

관측 불가능한 바이어스가 있는 시스템의 칼만필터 추정특성

Estimation Properties of Kalman Filter for the System with Unobservable Bias

송기원, 이상정
(Ki Won Song and Sang Jeong Lee)

Abstract : By showing the existence of the ARE solution and the convergence property of the DRE solution, this paper proves that a Kalman filter for the linear system with the unobservable bias is stable. It is also shown that the Kalman filter has a biased steady state estimation error whose covariance is affected mainly by the unobservable bias. Finally, the results are illustrated through a 2nd order system example including the inertial navigation system.

Keywords : Kalman filter, Riccati equation, unobservable bias, SDINS

I. 서론

본 논문은 바이어스가 있는 선형시스템을 위한 확장형 상태변수 칼만필터(augmented state Kalman filter)의 안정도 및 추정특성에 대해 다루고자 한다. 특히 바이어스의 크기는 알 수 없고 관측 불가능한 것으로 가정하며, 이러한 선형시스템의 실제 예는 관성항법장치에서 볼 수 있다. 바이어스가 있는 선형시스템에 대한 바이어스 분리형 칼만필터 연구는 Friedland와 Ignagni 등에 의해 제시되어 최근까지 지속되고 있다. 우선 Friedland는 바이어스를 분리 추정하여 칼만필터의 계산 양은 줄이고 계산 정확도를 높였다[1][2]. 바이어스가 아닌 랜덤워크 또는 서서히 변하는 바이어스가 있는 선형시스템에 대해서 Alouani 와 Hseih는 이러한 동특성의 바이어스를 분리하여 추정하는 수정된 바이어스 분리형 칼만필터를 제시한 바 있다[3][4]. 그러나 이러한 바이어스 분리형 칼만필터는 최적특성이 연구되었을 뿐 선형시스템의 관측 가능성과 제어 가능성을 근거로 한 안정성의 문제는 다루어지지 않았다.

칼만필터의 안정성은 대수 리카티 방정식(ARE) 해가 존재함과 아울러 미분 리카티 방정식(DRE) 해가 수렴함을 증명함으로써 보여진다[5]. 선형시스템이 검출 가능하면 ARE 해가 존재하며 특히 허수축 상에 존재하는 고유값이 제어 가능하면 안정해(stabilizing solution)가 존재하고 제어 불가능이면 근안정 해(almost stabilizing solution)가 존재한다[6][7][8]. 그리고 DRE 해는 ARE의 여러 해 중에 가장 큰 양의 반한정 행렬로 수렴한다[9][10]. 그런데 본 논문에서 다루는 선형시스템은 관측 불가능한 바이어스를 포함하고 있어 칼만필터가 안정하기 위해 요구되는 이제까지 알려진 최소한의 조건인 검출가능, 즉 허수축을 포함한 양의 실수부를 가지는 고유값의 모드에 대한 관측 가능조건을 만족하지 못한다. 따라서 기존의 연구 결과로는 ARE 해의 존재는 물론 DRE 해의 수렴을 보장할 수 없으므로 관측 불가능한 바이

어스가 있는 선형시스템에 대한 칼만필터의 안정성을 알 수 없다.

본 논문에서는 관측 불가능한 바이어스가 있는 선형시스템에 대한 칼만필터가 안정함을 추정오차 공분산 방정식으로 대변되는 리카티 방정식의 해석을 통해 보이고자 한다. 우선 리카티 방정식 해석이 용이하도록 관측 가능한 상태변수와 관측 불가능한 바이어스가 결합하지 않은 등가 선형시스템으로 변환한다. 이 등가 선형시스템에 대한 리카티 방정식의 해석으로부터 원래의 선형시스템에 대한 ARE 근안정 해의 존재와 DRE 해가 수렴하는지를 증명한다.

관측 불가능한 바이어스가 있는 선형시스템을 위한 칼만필터가 안정하다는 결과는 검출가능이란 조건에 비해 원점에 있는 모드(관측 불가능한 바이어스로 인한 극점)는 관측 불가능해도 된다는 것으로 완화시킨 것이다. 그러나 관측 불가능한 바이어스가 있는 선형시스템에 대한 칼만필터의 추정오차 공분산으로서 DRE 해가 수렴한 행렬은 검출 가능한 경우의 칼만필터와 다르게 관측 불가능한 바이어스에 의존하는 수렴특성이 있음을 보인다. 이러한 DRE 해의 수렴특성은 2차 시스템의 예제를 통하여 해석적으로 확인하고, 관성항법장치의 정지상태에서 자세오차를 칼만필터로 추정하는 실제 적용 예에서 관측 불가능한 센서의 바이어스가 자세오차 추정에 어떠한 영향을 미치는지 시뮬레이션을 통해 보인다.

II. 칼만필터 안정성

본 논문에서 다루는 시스템은 다음과 같다.

$$dx/dt = Fx + Bb + Gw \quad (1)$$

$$db/dt = 0 \quad (2)$$

$$z = H_1x + H_2b + v \quad (3)$$

여기서 $x \in R^n$, $b \in R^r$, $z \in R^m$ 이며, 가우시안 백색잡음 w

와 ν 는 $E(ww^T) = Q$, $E(\nu\nu^T) = R$, $E(w\nu^T) = E(\nu w^T) = 0$, $E(w) = 0$, $E(\nu) = 0$ 와 같이 정의한다. 그리고 $(F \ H_1)$ 는 관측 가능하며, Q 와 R 은 양의 한정행렬로 가정한다. 바이어스를 상태변수에 포함시켜 시스템을 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (4)$$

$$z = [H_1 \ H_2] \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} + \nu \quad (5)$$

이와 같이 확장된 시스템의 바이어스는 관측 불가능하고 제어 불가능하다고 가정하며 편의상, 이와 같은 시스템을 LSUB(linear system with unobservable bias)로 부른다. 우선 LSUB에 대한 칼만필터 추정오차 공분산의 거동특성을 나타내는 리카티 방정식의 해석을 용이하도록 먼저 LSUB를 관측 가능한 상태변수와 관측 불가능한 바이어스가 결합하지 않은 등가의 선형시스템으로 변환한다.

LSUB에 대한 관측가능성 그래미안(observability Gramian) 행렬 O_a 를 생각하자. $(F \ H_1)$ 이 관측가능이므로 O_a 의 랭크(rank)는 n 이다. 따라서 가우스(Gauss) 소거법에 의해 O_a 는 다음과 같이 n 개의 서로 독립된 행벡터와 $[m(n+r)-n]$ 개의 영벡터로 구성되는 행렬로 변환될 수 있다.

$$O_a = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_1 F & H_1 B \\ H_1 F^2 & H_1 F B \\ \vdots & \vdots \\ H_1 F^{n+r-1} & H_1 F^{n+r-2} B \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} I_{n \times n} & D \\ 0_{[m(n+r)-n] \times n} & 0_{[m(n+r)-n] \times r} \end{bmatrix}$$

등가시스템 변환행렬 T 를

$$T = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & D \\ 0 & I_{r \times r} \end{bmatrix} \quad (7)$$

와 같이 두고 새로운 상태변수를

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & D \\ 0 & I_{r \times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} \quad (8)$$

로 정의하자. O_a 의 커널(kernel)을 K_o 라 하고, $k \in K_o$ 이면 $O_a k = 0$ 이다. 그런데 $[I_{n \times n} \ D]$ 의 커널은 (6)으로부터 O_a 의 커널과 같으므로 $[I_{n \times n} \ D]k = 0$ 이다. 또한

$$[I_{n \times n} \ D] \begin{bmatrix} -D \\ I_{r \times r} \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

이므로 $[-D^T \ I_{r \times r}]$ 의 모든 행벡터는 O_a 의 커널에 속하고,

$$O_a = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times n} \\ 0_{m \times m} & H_1 F \\ \vdots & \vdots \\ 0_{m \times m} & H_1 F^{n+r-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ F & B \end{bmatrix} \quad (10)$$

의 우변의 첫 번째 행렬은 $(F \ H_1)$ 가 관측 가능하면 $n+m$ 의 랭크를 가지므로

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ F & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ I_{r \times r} \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

가 성립한다. (11)의 결과를 이용하여 (8)과 같이 변환된 상태변수에 대한 등가시스템은 다음과 같이 주어진다. 이와 같은 시스템을 ELSUB(equivalent linear system with unobservable bias)로 부른다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (12)$$

$$z = [H_1 \ 0] \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} + \nu \quad (13)$$

ELSUB에 대한 DRE 해를

$$U(t) = \begin{bmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{12}^T(t) & U_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

와 같이 놓으면 DRE는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{U}_{11}(t) &= F U_{11}(t) + U_{11}(t) F^T \\ &\quad - U_{11}(t) H_1^T R^{-1} H_1 U_{11}(t) + G Q G^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$\dot{U}_{12}(t) = (F - U_{11}(t) H_1^T R^{-1} H_1) U_{12}(t) \quad (16)$$

$$\dot{U}_{22}(t) = -U_{12}^T(t) H_1^T R^{-1} H_1 U_{12}(t) \quad (17)$$

그리고 LSUB에 대한 DRE 해를

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}^T(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

와 같이 놓으면 $P(t) = T^{-1} U(t) T^{-T}$ 의 관계가 있으므로 $U(t)$ 와 $P(t)$ 의 사이의 등가식은 다음과 같다.

$$P_{11}(t) = U_{11}(t) - D U_{12}^T(t) - U_{12}(t) D^T + D U_{22}(t) D^T \quad (19)$$

$$P_{12}(t) = U_{12}(t) - D U_{22}(t) \quad (20)$$

$$P_{22}(t) = U_{22}(t) \quad (21)$$

이제부터 ARE 해는 $\bar{\cdot}$ 로 그리고 DRE가 수렴한 해는 $\tilde{\cdot}$ 로 표시한다.

정리 1: LSUB에서 $(F \ G)$ 가 제어 가능하면 ARE는 근안정 해가 존재하며, $U_{11}(0)$ 가 양의 반한정 행렬이면 DRE 해는 수렴한다.

증명: 먼저 ELSUB에 대한 ARE 해의 존재와 DRE 수렴에 대해 증명한 후 이 결과를 이용하여 LSUB에 대한 ARE 해의 존재와 DRE 해가 수렴함을 보이겠다.

$(F \ H_1)$ 가 관측 가능하고 $(F \ G)$ 가 제어 가능하므로 (15)는 일반적인 DRE 형태로서 유일한 안정해인 양의 한정행렬 \bar{U}_{11} 가 ARE 해로서 존재한다[11]. $(F - \bar{U}_{11} H_1^T R^{-1} H_1)$ 는 안정한 행렬이므로 (16)에서 $\bar{U}_{12} = 0$ 이며, \bar{U}_{22} 는 임의의 상수행렬이 된다. 이와 같은 ARE해를 사용한 페루프 시스템 행렬은 아래와 같이 주어지므로 ARE 해는 근안정 해가 된다.

$$\begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{U}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} F - \bar{U}_{11} H_1^T R^{-1} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$(F \ H_1)$ 가 관측 가능하고 $(F \ G)$ 가 제어 가능하므로 $U_{11}(0) \geq 0$ 이면 $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{11}(t) = \bar{U}_{11}$ 이므로 (15)에서 DRE 해는 ARE의 안정해 \bar{U}_{11} 로 수렴한다[12]. 그리고 $\lim_{t \rightarrow \infty} (F - U_{11}(t) H_1^T R^{-1} H_1) = (F - \bar{U}_{11} H_1^T R^{-1} H_1)$ 이고 $(F - \bar{U}_{11} H_1^T R^{-1} H_1)$ 는 안정하므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{12}(t) = 0$ 이다. 따라서 (16)의 DRE 해도 ARE 해 $\bar{U}_{12} = 0$ 로 수렴한다. 그리고 $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{22}(t) = 0$ 이므로 (17)로부터 $U_{22}(t)$ 는 임의의 \bar{U}_{22} 로 수렴한다.

상기의 ELSUB에 대한 ARE 해의 존재와 DRE 수렴 결과를 이용하여 원래 시스템의 LSUB에 대한 ARE 해의 존재와 DRE가 수렴함을 살펴보자. $P(t) = T^{-1} U(t) T^{-T}$ 이므로 $\bar{P} = T^{-1} \bar{U} T^{-T}$ 이고, $\tilde{P} = T^{-1} \tilde{U} T^{-T}$ 이다. 따라서 \bar{U} 가 존재하면 \bar{P} 가 존재하며, \tilde{U} 가 수렴하면 \tilde{P} 도 수렴한다. 그리고 이러한 \bar{P} 를 사용한 페루프 시스템 행렬은 아래와 같으므로 \bar{P} 는 \bar{U} 와 마찬가지로 근안정 해가 된다.

$$\begin{bmatrix} F & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12}^T & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T \\ H_2^T \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} F - \bar{U}_{11} H_1^T R^{-1} H_1 & B - \bar{U}_{11} H_1^T R^{-1} H_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

정리 1은 ELSUB에서 $(F \ G)$ 의 제어 가능 조건으로부터 ARE 해 \bar{U}_{11} 에 의한 페루프 시스템 행렬 $(F - \bar{U}_{11} H_1^T R^{-1} H_1)$ 가 안정하다는 사실을 근거로 ARE 해의 존재와 DRE 해가 수렴함을 밝혔다. 다음으로 관측 가능하나 제어 불가능한 바이어스에 대한 칼만필터가 점근적(asymptotically)인 안정성을 가짐을 보여주는 [13]을 이용하여 정리 1의 $(F \ G)$ 의 제어가능 조건이 아래의 정리와 같이 완화될 수 있음을 보인다.

따름정리 1: ELSUB는 ARE의 근안정 해가 존재하며,

$$W(t_1, t_0) = \Phi(t_1, t_0) U_{11}(t_0) \Phi^T(t_1, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) G Q G^T \Phi(t_1, \tau) d\tau \quad (24)$$

가 $t_1 > t_0$ 인 어떤 t_1 에 대해 정칙(non-singular)행렬이고, 근안정해 \bar{U}_{11} 가 $U_{11}(t_0) > \bar{U}_{11}$ 를 만족하면 DRE 해는 수렴한다. 여기서 $\Phi(t_1, t_0)$ 는 F 의 전이행렬이며, $U_{11}(t_0)$ 는 (15)의 초기행렬이다.

증명: $(F \ H_1)$ 가 관측 가능하므로 (15)에서 근안정 해인 양의 반한정 행렬 \bar{U}_{11} 가 ARE 해로서 존재한다[11]. 그리고 (17)에 대한 ARE인

$$\bar{U}_{12}^T H_1^T R^{-1} H_1 \bar{U}_{12} = 0 \quad (25)$$

에서 $H_1 \bar{U}_{12} = 0$ 이다. 또한 (16)에 대한 ARE

$$(F - \bar{U}_{11} H_1^T R^{-1} H_1) \bar{U}_{12} = 0 \quad (26)$$

로부터 $H_1 \bar{U}_{12} = 0$ 이므로 $F \bar{U}_{12} = 0$ 이다. 그러므로 $[H_1 \ H_1 F \ H_1 F^2 \ \dots \ H_1 F^{n-1}] \bar{U}_{12} = 0$ 이다. 그런데 $(F \ H_1)$ 가 관측 가능하므로 $\bar{U}_{12} = 0$ 이다. 그리고 \bar{U}_{22} 는 임의의 상수행렬이 된다. 이와 같은 ARE해를 사용한 페루프 시스템 행렬은 (22)와 동일하게 주어지므로 ARE 해는 근안정 해가 된다.

ELSUB에서 ARE의 근안정해를 \bar{U}_{11} 로 놓고 $U_{11}(t_0) > \bar{U}_{11}$ 이면 $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{11}(t) = \bar{U}_{11}$ 이므로 (15)에서 DRE 해는 ARE의 근안정해 \bar{U}_{11} 로 수렴한다[14]. 그리고 [13]의 정리 3.1과 같이 $W(t_1, t_0)$ 가 정칙행렬이면 $(F - U_{11}(t) H_1^T R^{-1} H_1)$ 는 지수적(exponentially)으로 안정하지는 않지만 점근적으로 안정하므로 (16)으로부터 $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{12}(t) = 0$ 이다. 그리고 $\lim_{t \rightarrow \infty} U_{22}(t) = 0$ 이므로 (17)로부터 $U_{22}(t)$ 는 임의의 \bar{U}_{22} 로 수렴한다.

따라서 본 정리에서 ELSUB에 대한 ARE 해의 존재와 DRE 해가 수렴함이 증명됨으로서 또한 LSUB에 대한 ARE 해의 존재와 DRE 해가 수렴함도 증명된다. ■

III. 칼만필터 수렴특성

리카티 방정식에서 초기오차 공분산 $P(0)$ 와 DRE 해가 수렴한 \tilde{P} 사이에 $P(0) \geq \tilde{P}$ 이면 칼만필터의 추정오차 공분산이 감소되는 수렴특성을 갖는데 검출가능 조건에서 DRE 해가 ARE 해 \bar{P} 로 수렴하므로 초기오차 공분산 $P(0)$ 를 $P(0) \geq \bar{P}$ 로 선정하면 $P(0) \geq \tilde{P}$ 가 된다[10]. 그러나 검출 가능한 시스템과는 다르게 2장에서 살펴본 LSUB를 위한 ARE에서 \bar{P}_{22} 는 임의의 행렬이었으며, DRE가 수렴한 행렬 \tilde{P}_{22} 도 확정할 수 없었으므로, $P_{22}(0) \geq \tilde{P}_{22}$ 를 위한 초기

오차 공분산 조건도 선정되지 못했다.

본장에서는 다음의 정리에서 먼저 \bar{P}_{22} 를 유도하여 \bar{P} 의 대각행렬에 대해 $P_{22}(0) \geq \bar{P}_{22}$ 와 $P_{11}(0) \geq \bar{P}_{11}$ 되기 위한 초기오차 공분산 조건은 무엇인가 알아보고 $P(0) - \bar{P}$ 의 한정행렬 특성도 살펴본다. 그리고 LSUB를 위한 칼만필터의 추정오차가 바이어스 되는 특성이 있음을 설명하고 추정오차 공분산 $P_{11}(t)$ 에 대하여 좋은 수렴특성이 있는 경우의 조건에 대해서도 살펴본다.

정리 2 : 양의 한정행렬 \bar{U}_{11}^+ 는 $Re\lambda(F - \bar{U}_{11}^+ H_1^T R^{-1} H_1) < 0$ 를 만족하는 ARE 해이고 음의 한정행렬 \bar{U}_{11}^- 는 $Re\lambda(F - \bar{U}_{11}^- H_1^T R^{-1} H_1) > 0$ 를 만족하는 ARE 해로 놓자[11]. $U_{11}(0) > \bar{U}_{11}^+$ 이면 DRE 해가 수렴한 \bar{U}_{22} 는 다음과 같으며, 이때 $U_{22}(0) \geq \bar{U}_{22}$ 이다. 여기서 $Re\lambda(\cdot)$ 는 행렬에 대한 고유값의 실수부를 나타낸다.

$$\bar{U}_{22} = U_{22}(0) - U_{12}^T(0)[U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^-]^{-1}U_{12}(0) \quad (27)$$

증명 : 우선 $V(t) \equiv U_{11}(t) - \bar{U}_{11}^-$ 라 놓고 미분식을 구하면

$$\dot{V}(t) = [F - U_{11}(t)H_1^T R^{-1}H_1]V(t) + V(t)[F - U_{11}(t)H_1^T R^{-1}H_1]^T + V(t)H_1^T R^{-1}H_1 V(t) \quad (28)$$

와 같이 정리된다. 정리 1의 결과에 따라 $(F - U_{11}(t)H_1^T R^{-1}H_1)$ 가 안정하므로 $U_{11}(0) > \bar{U}_{11}^-$ 일 때 일반적인 DRE인 (15)의 단조 비증가(monotonic non-increasing) 성질과 $U_{11}(t)$ 가 \bar{U}_{11}^- 에 수렴하는 특성에 의해 $U_{11}(t) \geq \bar{U}_{11}^-$ 이므로 $U_{11}(t) - \bar{U}_{11}^- > 0$ 이다[12][15]. 따라서 $V^{-1} \equiv \Lambda$ 놓을 수 있으며 $V^{-1}(t)\dot{V}(t)V^{-1}(t) = -\dot{\Lambda}(t)$ 이므로 (28)에 $V^{-1}(t)$ 를 곱하면

$$-\dot{\Lambda}(t) = \Lambda(t)(F - U_{11}(t)H_1^T R^{-1}H_1) + (F - U_{11}(t)H_1^T R^{-1}H_1)^T \Lambda(t) + H_1^T R^{-1}H_1 \quad (29)$$

와 같이 변환된다. 그리고 $t \leq t_1$ 에 대해 $(F - U_{11}(t)H_1^T R^{-1}H_1)$ 의 전이행렬을 $\Phi_K(t_1, t)$ 로 놓으면 Lyapunov 방정식 (29)의 시변 해는

$$\Lambda(t) = \Phi_K^T(t_1, t)\Lambda(t_1)\Phi_K(t_1, t) + \int_t^{t_1} \Phi_K^T(\tau, t)H_1^T R^{-1}H_1\Phi_K(\tau, t)d\tau \quad (30)$$

이다. 여기서 $(F - U_{11}(t)H_1^T R^{-1}H_1)$ 가 안정하므로 $t=0, t_1=\infty$ 에 대하여

$$\Lambda(0) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} \Phi_K^T(\tau, 0)H_1^T R^{-1}H_1\Phi_K(\tau, 0)d\tau \quad (31)$$

이며[16][17], 또한 $\Lambda \equiv V^{-1}$ 로부터 $\Lambda(0) = [U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^-]^{-1}$ 이다. 그런데 (16)에서 $U_{12}(t) = \Phi_K(t, 0)U_{12}(0)$ 이고, (17)로부터 $U_{22}(t)$ 에 대한 수렴식은

$$\bar{U}_{22} = U_{22}(0) - U_{12}^T(0) \left\{ \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} \Phi_K^T(\tau, 0) H_1^T R^{-1} H_1 \Phi_K(\tau, 0) d\tau \right\} U_{12}(0) \quad (32)$$

와 같으므로 (27)이 증명된다. 그리고 $U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^- > 0$ 이므로 $U_{12}(0) \neq 0$ 이면 $U_{22}(0) > \bar{U}_{22}$ 이며, $U_{12}(0) = 0$ 이면 $U_{22}(0) = \bar{U}_{22}$ 이다. ■

또한 정리 2는 LSUB과 ELSUB의 관계에서 $P_{22}(t) = U_{22}(t)$ 이므로 $P_{22}(0) \geq \bar{P}_{22}$ 임도 보여주고 있다. 그리고 $P_{11}(0) \geq \bar{P}_{11}$ 이 되기 위한 조건은 $\bar{P}_{11} = \bar{U}_{11}^+ + D\bar{P}_{22}D^T$ 이므로 (27)의 \bar{P}_{22} 로부터 $P_{11}(0) \geq \bar{U}_{11}^+ + D(U_{22}(0) - U_{12}^T(0)[U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^-]^{-1}U_{12}(0))D^T$ 이다. 다음으로 $U_{12}(0) \neq 0$ 일 때 $P(0) \succ \bar{P}$ 와 $U_{12}(0) = 0$ 일 때 $P(0) \geq \bar{P}$ 임을 증명한다.

정리 3 : $U_{11}(0) > \bar{U}_{11}^+$ 이고 $U_{12}(0) \neq 0$ 일 때 $P(0) \succ \bar{P}$ 이다.

증명 : $P(t) = T^{-1}U(t)T^{-T}$ 이므로 $P(0) = T^{-1}U(0)T^{-T}$ 이고, $\bar{P} = T^{-1}\bar{U}T^{-T}$ 이다. 따라서 $P(0) - \bar{P} = T^{-1}[U(0) - \bar{U}]T^{-T}$ 로부터 $U(0) - \bar{U} \succ 0$ 임을 보여 $P(0) - \bar{P} \succ 0$ 를 증명하고자 한다. 우선 $U(0) - \bar{U}$ 를 분할행렬로 표현하면

$$U(0) - \bar{U} = \begin{bmatrix} U_{11}(0) & U_{12}(0) \\ U_{12}^T(0) & U_{22}(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{U}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{U}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}(0) - \bar{U}_{11} & U_{12}(0) \\ U_{12}^T(0) & U_{22}(0) - \bar{U}_{22} \end{bmatrix} \quad (33)$$

가 된다. 여기서 \bar{U}_{11} 가 \bar{U}_{11}^+ 로 수렴하므로 $U_{11}(0) > \bar{U}_{11}^+$ 이다. 따라서 (33)과 같은 분할행렬에 대한 [18]의 양의 한정행렬을 위한 필요충분 조건식

$$U_{22}(0) - \bar{U}_{22} - U_{12}^T(0)(U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^-)^{-1}U_{12}(0) \quad (34)$$

를 이용한다. $U_{12}(0) \neq 0$ 이므로 $U_{22}(0) - \bar{U}_{22}$ 에 (27)의 결과를 대입하고 \bar{U}_{11} 는 \bar{U}_{11}^- 로 수렴하므로 (34)는

$$U_{12}^T(0)[(U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^-)^{-1} - (U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^-)^{-1}]U_{12}(0) \quad (35)$$

과 같이 정리되는데, (35)가 양의 한정행렬이면 $U(0) - \bar{U} \succ 0$ 가 된다. 그러나 $U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^- > U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^+$ 로부터 $(U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^-)^{-1} < (U_{11}(0) - \bar{U}_{11}^+)^{-1}$ 이므로 (35)는 양의 한정행렬이 아니다. 따라서 이러한 결과는 분할행렬에 대한 [18]의 양의 한정행렬을 위한 필요충분 조건에 반하므로 $U(0) - \bar{U} \succ 0$ 이며, 또한 $P(0) - \bar{P} \succ 0$ 이다. ■

따름정리 2 : $U_{11}(0) > \overline{U_{11}^+}$ 이고, $U_{12}(0) = 0$ 일 때 $P(0) \geq \overline{P}$ 이다.

증명 : $U_{12}(0) = 0$ 이면 $U_{22}(0) = \overline{U_{22}}$ 이므로 (33)은

$$U(0) - \overline{U} = \begin{bmatrix} U_{11}(0) - \overline{U_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

이 된다. 그런데 $\overline{U_{11}}$ 가 $\overline{U_{11}^+}$ 로 수렴하므로 $U_{11}(0) - \overline{U_{11}} > 0$ 이다. 따라서 $U(0) \geq \overline{U}$ 이며, 또한 $P(0) \geq \overline{P}$ 이다. ■

위에서 추정오차의 공분산 $P_{11}(t)$ 와 $P_{22}(t)$ 가 감소될 수 있는 초기오차 공분산의 조건을 제시하였는데, 정리 2에 따르면 초기오차 공분산이 $\overline{P_{22}}$ 를 결정하는 주된 요소임을 알 수 있으며, 정리 3과 따름정리 2에 의하면 $U_{12}(0) \neq 0$ 일 때 $P(0) \not\geq \overline{P}$ 이며, $U_{12}(0) = 0$ 일 때 $P(0) \geq \overline{P}$ 이다. 이러한 결과는 검출 가능한 시스템에 대한 칼만필터와 다른 것으로 추정오차 공분산의 대각선 분할행렬 대해서 $P_{11}(0) \geq \overline{P_{11}}$ 와 $P_{22}(0) \geq \overline{P_{22}}$ 가 되는 수렴특성은 있으나, 비록 $P_{11}(0) \geq \overline{P_{11}}$, $P_{22}(0) \geq \overline{P_{22}}$ 이더라도 $U_{12}(0) \neq 0$ 일 때 $P(0) \not\geq \overline{P}$ 가 되어 추정오차 공분산 행렬은 감소되지 않는 독특한 수렴 특성이 있음을 보여주고 있다. 다음은 검출 가능한 시스템에 대한 칼만필터와 또 다른 추정특성으로 LSUB를 위한 칼만 필터의 추정오차 평균과 공분산이 바이어스 됨을 설명한다.

설명 1 : LSUB에 대한 상태변수 x 의 추정오차를 δx 그리고 바이어스 b 에 대한 추정오차를 δb 라 놓자. ELSUB에서 $\lambda = x + Db$ 의 추정오차 $\delta \lambda$ 의 평균은 $E[\delta \lambda] = E[\delta x + D\delta b]$ 와 같은데 $(F \ H_1)$ 가 관측 가능하므로 바이어스 없는 추정특성으로부터 $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\delta \lambda] = 0$ 이다.

따라서

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\delta x] = - \lim_{t \rightarrow \infty} E[D\delta b] \quad (37)$$

이다. 그런데 $E[\delta b]$ 의 동적 시스템은

$$E[\dot{\delta b}] = -U_{12}(t)H_1^T R^{-1}H_1(E[\delta x] + DE[\delta b]) \quad (38)$$

이고, $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\dot{\delta b}] = 0$ 이므로 $t=0$ 에서 $E[\delta x] = E[D\delta b] = 0$ 가 아니면 $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\delta b] = 0$ 는 보장될 수 없다. 또한 이 결과는 $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\delta b]$ 가 D 의 커널이 아니면 (37)로부터 $E[\delta x]$ 도 바이어스 됨을 보여주고 있다. 이러한 추정오차의 평균이 바이어스 되는 특성으로부터 $E[\delta x] \neq 0$, $E[\delta b] \neq 0$ 이므로

$$X_{11} = E[\delta x \delta x^T] = E[(\delta x - E[\delta x]) (\delta x - E[\delta x])^T] + E[\delta x] E[\delta x^T] \quad (39)$$

$$X_{22} = E[\delta b \delta b^T] = E[(\delta b - E[\delta b]) (\delta b - E[\delta b])^T] + E[\delta b] E[\delta b^T] \quad (40)$$

에서 실제 추정오차의 평균자승 $X_{11} > P_{11}$, $X_{22} > P_{22}$ 됨을 알 수 있다. 일반적으로 관측 가능한 시스템에 대한 칼만필터는 unbiased 추정특성을 가지는 것으로 알려져 있으나[5], LSUB를 위한 칼만필터는 비록 안정하나 추정오차의 평균이 바이어스 되는 좋지 않은 추정특성이 있음을 볼 수 있다. ■

설명1은 LSUB에 대한 칼만필터가 안정하나 추정오차 평균이 0으로 점근적 추정을 못하고 있어 실제 적용의 문제에서 추정오차가 뚜렷이 감소하는 칼만필터 추정성능을 보장하지 못함을 보여주고 있다. 그러나 다음의 설명 2는 관측 불가능한 바이어스가 비교적 작은 적용조건에서 LSUB에 대한 칼만필터가 안정하므로 상당한 추정성능을 보장하는 경우도 있음을 보여준다.

설명 2 : ELSUB에서 $U_{11}(0)$ 에 비해 $\overline{U_{11}}$ 의 크기를 무시할 수 있어 $U_{11}(0) - \overline{U_{11}} \approx U_{11}(0)$ 라고 하자. 이때 $P_{12}(0) = 0$ 이면 (19)로부터 $U_{11}(0) = P_{11}(0) + DP_{22}(0)D^T$, (20)으로부터 $U_{12}(0) = DP_{22}(0)$, (21)로부터 $P_{22}(0) = U_{22}(0)$, $\overline{P_{22}} = \overline{U_{22}}$ 이므로 (27)은

$$\begin{aligned} \overline{U_{22}} &\approx U_{22}(0) - U_{12}^T(0) \overline{U_{11}^{-1}}(0) U_{12}(0) \\ &= P_{22}(0) - P_{22}(0)D^T(0) [P_{11}(0) \\ &\quad + DP_{22}(0)D^T(0)]^{-1} DP_{22}(0) \end{aligned} \quad (41)$$

와 같이 정리되며, 또한 (41)은 matrix inversion lemma에 의해

$$\overline{P_{22}} \approx (P_{22}^{-1}(0) - D^T P_{11}^{-1}(0) D)^{-1} \quad (42)$$

와 같이 되는데, 이때 $P_{11}(0) \gg DP_{22}(0)D^T$ 이면 $P_{22}^{-1}(0) \gg D^T P_{11}^{-1}(0) D$ 이므로 (42)에서 $\overline{P_{22}} \approx P_{22}(0)$ 이다. 따라서 충분히 작은 $\overline{U_{11}}$ 에 대해 $\overline{P_{11}} = \overline{U_{11}^+} + D\overline{P_{22}}D^T \approx DP_{22}(0)D^T$ 로 근사화 할 수 있다. 이러한 결과는 $\overline{U_{11}}$ 와 $\overline{U_{11}}$ 가 무시할 정도로 충분히 작고, 초기에 관측 불가능한 바이어스와 동적 상태변수의 상호 공분산이 없어 $P_{12}(0) = 0$ 일 때 $P_{11}(0) \gg DP_{22}(0)D^T$ 와 같이 관측 불가능한 바이어스가 비교적 작으면 $\overline{P_{11}}$ 는 $DP_{22}(0)D^T$ 로 가깝게 수렴되기 때문에 $P_{11}(t)$ 가 충분히 감소될 수 있는 좋은 수렴특성이 있음을 보여주고 있다. ■

IV. 예 제

본 장은 LSUB의 2차 시스템의 예제로 2, 3장에서 제시된 칼만필터 특성을 리카터 방정식의 완전해로서 보이고, 또한 실제 대상 플랜트인 관성항법장치를 예제로 칼만필터의 안정도 및 추정특성을 전산 시뮬레이션으로 밝히고자 한다. LSUB의 2차 시스템 예제는 정리 1과 같이 $(F \ G)$ 가 제어 가능한 경우로

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (43)$$

$$z = [1 \ d] \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} + \nu \quad (44)$$

와 같다. 그리고 (7)과 같은 변환행렬에 의한 ELSUB은

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (45)$$

$$z = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} + \nu \quad (46)$$

이며, $q = E[w^2]$, $r = E[\nu^2]$ 로 가정한다. ELSUB에 대한 DRE는

$$\dot{u}_{11} = 2u_{11} - r^{-1}u_{11}^2 + q \quad (47)$$

$$\dot{u}_{12} = (1 - r^{-1}u_{11})u_{12} \quad (48)$$

$$\dot{u}_{22} = -r^{-1}u_{12}^2 \quad (49)$$

이다. 여기서 ARE 해는 $\bar{u}_{11} = r \pm \sqrt{r^2 + rq}$, $\bar{u}_{12} = 0$ 이며, $\mu \equiv \sqrt{r^2 + rq}$, $k_- \equiv r - \mu = r - \sqrt{r^2 + rq}$, $k_+ \equiv r + \mu$, $\alpha = r + \sqrt{r^2 + rq}$, $\beta = r - \sqrt{r^2 + rq}$ 라 놓으면 (47)~(49)의 DRE 해는

$$u_{11}(t) = \frac{k_+ \alpha - k_- \beta e^{-2\frac{\mu}{r}t}}{\alpha - \beta e^{-2\frac{\mu}{r}t}} \quad (50)$$

$$u_{12}(t) = \frac{2\mu}{\sqrt{(\alpha - \beta e^{-2\frac{\mu}{r}t})(-\beta + \alpha e^{2\frac{\mu}{r}t})}} u_{12}(0) \quad (51)$$

$$u_{22}(t) = u_{22}(0) - \frac{(1 - e^{-2\frac{\mu}{r}t})}{(\alpha - \beta e^{-2\frac{\mu}{r}t})} u_{12}^2(0) \quad (52)$$

이 된다. (50)~(52)에서 DRE해의 수렴값을 살펴보면 $\tilde{u}_{22} = u_{22}(0) - u_{12}^2(0)/\alpha$ 이고, $\tilde{u}_{11} = k_+$ 와 $\tilde{u}_{12} = 0$ 는 ARE 해와 같다. 이러한 결과로부터 LSUB의 DRE 해의 수렴값은

$$\tilde{p}_{11} = k_+ + d^2(p_{22}(0) - \frac{1}{\alpha} [p_{12}(0) + d p_{22}(0)]^2) \quad (53)$$

$$\tilde{p}_{12} = -d(p_{22}(0) - \frac{1}{\alpha} [p_{12}(0) + d p_{22}(0)]^2) \quad (54)$$

$$\tilde{p}_{22} = p_{22}(0) - \frac{1}{\alpha} [p_{12}(0) + d p_{22}(0)]^2 \quad (55)$$

이다. (55)에 나타난 수렴특성은 정리 2의 내용과 일치하며, $p_{12}(0) = 0$ 이면 (55)는

$$\tilde{p}_{22} = [1 - \frac{1}{1 + (p_{11}(0) - k_-)/d^2 p_{22}(0)}] p_{22}(0) \quad (56)$$

가 된다. 따라서 $p_{11}(0) \gg d^2 p_{22}(0)$ 이면 설명 2와 같이 $k_+ \approx 0$ 이고 $k_- \approx 0$ 일 때 $\tilde{p}_{11} \approx d^2 p_{22}(0)$ 이다.

다음은 따름정리 1의 경우와 같이 $U_{11}(0) > \bar{U}_{11}$ 로 놓을 때 (24)의 $W(t_1, t_0)$ 가 정착행렬이 되는 예제로서 관성항법 장치에 대하여 정지상태에서 영속도를 근거로 초기 자세오차를 비롯한 속도오차와 센서의 바이어스를 칼만필터로 추정하는 것을 가정한다. 이때 상태변수 x_a 는

$$x_a = [\delta v_n \ \delta v_e \ \delta \psi \ \delta \psi_n \ \delta \psi_d \ \delta \omega_n \ \delta \omega_e \ \delta \omega_d \ \delta f_n \ \delta f_e]^T \quad (57)$$

이며, 여기서 속도오차는 δv_n , δv_e , 그리고 자세오차는 $\delta \psi_n$, $\delta \psi_e$, $\delta \psi_d$, 가속도계 바이어스는 δf_n , δf_e , 자이로 바이어스는 $\delta \omega_n$, $\delta \omega_e$, $\delta \omega_d$ 등으로 가정한다. 이때 시스템행렬 F_a , 입력행렬 G_a , 그리고 측정행렬 H_a 는 각각

$$F_a = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_d & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\Omega_d & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_d & -\Omega_n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_d & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_n & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$G_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

이다. 여기서 Ω_E 는 지구자전 각속도, L 은 위도, g 는 지구 중력이며 $\Omega_n = \Omega_E \cos L$, $\Omega_d = \Omega_E \sin L$ 이다. (58)~(60)에 대한 관측가능 행렬을 식(6)의 형태로 정리하면 다음과 같으며, 랭크는 7이다.

$$Q_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/\Omega_n & 0 & \tan L/g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\Omega_d/g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\Omega_e/g & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

시뮬레이션 조건은 초기오차 공분산으로 속도오차 (0.001m/s)², 자세오차 (30mrad)², 가속도계 바이어스 (1mg)², 자이로 바이어스 (0.1deg/hr)²을 가정한다. 그리고 공정잡음으로 자이로 백색잡음은 ($0.001\text{deg/hr}^{1/2}$)², 가속도계 공정잡음은 ($0.01\text{m/s}^{3/2}$)²이며, 측정잡음은 (0.01m/s)²로 가정한다. 또한 상태변수의 초기 속도오차는 0.001m/s , n, e, d 축의 자세오차는 각각 $10, -25, 40\text{mrad}$ 그리고 n, e 축의 가속도계 바이어스는 각각 $1.6, 2.2\text{mg}$ 로 가정하였으며, n, e, d 축의 자이로 바이어스는 각각 $0.1, 0.2, -0.15\text{deg/hr}$ 이다. 시뮬레이션 결과로서 칼만필터가 계산한 추정오차 공분산과 상태변수의 추정오차를 살펴본다.

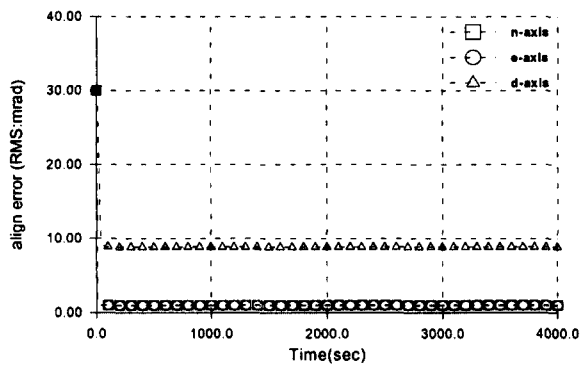


그림 1. 자세오차 공분산.
Fig. 1. Attitude error covariance.

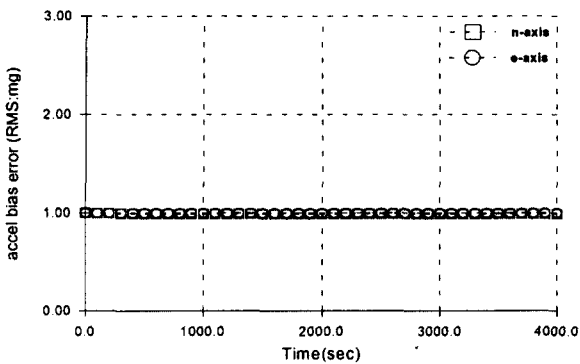


그림 2. 가속도계 바이어스 공분산.
Fig. 2. Accelerometer bias covariance.

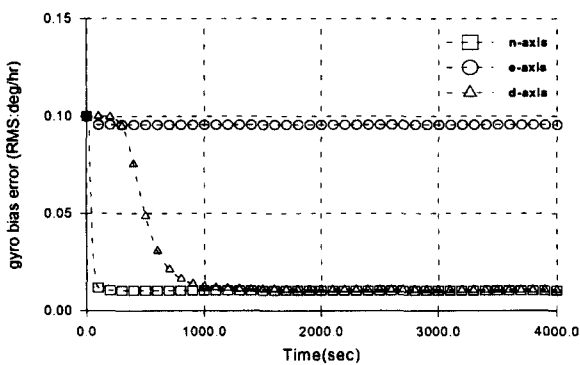


그림 3. 자이로 바이어스 공분산.
Fig. 3. Gyro bias covariance.

자세오차, 가속도계 바이어스, 그리고 자이로 바이어스에 대해 칼만필터에서 계산된 추정오차 공분산 행렬의 대각원소의 결과는 그림 1~3이며, 상태변수 추정오차는 그림 4~6과 같다. 이러한 시뮬레이션 결과는 2장 및 3장에서 해석한 관측 불가능한 바이어스가 있는 선형시스템을 위한 칼만필터가 안정하나 바이어스 된 추정특성을 가지게 된다는 내용과 잘 일치한다. 즉 그림 1~6은 비교적 장시간인 4000초에서 모두 발산하지 않고 안정되어 있는 것을 살펴볼 수 있으나, 정상상태에서 d 축 자세오차 공분산이 크게 바이어스 되고 있으며 n, e 축 가속도계 바이어스 공분산과 e 축 자이로 바이어스 공분산은 초기값을 그대로 유지하고 있다.

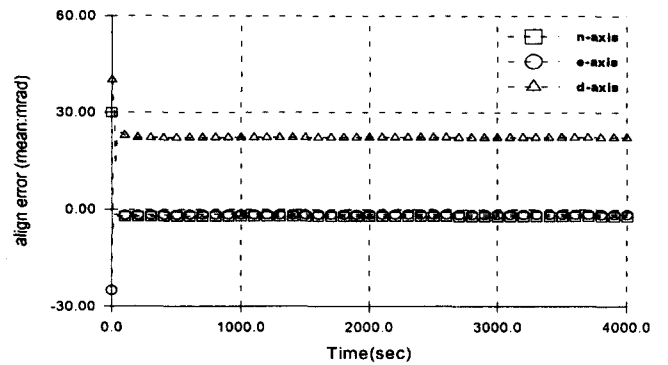


그림 4. 자세오차 평균.
Fig. 4. Attitude error mean.

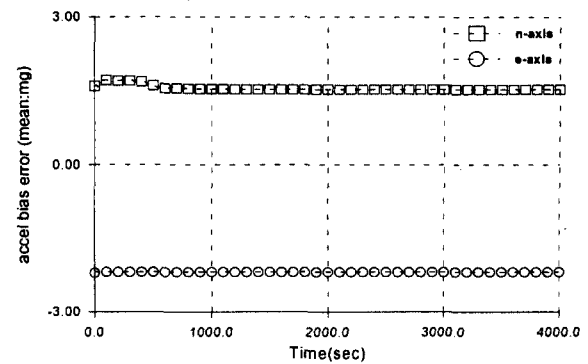


그림 5. 가속도계 바이어스 평균.
Fig. 5. Accelerometer bias mean.

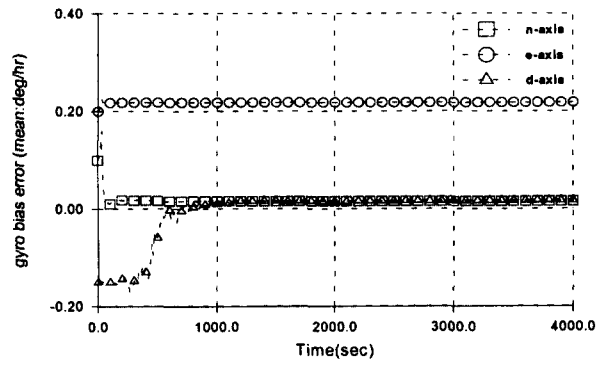


그림 6. 자이로 바이어스 평균.
Fig. 6. Gyro bias mean.

또한 추정오차의 평균이 공분산과 대응되어 점근적으로 0으로 수렴하지 않고 바이어스 되고 있음을 볼 수 있다.

그런데 시뮬레이션 결과는 공정잡음과 측정잡음이 비교적 작고 초기오차 공분산의 비대각 원소가 0인 경우로서 설명 2의 내용도 잘 보여주고 있다. 즉 가속도계 바이어스와 e축 자이로 바이어스가 거의 추정됨이 없이 초기값을 유지하는 것은 $\bar{P}_{22} \approx P_{22}(0)$ 의 사실을 보여주고 있다. 그리고 $P_{\delta f_n}(0)$ 는 δf_n , $P_{\delta f_e}(0)$ 는 δf_e , 그리고 $P_{\delta \omega_e}(0)$ 는 $\delta \omega_e$ 에 대한 각각의 초기오차 공분산으로 가정하면 $DP_{22}(0)D^T$ 는 아래와 같은데 이 결과는 시뮬레이션 결과의 \bar{P}_{11} 와 근사하다.

$$DP_{22}(0)D^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P_{\delta f_n}(0)}{g^2} & 0 & 0 & -\frac{P_{\delta f_n}(0)}{g^2} \Omega_x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{P_{\delta f_e}(0)}{g^2} & -\frac{P_{\delta f_e}(0)}{g^2} \tan L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{P_{\delta f_e}(0)}{g^2} \tan L & \frac{P_{\delta \omega_e}(0)}{\Omega_e^2} + \frac{P_{\delta f_e}(0)}{g^2} \tan^2 L & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P_{\delta f_n}(0)}{g} \Omega_x & 0 & 0 & \frac{P_{\delta f_n}(0)}{g^2} \Omega_x^2 \\ 0 & 0 & -\frac{P_{\delta f_e}(0)}{g} \Omega_x & 0 & 0 & \frac{P_{\delta f_e}(0)}{g^2} \Omega_x \Omega_e \end{bmatrix} \quad (62)$$

IV. 결론

본 논문은 LSUB에 대한 칼만필터가 안정함을 밝혔다. 이러한 결과는 칼만필터가 안정하기 위해 요구되는 이제까지 알려진 최소한의 조건인 검출가능이란 조건에 비해 원점은 관측 불가능해도 된다는 것으로 완화시킨 것이다. 그러나 추정오차 평균의 관점에서 0으로 점근적 추정특성을 보이는 검출 가능한 시스템에 대한 칼만필터와 다르게, LSUB에 대한 칼만필터는 검출 가능한 경우와 그렇지 못한 경우의 중간적 특성으로 안정하나 관측 불가능한 바이어스에 의해 추정오차가 바이어스 된다. 따라서 LSUB에 대한 적용에 있어서 관측 불가능한 바이어스 크기가 비교적 작은 제한된 조건에서 칼만필터의 추정성능이 보장 될 수 있다.

참고문헌

[1] B. Friedland, "Treatment of bias in recursive filtering," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-14, pp. 359-367, Aug., 1969.
 [2] M. B. Ignagni, "An alternate derivation and extension of Friedland's two-stage Kalman filter," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 26, pp. 746-750, 1981.
 [3] A. T. Alouani, P. Xia, T. R. Rice, and W. D. Blair, "On the

optimality of the two stage state estimation in the presence of random bias," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 38, pp. 1279-1282, Aug., 1993.
 [4] C. S. Hsieh and F. C. Chen, "Optimal solution of the two stage Kalman estimator," in *Proc. 34th Conf. Decision and Control*, New Orleans, pp. 1532-1537, Dec. 1995.
 [5] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*, vol. 82, 1960, pp. 95-108, Mar., 1961.
 [6] W. M. Wonham, "On a matrix Riccati equation of stochastic control," *SIAM J. Control*, vol. 6, pp. 681-698, 1968.
 [7] K. Martensson, "On the matrix Riccati equation," *Inform. Sci.*, vol. 3, pp. 17-49, 1971.
 [8] V. Kucera, "On nonnegative definite solutions to matrix quadratic equations," *Automatica*, vol. 8, pp. 413-423, 1972.
 [9] S. C. Chan, G. C. Goodwin, and K. S. Sin, "Convergency properties of the Riccati difference equation in optimal filtering of nonstabilizable systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-29, pp. 110-118, 1984.
 [10] M. A. Poubelle, I. R. Peterson, M. R. Gevers, and R. R. Bitmead, "A miscellany of results on an equation of Count J. F. Riccati," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-31, pp. 651-654, 1986.
 [11] P. Lancaster, L. Rodman, *Algebraic Riccati Equations*, Oxford University Press, 1995.
 [12] S. Bittanti, A. J. Laub, J. C. Willems, *The Riccati Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
 [13] D. O. Anderson, "Stability properties of Kalman-Bucy Filters," *J. Franklin Inst.*, vol. 291, no. 2, pp. 137-144, Feb., 1971.
 [14] G. D. Nicolao and M. R. Gevers, "Difference and differential Riccati equations : A note on the convergence to the strong solution," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-37, pp. 1055-1057, 1992.
 [15] R. Bitmead, M. R. Gevers, I. R. Peterson, and R. J. Kaye, "Monotonicity and stabilizability properties of solutions of the Riccati difference equation : Proposition, lemmas, theorems, fallacious conjectures and counter examples," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 5, pp. 309-315, Feb., 1985.
 [16] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control systems*, Jhon Wiley & Sons, New York, pp. 110-111, 1972.
 [17] D. O. Anderson and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, pp. 31-38, 1971.
 [18] E. Kreindler and A. Jameson, "Conditions for non-negativity of partitioned matrices," *IEEE Trans. Automatic Control*, pp. 147-148, Feb., 1972.



송 기 원

1962년 1월 3일생. 1984년 성균관대학교 전자공학과 졸업. 충남대학교 전자공학과 석사(1992), 동대학 박사과정 1998~현재. 1984년~현재 국방과학연구소 선임연구원. 관심분야는 강인제어/필터, 추정이론 및 관성항법.



이 상 정

1957년 8월 15일생. 1979년 서울대학교 전자공학과 졸업. 동대학원 석사(1981), 동대학 박사(1987). 1988년~현재 충남대학교 전자공학과 교수. 관심분야는 강인제어 및 GPS 항법.