



1. 머리말

오늘날과 같이 산업제품이 점차 경량화 되고 고속화되는 시점에서 진동문제는 제품의 품질 및 신뢰성을 결정하는 매우 중요한 문제로 부각되고 있으며 실제로 많은 제품의 개발 초기단계부터 진동이론을 적용한 제품의 설계가 이루어지고 있다. 구조물의 진동해석에 가장 일반적으로 쓰이는 기법은 유한요소법을 들 수 있다. 이러한 유한요소법의 적용은 그림 1과 같이 단순한 구조물의 경우 정적/동적해석시 설계 단계에서부터 비교적 정확하게 구조물의 동적거동을 예측할 수 있으므로 매우 유용한 도구라고 할 수 있다. 그러나 이 방법의 가장 큰 단점으로는 여러 단순화된 가정이 포함된 이론에 근거한 기법이기 때문에 복잡한 구조물이거나 혹은 비선형성이 강한 구조물일수록 실제모델과 유사성이 점차 떨어지게 되며 특히 고주파수 대역을 포함한 정밀한 분석을 필요로 할 경우에는 유한요소법만을 이용해서는 신뢰성 있는 결과를 도출하기가 어렵게 된다. 이러한

* E-mail : ljk@lgmach.co.kr

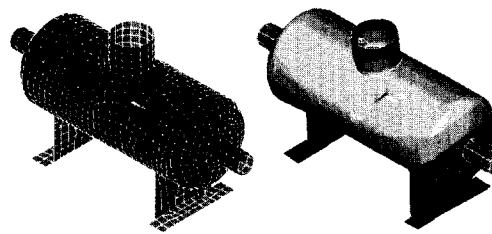


그림 1 (a) 압력용기의 유한요소모델
(b) 1차 모드형상

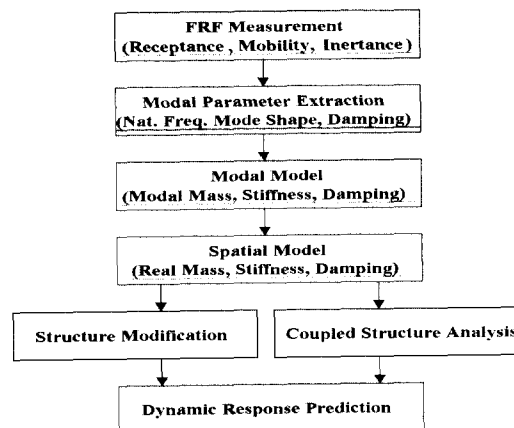


그림 2 모드 실험의 활용절차도

관점에서 볼 때 모드 실험(modal testing) 기법은 실제 나타나는 진동현상을 정확히 예측할 수 있다면 여러 가지 이론으로는

쉽게 접근할 수 없었던 진동현상을 정확히 파악할 수 있다는 점에 큰 장점이 있다고 할 수 있다. 모드 실험의 활용범위는 그림 2의 일반적인 각 절차의 적용단계에서부터 구조의 질량, 강성을 포함하는 재료의 물성치 및 감쇠특성을 추출할 수 있으며 기본적으로 모드계수의 추출을 통해 고유진동수 및 모드형상을 유도할 수 있다. 또한 최근 들어 각광받고 있는 결합구조해석(coupled structure analysis)⁽¹⁾을 통해서 단품단위의 결합된 실제모델(spatial model)의 진동특성을 예측할 수 있다. 이밖에 유한요소모델의 수정이나 비선형결합부의 동특성규명시에도 활용가치가 매우 높다고 할 수 있다. 다음 장에서는 모드 실험을 통해 얻게되는 주파수 응답함수와 실제 구조물과의 관계에 대해 알아보고 실험에 필요한 장비 및 산업현장에서 활용되고 있는 사례를 중심으로 소개하도록 한다.

2. 주파수 응답함수와 실제모델

이 장에서는 측정된 주파수 응답함수와 modal model 그리고 실제 모델인 spatial model과의 관계를 살펴보도록 한다. 질량, 강성, 감쇠항으로 구성된 다자유도계의 지배방정식은 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \{x\} &= [p]\{q\} \\ x_k &= \sum_{j=1}^n p_k^j q_j \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)의 $[p]$ 와 $[q]$ 는 각각 모달벡터와 모달좌표를 의미한다. k 와 j 는 좌표와 모

드번호이다. 식 (2)를 (1)에 대입하면 다음과 같이 비연계된 j 번째 모달 방정식으로 표현할 수 있다.

$$m_j \ddot{q}_j + c_j \dot{q}_j + k_j q_j = \sum_{i=1}^n p_i^j F_i(t) \quad (3)$$

여기서 n 은 총 좌표수이다. 만일 식 (3)에서 가진력이 특정점 i 에만 작용한다면 식 (3)은 식 (4)와 같이 표현된다.

$$m_j \ddot{q}_j + c_j \dot{q}_j + k_j q_j = p_i^j F_i(t) \quad (4)$$

식 (2)로부터 모드 j 와 k 번째 좌표에서의 변위와의 관계는 다음과 같으며

$$x_k^j = p_k^j q_j, \quad q_j = \frac{x_k^j}{p_k^j} \quad (5)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하고 양변을 j 번째의 모달벡터 p_j 로 나누면 다음의 식을 얻게된다.

$$\frac{m_j}{p_k^j p_i^j} \ddot{x}_k^j + \frac{c_j}{p_k^j p_i^j} \dot{x}_k^j + \frac{k_j}{p_k^j p_i^j} x_k^j = F_i(t)$$

혹은

$$m_{ki}^j \ddot{x}_k^j + c_{ki}^j \dot{x}_k^j + k_{ki}^j x_k^j = F_i(t) \quad (6)$$

식 (6)은 임의의 i 점에서 가진할 때 k 점에서의 동적응답을 나타내는 식이며 실제 모드 실험시 일반적으로 얻을 수 있는 관계식이다. 주의할 점은 식 (6)에서의 질량, 강성, 감쇠값은 효과계수(effective parameter)라고 하며 특정모드에서의 값이기는 하지만 모드해석에 사용되는 모달 질량, 강성, 감쇠값과 같은 모달계수(modal parameter)를 유도하기 위해서는 다음의 관계식을 사용해야 한다.

$$\begin{aligned} m_j &= m_{ki}^j d_k^j d_i^j \\ c_j &= c_{ki}^j c_k^j c_i^j \\ k_j &= k_{ki}^j k_k^j k_i^j \end{aligned} \quad (7)$$

구조감쇠(structural damping)을 갖는 구조물의 경우 운동방정식은 다음의 식으로 표현되며

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K + iK_g]\{x\} = \{F(t)\} \quad (8)$$

이를 다시 모달좌표상에 표현하면 식 (6)과 유사하게 다음과 같으며

$$m_{ki}^j \ddot{x}_k^j + (k + ik_g)_{ki}^j x_k^j = F_i(t) \quad (9)$$

이 경우 모달감쇠는

$$(k + ik_g)_j = (k + ik_g)_{ki}^j d_k^j d_i^j c \quad (10)$$

로 표현할 수 있다. 총 변위는 계측된 각 모드에서의 변위를 중첩하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_k = \sum_{j=1}^j x_k^j \quad (11)$$

여하튼 모드 실험을 통해서 얻을 수 있는 가장 중요한 값은 식 (7)과 (10)의 효과계수 및 모달계수이며 이 값을 정확히 알아야 신뢰성있는 실제시스템의 모델링 및 해석이 가능하다고 할 수 있다. 지금부터는 주파수응답 함수를 통해서 모달계수를 유도하는 방법에 대해서 알아보기로 한다. 모달계수를 추출하기 위해 흔히 쓰이는 방법으로 주파수 응답함수의 실수부와 허수부를 평면상에 도시하는 Nyquist plot을 이용한 흔히 예기하는 circle-fit⁽²⁾ 방법이 있다. 점성감쇠를 갖는 주파수 응답함수

(receptance(x/F))를 실수부와 허수부로 구분해서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Re}\left(\frac{x_k^j}{F_i}\right) &= \frac{k_{ki}^j - m_{ki}^j \omega^2}{(k_{ki}^j - m_{ki}^j \omega^2)^2 + (c_{ki}^j \omega)^2} \\ \text{Im}\left(\frac{x_k^j}{F_i}\right) &= \frac{-c_{ki}^j \omega}{(k_{ki}^j - m_{ki}^j \omega^2)^2 + (c_{ki}^j \omega)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

이 식을 평면상에 표시하면 그림 3과 같은 근사적인 원의 형태가 되지만 정확한 원은 아니며 따라서 이러한 Nyquist plot에서 모달계수를 추출하면 적지 않은 오차

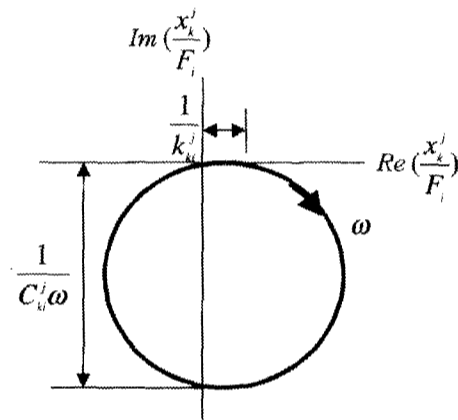


그림 3 점성감쇠를 갖는 주파수응답함수(x/F)의 Nyquist plot

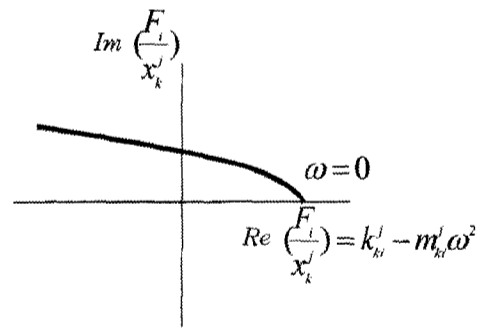


그림 4 점성감쇠를 갖는 주파수응답함수(F/x)의 Nyquist 선도(z-plane)

를 포함하게 된다. 그 이유는 그림 3은 주 위모드의 영향을 거의 받지 않는 순수한 이론적인 상황을 도시한 것으로 만일 이 모드에 주위모드의 영향이나 노이즈의 영향을 받지 않는다면 주파수가 0일 때 허수부와 실수부의 거리로서 효과 강성을 유도할 수 있겠지만 실제로 이러한 경우는 매우 드물게 발생하기 때문이다. 더구나 이 선도의 직경은 주파수에 반비례하기 때문에 정확한 계수를 추출하기가 어렵게 된다. receptance의 역수인 dynamic stiffness를 z 평면상에 표시하면 그림 4와 같은 포물선 형태를 갖게 되는데 식 (12)에서 보는 것처럼 주파수가 0일 경우 실수부값이 효과강성이 된다. 그러나 이 값 역시 Nyquist 선도에서 언급한 것처럼 신뢰성 있는 효과계수를 유도하기는 적절치 않으며 결과적으로 점성감쇠를 포함하는 구조물의 분석에 receptance는 적절치 않음을 알 수 있다.

다음으로 속도와 가진력의 비로 정의되는 주파수응답함수 mobility를 대상으로 한 circle-fit에 대해 논의하도록 한다. 주파수응답함수(mobility (v/F))를 실수부와 허수부로 구분해서 표현하면 다음의 식으로 표현되며 Nyquist 선도상에 도시하면 그림 5와 같다.

$$Re\left(\frac{v_k^j}{F_i}\right) = \frac{c_{ki}^j}{(c_{ki}^j)^2 + (m_{ki}^j \omega - \frac{k_{ki}^j}{\omega})^2} \quad (13)$$

$$Im\left(\frac{v_k^j}{F_i}\right) = \frac{-(m_{ki}^j \omega - \frac{k_{ki}^j}{\omega})}{(c_{ki}^j)^2 + (m_{ki}^j \omega - \frac{k_{ki}^j}{\omega})^2}$$

식 (13)을 mechanical impedance로 변환해서 실수부와 허수부로 나누면 식 (14)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{F_i}{v_k^j}\right) &= c_{ki}^j \\ Im\left(\frac{F_i}{v_k^j}\right) &= m_{ki}^j \omega - \frac{k_{ki}^j}{\omega} \end{aligned} \quad (14)$$

그림 5에 Nyquist 선도의 직경은 항상 일정하며 효과감쇠의 역수를 직경으로 하는 정확한 원입을 알 수 있다. 이를 다시

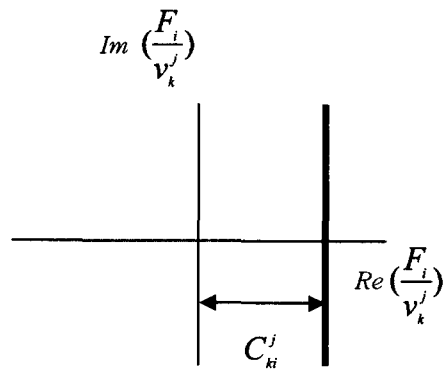


그림 5 점성감쇠를 갖는 주파수응답함수 (v/F)의 Nyquist plot

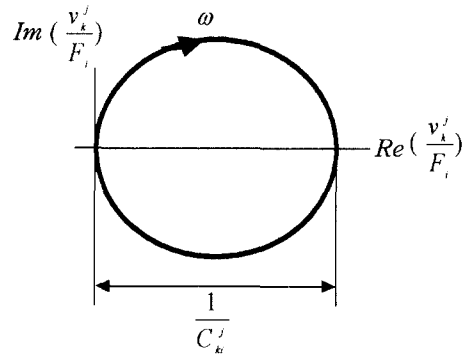


그림 6 점성감쇠를 갖는 주파수응답함수 (v/F)의 Nyquist 선도(z-plane)

z-plane상에서 표현하면 그림 6과 같이 일정한 효과감쇠를 기준으로 실수값을 갖음을 알 수 있으며 효과계수를 추출하는데 매우 신뢰성있는 값을 유도할 수 있다. 이와 유사하게 주파수응답함수를 inertance (F/a)로 circle-fit할 경우도 정확한 원이 아니며 따라서 신뢰성 있는 효과계수를 유도할 수 없다.

그러나 식 (8)과 같은 구조감쇠를 갖는 주파수응답함수의 경우는 식 (15)와 같이 표현할 수 있다.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{x_k^j}{F_i}\right) = \frac{k_{ki}^j - m_{ki}^j \omega^2}{(k_{ki}^j - m_{ki}^j \omega^2)^2 + (k_{ki}^j g_{ki}^j)^2} \quad (15)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{x_k^j}{F_i}\right) = \frac{-k_{ki}^j g_{ki}^j}{(k_{ki}^j - m_{ki}^j \omega^2)^2 + (k_{ki}^j g_{ki}^j)^2}$$

식 (15)을 dynamic stiffness로 변환해서 실수부와 허수부로 나누면 식 (14)와 같이 된다.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{F_i}{x_k^j}\right) = k_{ki}^j - m_{ki}^j \omega^2 \quad (16)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{F_i}{x_k^j}\right) = k_{ki}^j g_{ki}^j$$

그림 7과 8은 각각 구조감쇠를 포함하는 receptance의 Nyquist plot 이다. 점성감쇠의 경우와 달리 직경이 일정한 원을 형성함을 알 수 있으며 이를 통해 구하고자 하는 효과계수를 추출해 낼 수 있다. 즉 Nyquist 선도는 점성감쇠, 즉 감쇠특성이 주파수에 비례하는 경우에는 mobility 상에서, 구조감쇠특성을 갖는 구조물일 경우에는 receptance에서 circle-fit하는 것이 가장 바람직하다고 할 수 있다. 이와 같은 과정을 거쳐 유도된 각 유효계수는 식 (7)

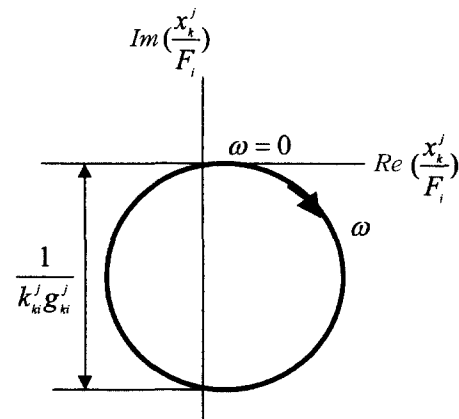


그림 7 구조감쇠를 갖는 주파수응답함수(x/F)의 Nyquist plot

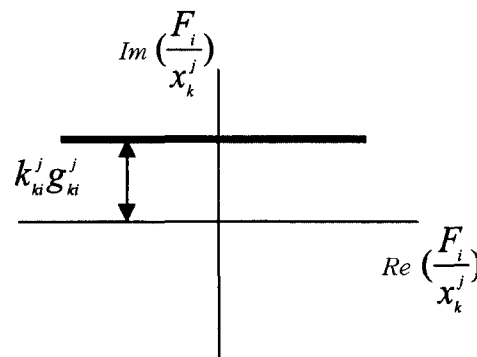


그림 8 구조감쇠를 갖는 주파수응답함수(x/F)의 Nyquist 선도(z-plane)

$$\begin{aligned} [M] &= [p^T]^{-1} [m] [p]^{-1} \\ [K] &= [p^T]^{-1} [k] [p]^{-1} \\ [C] &= [p^T]^{-1} [c] [p]^{-1} \\ [K + iKg] &= [p^T]^{-1} [k + ikg] [p]^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

의 유효계수와 모달 계수와의 관계를 거쳐 모달 모델로 변환되며 식 (1)과 같은 최종적인 실제모델의 질량, 강성, 감쇠는 다음의 관계식으로부터 유도된다.

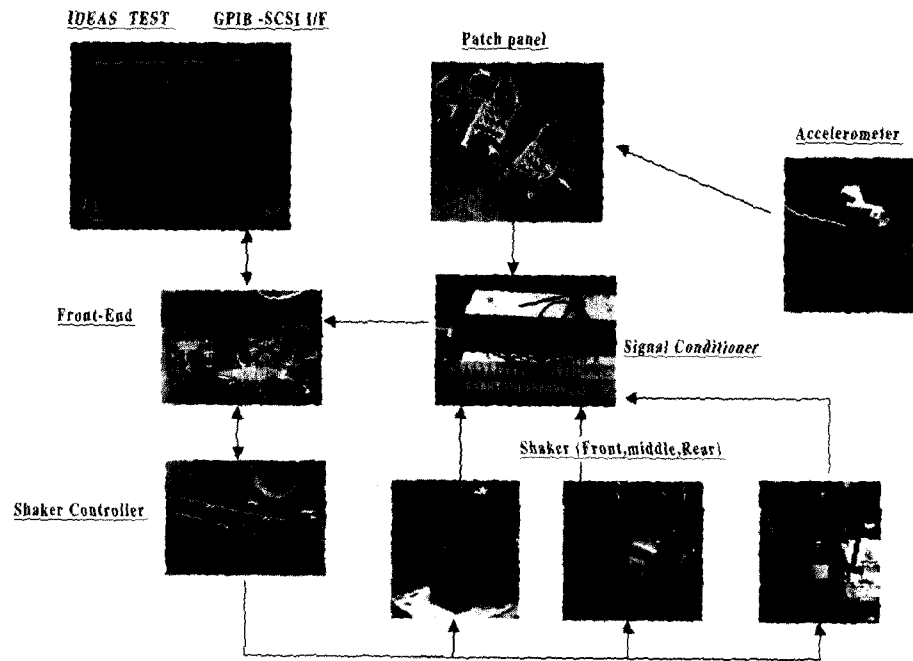


그림 9 모드 실험에 필요한 장비

식 (17)의 $\{p\}$ 는 모달벡터이며 Nyquist 선 도상의 직경과 원의 위상변화로서 크기와 방향을 결정하게 된다.

3. 모드 실험

모드 실험을 수행하기 위해서는 기본적으로 가속도, 힘변환기등의 센서가 필요하다. 실시간으로 측정하기 위해서는 측정점 만큼의 센서가 필요하게 된다. 다음으로 센서를 증폭시키기 위한 conditioning amp 가 필요한데 가속도계의 종류에 따라 charge type amp 인지 voltage type amp 인지를 결정해야 한다. 또 한가지 중요한 것은 가진 방법의 결정인데 구조물이 선형이고 소형에 가까울수록 impact hammer 를 이용하고 구조물이 복잡하고 비선형성

이 강할수록 유압가진을 통한 정현파 가진을 하게된다. 또한 입력신호의 위상을 분석할 수 있는 2채널 이상의 FFT 분석기가 필요하며 이밖에 interface설비 및 신호 발생기가 필요하다. 그림 9는 모드 실험에 필요한 장비들의 일예이다.

그림 10은 LG전선에서 생산하는 트랙터의 모드 실험 실험장치이며 그림 11은 측정점이고, 12는 계측된 주파수 응답함수이다. 가진은 마그네틱 가진기를 이용하여 정현파가진을 하였다. 그림 13은 LG전선에서 생산하는 유압사출기이다. 전체적인 구조물을 모드 실험하여 전체적인 동적안정성을 파악하고 구조적으로 취약할 것으로 판단되는 사출기 tie-bar부분을 별도로 실험하여 고유진동수 및 모드형상을 추출하여 구조적인 안정성을 파악하였다.

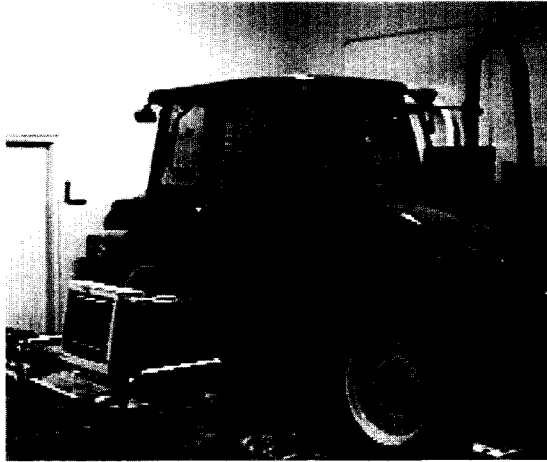


그림 10 모드 실험 set-up

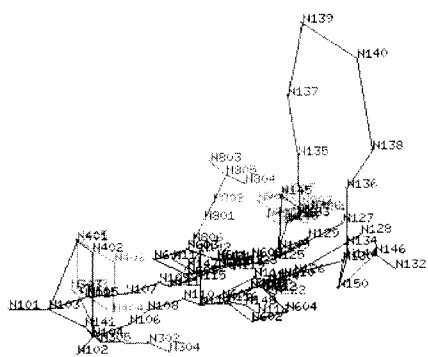


그림 11 모드 실험 가진 및 측정점 위치

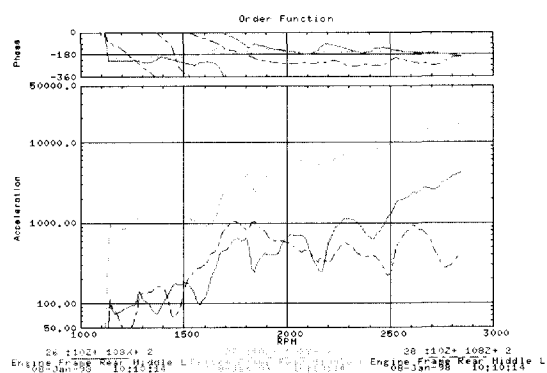


그림 12 실차의 주파수 응답함수

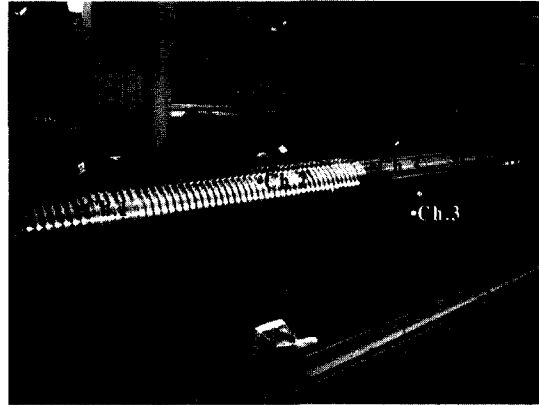


그림 13 유압사출기용 tie-bar의 모드 실험

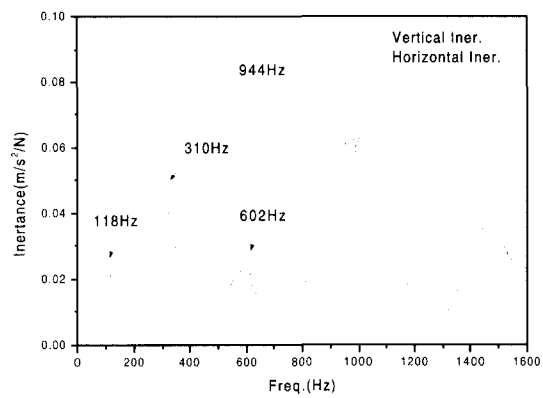


그림 14 Tie-bar의 주파수응답함수

위에서 측정된 주파수응답함수를 이용하여 2장에서 언급한 것처럼 Nyquist plot상에서 모드형상을 추출하면 그림 15를 얻을 수 있다. 이와같은 과정을 통해 구조물의 동적거동을 포함한 동특성을 파악하여 구조적으로 안정된 모델을 만들 수 있다. 그림 14는 측정된 주파수 응답함수이다.

4. 결론

급속한 산업화에 따른 산업제품의 경량

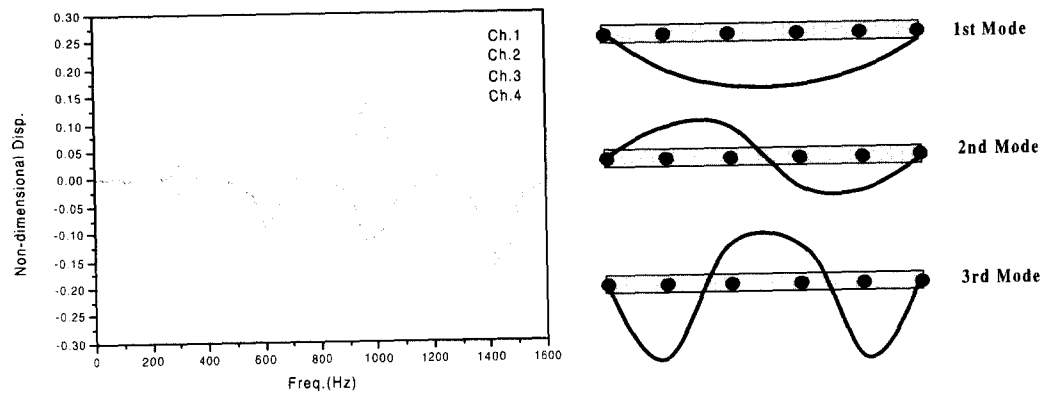


그림 15 Tie-bar의 모드형상

화 고속화는 필연적으로 구조적 불안정성을 유발하게 된다. 이러한 상황에 대처하기 위해서는 정밀한 구조해석을 통해서 문제를 해결하는 것도 방법이 될 수 있지만 모드 실험과 같은 실험방법을 적용하면 신뢰성있는 해결방안을 신속하게 도출해낼 수 있다. 이러한 모드 실험기법은 사용자의 응용능력에 따라 많은 유용한 데이터를 얻을 수 있으며 고도의 산업화에 따라 그 활용가치는 앞으로도 증가할 것으로 예상된다.

참고문헌

(1) Ewins, D. J., 1984, Modal Testing

; Theory & Practices, John Wiley & Sons, Inc., pp. 236~251.

(2) Goyder, H. G., 1980, "Method and Application of Structural Modeling from Measured Structural Frequency Response Data," J. of Sound Vib. 68(2), pp. 209~230.

(3) Meirovitch, L., 1967, Analytical Methods in Vibration, The Macmillan Co.

(4) Bendat, J. S. and A. G. Piesol, 1981, Engineering Application of Correlation and Spectral Analysis, John Wiley & Sons.