 정의된 Normalized Mean-Squared Error(NMSE)를 이용하여 그 성능을 정량적으로 비교하였다.

$$NMSE = \frac{\sum_{k=1}^L |d_k - y_k|^2}{\sum_{k=1}^L |d_k|^2} \quad (18)$$

여기서  $L$ 은 실험한 신호의 길이이고,  $d_k$ 는  $k$  번째 입력 신호이고  $y_k$ 는 보상된 등화기의 출력값이다. 모의 실험 결과는 그림 4이고 표 1 (SNR: 30dB 경우)은 이에 대응하는 NMSE를 나타낸다.  $p$ 를 필터 길이라고 할 때, NLMS 알고리즘의 곱하기 수는  $3p+2$ , 제안된 MDWT 변환영역 LMS 알고리즘의 곱하기 수는 대략  $p^2+6p+1$ 이다. 모의실험결과 계산량은 증가하지만, 다양한 분포(예, Gaussian, non-Gaussian 등)의 입력 신호 경우에 있어서도 DFT-LMS, DCT-LMS, DWT-LMS와 normalized LMS(NLMS) 보다 알고리즘의 수렴 성능이 뛰어난을 알 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는, M-밴드 코사인 변조 웨이블릿 변환을 이용한 LMS 적응 볼테라 등화 방법을 제시하였으며, 계산량은normalized LMS보다 증가하나, 이산 M-밴드 웨이블릿과 전력 정규화의 처리 과정을 통해 입력 신호를 decorrelating 시킴으로써 적응 볼테라 등화기의 수렴속도를 향상시킬 수 있음을 보였다. 모의 실험을 통해 다양한 분포의 입력 신호 경우에도 제안된 알고리즘(MDWT-LMS)이 DFT-LMS, DCT-LMS, DWT-LMS 및 기존의 NLMS 알고리즘과 비교하여도 시스템 선형화에 적용되었을 때 보다 빠른 수렴 성능을 나타냄을 확인할 수 있었다.

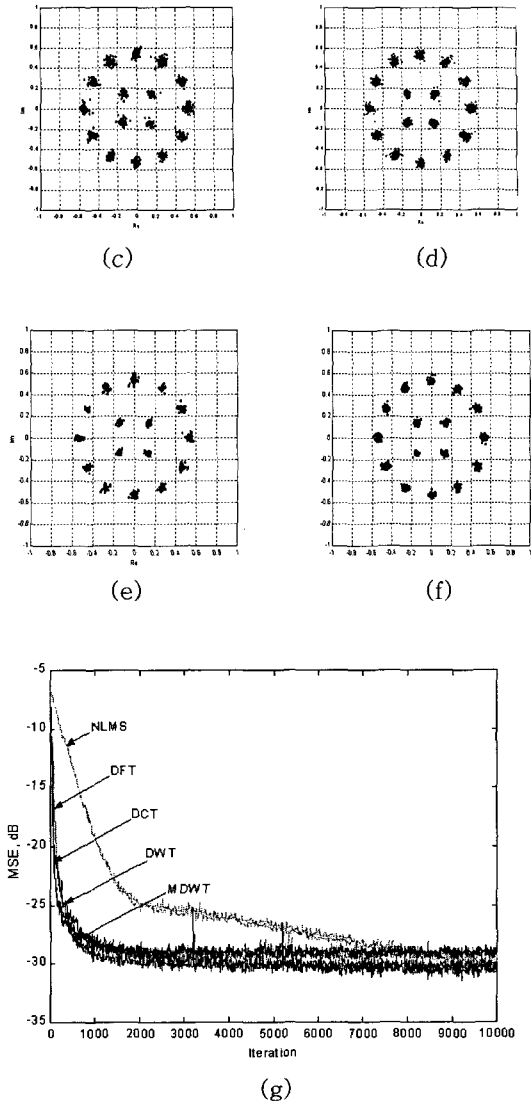
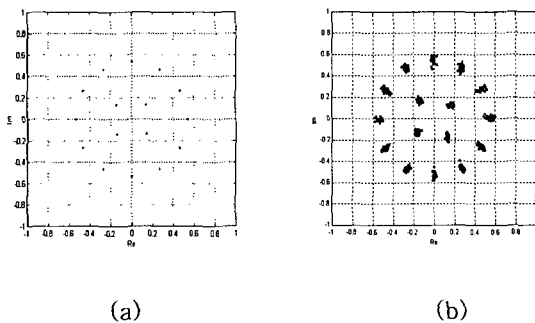


그림 4. 모의실험 결과. (a) 입력신호, (b)-(f) 보상된 출력, (g) 적응 수렴 곡선.

Fig. 4. Simulation results. (a) Input, (b)-(f) Compensated outputs(NLMS, DFT, DCT, DWT, and MDWT, respectively), (g) Error learning curve.

표 1. 등화기 출력단에서 NMSE.

Table 1. NMSE at the equalizer output.

적용 적응 알고리즘	NMSE
NLMS	$3.9388 \times 10^{-2}$
DFT	$9.6130 \times 10^{-3}$
DCT	$8.8285 \times 10^{-3}$
DWT	$8.1670 \times 10^{-3}$
MDWT	$7.1835 \times 10^{-3}$

참고문헌

[1] F. Beaufays, "Transform-domain adaptive filters:

an analytical approach," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 422-431, Feb., 1995.

[2] G. Glens, K. Berberidis, and S. Theodoridis, "Efficient least squares adaptive algorithms for FIR transversal filtering," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 4, pp. 13-41, Jul., 1999.

[3] Peter N. Heller, "Rank m wavelet matrices with n vanishing moments," *SIAM Journal on Matrix Analysis*, 16: 502-518, 1995.

[4] R. D. Koilpillai and P. P. Vaidyanthan, "Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 4, pp. 770-783, Apr., 1992.

[5] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H. Guo, *Introduction to wavelets and wavelet transforms*, Prentice Hall, 1998.

[6] G. Strang and T. Nguyens, *Wavelet and Filter*

*Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1997.

[7] R. A. Gopinath and C. S. Burrus, "On cosine-modulated wavelet orthonormal bases," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, no. 2, pp. 162-176, Feb., 1995.

[8] C. S. Eun, *Design and Comparison of Nonlinear Compensators*, Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin, Dec., 1995.

[9] I. S. Park, *Design of equalizers for Nonlinear Digital Communication System using Volterra filtering techniques*, Ph.D. Dissertation, The University of Texas at Austin, Dec., 1994.

[10] S. Y. Kim, *Utilization of Signal Constellation and A Volterra Series-Based Compensator for The Linearization of Digital Satellite Communication Channels*, M.S. Thesis, Hanyang Univ. Dec., 1998.



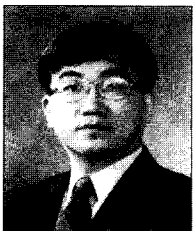
**김 영 근**

1973년 1월 25일생. 1999년 2월 숭실대학교 전기공학과 졸업(학사). 2001년 2월 한양대학교 대학원 전기공학과 석사 졸업. 관심분야는 통신 및 적응신호처리.



**강 동 준**

1975년 9월 1일생. 2000년 2월 충북대학교 전기전자공학부 졸업(학사). 2000년 3월~현재 한양대학교 대학원 전기공학과 석사 과정. 관심분야는 적응신호처리, 비선형 시스템 식별 및 선형화 이론.



**남 상 원**

1957년 2월 24일생. 1981년 서울대 공대 전자공학과 졸업. 1987년 Univ. of Texas at Austin 졸업(석사). 1990년 Univ. of Texas at Austin 졸업(공학박). 1991년 9월~현재 한양대 공대 전자전기컴퓨터공학부 부교수. 관심분야는 비선형

신호 및 시스템, 디지털 고차통계 신호처리, 웨이블릿 이론, 신경회로망 등.