

<논 문>

증속 기어 전동 로터-베어링 시스템의 횡-비틀림 연성 유한요소 로터다이나믹 해석

A Coupled Lateral and Torsional FE Rotordynamic Analysis of Speed Increasing Geared Rotor-Bearing System

이 안 성 * · 하 진 응** · 최 동 훈***

An Sung Lee, Jin Woong Ha and Dong-Hoon Choi

(2000년 8월 9일 접수 : 2000년 12월 12일 심사완료)

Key Words : Geared Rotor-Bearing System(기어 전동 로터-베어링 시스템), Coupled Lateral and Torsional Vibration(연성 횡-비틀림 진동), Gear Meshing Effect(기어 물림 효과), FE Rotordynamics(유한요소 로터다이나믹), Turbo-Chiller(터보 냉동기)

ABSTRACT

In a transmission or geared rotor system a coupled phenomenon of lateral and torsional vibrations may occur due to the gear meshing effect. Particularly, in high speed or low vibration and low noise applications of geared rotor systems a coupled rotordynamic analysis is required to precisely predict their dynamic characteristics. In this paper a generalized finite element model of a gear pair element is developed, which actively couples the lateral and torsional vibrations due to the gear meshing effect. In the modeling the generalized forces due to the transmission error, geometrical eccentricities, and unbalances in the gear system are also considered. Then, using the developed gear pair element model a coupled unforced rotordynamic analysis is performed with a prototype 800 RT turbo-chiller rotor-bearing system having a bull-pinion speed increasing gear. Results show that the torsional vibration characteristics experience some changes due to the gear meshing and lateral dynamic coupling effect, but that they have no adverse effect and the lateral ones have no practical changes in an operating speed range.

기 호 설 명

C : $\cos \alpha$
 c_m : 기어 물림 감쇠
 e_1, e_2 : 기어의 기하학적 편심
 $e_t \sin(N_1 \Omega_1 t)$: 기어 물림점에서의 전달 오차
 k_m : 기어 물림 강성
 I_{t1}, I_{t2} : 기어의 횡 관성모멘트
 I_{p1}, I_{p2} : 기어의 극 관성모멘트
 M_1^G, M_2^G : 기어의 질량

N_1 : 구동 기어의 잇수
 $\{q^G\}$: 전체 좌표계의 일반화된 기어 쌍 변위 벡터
 $\{q^G\}$: 압력선 좌표계의 일반화된 기어 쌍 변위 벡터
 r_1, r_2 : 기초원 반경
 S : $\sin \alpha$
 U_1, U_2 : 기어의 불균형량
 α : 기어 압력각
 Ω_1, Ω_2 : 기어의 회전속도
Subscript 1, 2 : 구동, 피동 기어

* 정회원, 한국기계연구원 회전체연구그룹
E-mail : aslee@kimm.re.kr
Tel : (042)868-7356, Fax : (042)868-7335
** 한양대학교 대학원
*** 정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학부

1. 서 론

축 직경과 길이의 비가 $D/L > 0.01$ 인 일반 로터 시스템에서는 횡 진동과 비틀림 진동의 연성효과는 무시될 수 있는 것으로 알려져 있다⁽¹⁾. 그러나, 기어 박스 또는 기어

전동 로터-베어링 시스템에서는 기어 물림 효과에 의해 횡진동과 비틀림 진동이 능동적으로 연성되는 특성이 나타난다. 특히, 기어 쌍의 증속 시스템에 의해 고속 운전되는 터보 기계에서는 시스템의 동특성이 전통적인 비연성 횡 또는 비틀림 진동만의 해석결과와 허용 오차범위를 넘어 다를 수 있기 때문에, 이들 고성능 기계에서 저진동·저소음의 신뢰성 높은 설계를 달성하기 위해 횡-비틀림 연성 진동을 고려한 정밀 동특성 설계해석이 요구된다.

Neriya 외⁽²⁾는 단순 기어 축 시스템에 대해 기어 쌍을 두 개의 관성, 강성, 감쇠 요소로 연성(횡-비틀림이 연계된) 이산(discrete) 모델링하여 횡-비틀림 연성 진동해석을 수행하였다. Kahraman 외⁽³⁾는 기어 쌍을 연성 유한요소 모델링하여 기어 로터 시스템의 횡-비틀림 연성 진동을 연구하였으며, 자이로스코픽 효과는 고려되지 않았다. Rao 외⁽⁴⁾는 자이로스코픽 효과를 고려한 기어 쌍의 연성 유한요소 모델을 적용하여, 기어 박스 시스템 및 감속 기어를 갖는 터보 발전기 로터-베어링 시스템의 연성 고유진동 해석을 수행하였다. 한편, 이상을 비롯한 지금까지 대부분의 기어 물림 효과에 의한 횡-비틀림 연성진동 연구들은 감속 기능을 수행하는 기어 박스 또는 감속기어로 연결된 터보 기계 로터 시스템을 적용 대상으로 하고 있다.

본 논문에서는 기어 쌍의 일반화된 횡-비틀림 연성 유한요소 모델을 개발하고, 이를 불-피니언 기어의 증속기를 채택하고 있는 시제 개발 800 냉동톤 터보-냉동기에 적용하여 전체 냉동기 로터-베어링 시스템의 횡-비틀림 연성 고유진동 해석을 수행하고, 연성에 따른 진동 특성의 변화를 분석 검토하고자 한다.

2. 기어 쌍의 연성 유한요소 모델

기어 쌍의 변위 벡터는 Fig. 1의 압력선을 따른 좌표계로부터 다음으로 정의된다.

$$\{q^G\} = [u_1^G \ v_1^G \ \theta_{X1}^G \ \theta_{Y1}^G \ u_2^G \ v_2^G \ \theta_{X2}^G \ \theta_{Y2}^G \ \theta_{Z1}^G \ \theta_{Z2}^G]^T \quad (1)$$

기어 물림점에서의 힘과 모멘트의 평형으로부터 기어 쌍의 운동방정식들(부록의 식 (A1)~(A10))을 정리하여, 다음의 기어 쌍 연성 행렬 방정식이 얻어진다.

$$[M^G]\{\ddot{q}^G\} + \{[C^G] + [G^G]\}\{\dot{q}^G\} + [K^G]\{q^G\} = \{Q^G\} \quad (2)$$

여기서, $[M^G]$, $[C^G]$, $[G^G]$, $[K^G]$ 그리고 $\{Q^G\}$ 는 압력선 좌표계에서의 관성, 감쇠, 자이로스코픽, 강성 행렬과 외력 벡터를 나타내며, 이들은 부록의 식 (A11)~

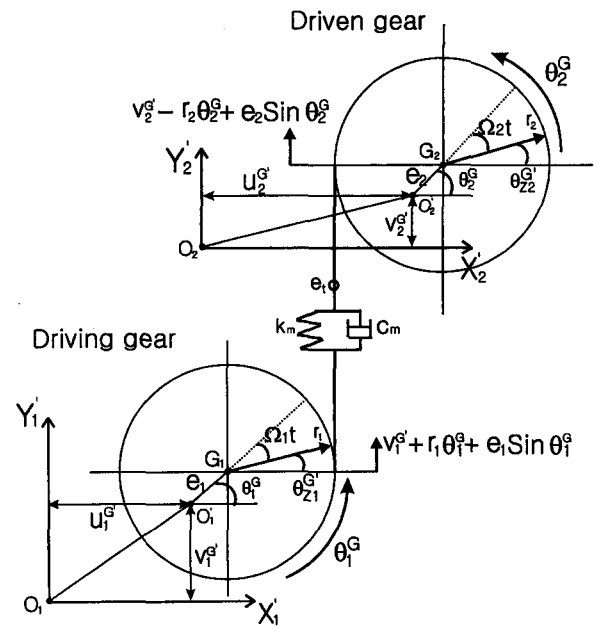


Fig. 1 A gear pair element coordinate system at the pressure line.

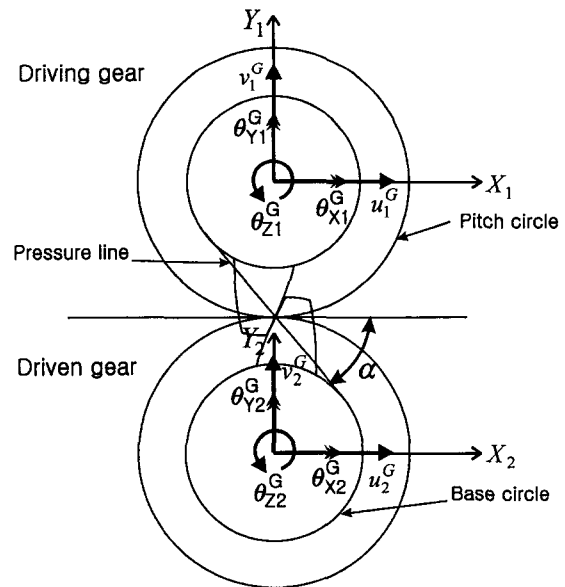


Fig. 2 A general global coordinate system of the gear pair element.

(A17)로 주어진다.

Fig. 2의 전체 시스템 좌표계에 대한 기어 쌍의 일반화된 변위 벡터는 식 (3)으로 정의된다.

$$\{q^G\} = [u_1^G \ v_1^G \ \theta_{X1}^G \ \theta_{Y1}^G \ u_2^G \ v_2^G \ \theta_{X2}^G \ \theta_{Y2}^G \ \theta_{Z1}^G \ \theta_{Z2}^G]^T \quad (3)$$

그리고, 전체 시스템 좌표계에 대한 기어 쌍의 연성 유

한요소 방정식은 압력각을 고려한 변환 행렬을 사용하여 식 (4)로 얻어진다.

$$[M^G]\{\ddot{q}^G\} + \{[C^G] + [G^G]\}\{\dot{q}^G\} + [K^G]\{q^G\} = \{Q^G\} \quad (4)$$

여기서, 전체 시스템 좌표계에 대한 관성, 감쇠, 자이로스코픽, 강성 행렬과 외력 벡터는 식 (5)~(9)로 얻어진다.

$$[M^G] = [T][M^C][T]^T \quad (5)$$

$$[C^G] = [T][C^C][T]^T \quad (6)$$

$$[G^G] = [T][G^C][T]^T \quad (7)$$

$$[K^G] = [T][K^C][T]^T \quad (8)$$

$$\{Q^G\} = [T]\{Q^C\} \quad (9)$$

그리고, 좌표변환 행렬 [T]는 식 (10)으로 정의된다.

$$[T] = \begin{bmatrix} -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & -S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

한편, 축, 베어링, 집중 디스크 등의 기존 횡진동 및 비틀림 진동 각 유한요소 모델과 개발된 기어 쌍의 연성 유한요소 모델의 전체 시스템 방정식 구성을 위한 조립은 전체 강성행렬의 구성개념을 나타낸 Fig. 3과 같이, 횡진

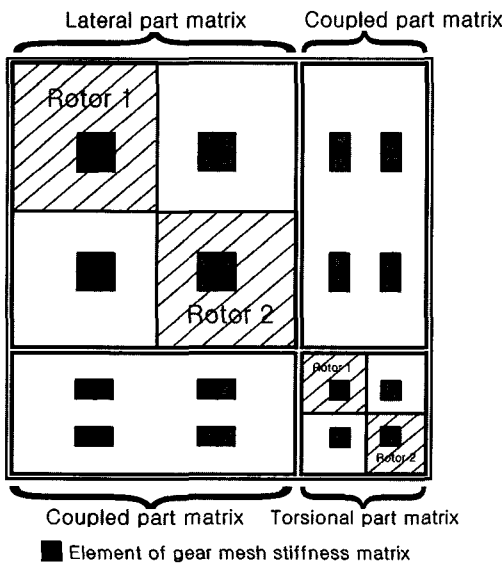


Fig. 3 Structure of an assembled global stiffness matrix.

동과 비틀림 진동만의 행렬을 Diagonal상에 그리고 연성진동 관련 행렬을 Off-diagonal상에 배치함으로써 용이하게 이루어 질 수 있다.

3. 해석결과 및 토의

개발된 기어 쌍의 횡-비틀림 연성 유한요소 모델을 적용하여, 증속기어를 갖는 터보-냉동기 로터-베어링 시스템의 연성 고유진동 해석을 수행하였다. Fig. 4는 해석 대상 시제 개발 800 냉동톤 터보-냉동기의 구성을 나타내며, 정격 3,420 rpm인 모터와 볼 기어의 구동 로터-베어링 시스템은 볼-피니언 기어 쌍의 증속기를 통해 압축기 임펠러와 피니언 기어의 피동 로터-베어링 시스템을 정격 11,845 rpm으로 구동하고 있다.

기어 물림 강성의 변화에 따른 비연성 비틀림 진동간의 고유진동수가 Fig. 5에 나타나 있다. 낮은 기어 물림 강성에서는 모터 축과 임펠러 축이 실질적으로 독립적인 진동을 하며, 기어 물림 강성이 1×10^6 N/m을 넘어 증가함에

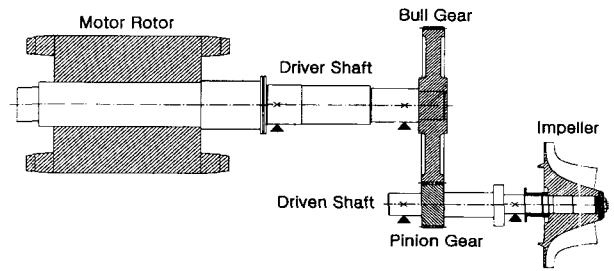


Fig. 4 Schematic of a prototype 800 RT turbo-chiller rotor-bearing system.

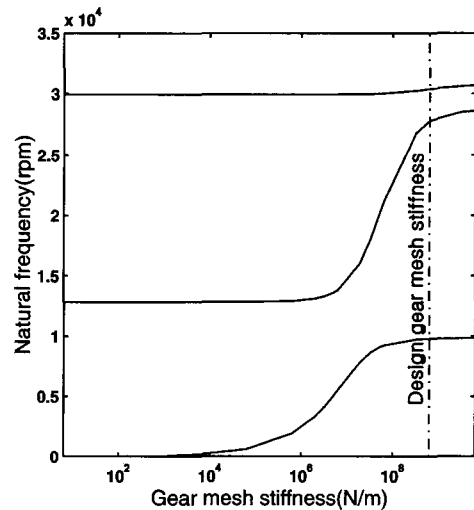


Fig. 5 Torsional natural frequencies vs. a gear mesh stiffness for the torsional analysis only.

따라 두 축이 연계되어 1, 2차 비틀림 고유진동수가 크게 증가하고, 기어 물림 강성이 설계 강성 값(6.31×10^8 N/m)을 넘어 더욱 증가함에 따라 1, 2차 비틀림 고유진동수가 점근 수렴하는 것이 관찰된다. 여기서, 설계 기어 물림 강성은 개발 시스템의 전달동력, 증속비, 그리고 시스템의 Lay-out을 고려하여 설계 선정된 기어 쌍에 대한 예측된 값으로, 기어 쌍에 작용하는 하중과 이에 따른 굽힘 및 압축 변위의 관계식을 이용하여 계산되었다.⁽⁵⁾ 한편, 설계 물림 강성에서 비연성 비틀림 1, 2, 3차 고유진동수는 9,780 rpm, 27,763 rpm, 그리고 30,396 rpm이다.

모터 축의 정격속도에서 기어 물림 강성의 변화에 따른 연성 횡-비틀림 진동의 고유진동수가 Fig. 6에 나타나 있다. 15,000 rpm 이하의 연성 횡 진동 선회 고유진동수는 기어 물림 강성에 의해 전체적으로 약간 증가하는 경향을

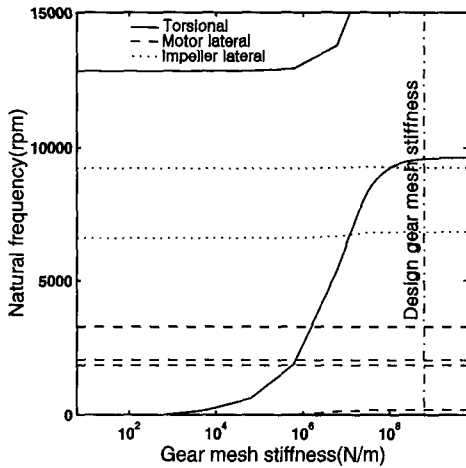


Fig. 6 Natural frequencies vs. a gear mesh stiffness for the coupled rotordynamic analysis at 3,420 rpm.

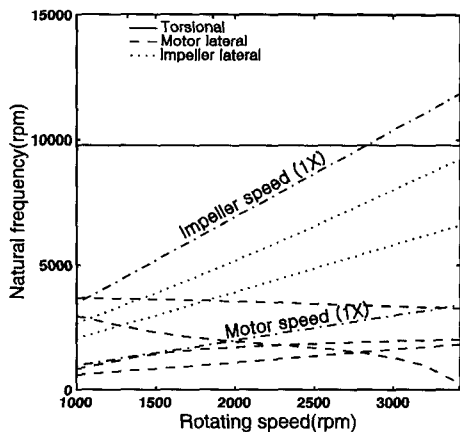


Fig. 7 Campbell diagram for the uncoupled rotor-dynamic analysis.

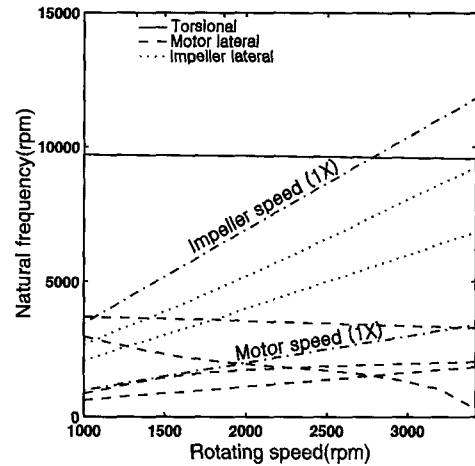


Fig. 8 Campbell diagram for the coupled rotordynamic analysis.

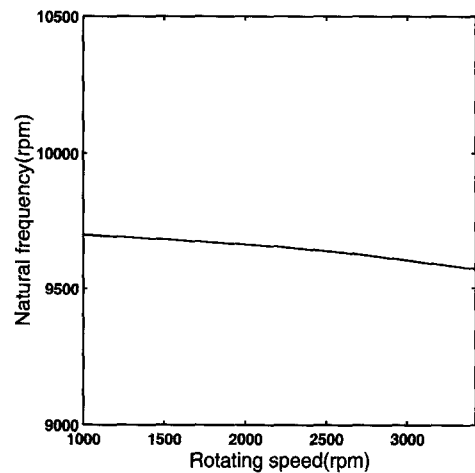


Fig. 9 A magnified view of the coupled 1st torsional natural frequency as a function of rotating speed.

보이며, 1차 연성 비틀림 고유진동수는 설계 기어 물림 강성에서 9,573 rpm(비연성 대비 2.12% 감소)으로 임펠러 축의 정격 11,845 rpm과 19.2%의 충분한 분리여유를 확보하고 있다.

설계 기어 물림 강성에서, 모터 축의 속도변화에 따른 비연성 횡 진동과 비틀림 진동의 고유진동수가 Fig. 7의 캠벨선도에 나타나 있다. 예상대로, 비틀림 고유진동수가 속도에 관계없이 일정함을 볼 수 있다. 한편, 설계 기어 물림 강성에서, 모터 축의 속도변화에 따른 연성 횡 진동과 비틀림 진동의 고유진동수가 Fig. 8의 캠벨선도에 나타나 있다. Fig. 7과 Fig. 8의 비교를 통해, 15,000 rpm 이하의 횡 진동 선회 고유진동수에서는 속도변화와 연계된 연성의 효과가 실질적으로 관찰되지 않는 반면, 연성 1차 비틀림 고유진동수는 연성의 영향으로 속도 증가에 따라 고유진동

수가 약간 감소하는 현상이 관찰된다. Fig. 9는 Fig. 8의 연성 캠벨선도로부터 연성 1차 비틀림 진동 부분만을 확대한 것으로, 모터 속도가 1,000 rpm에서 3,420 rpm으로 증가함에 따라 고유진동수가 1.28% 감소한다. 이러한 속도 증가에 따른 연성 비틀림 고유진동수의 감소 원인을 조사하기 위해 설계 기어 물림 강성에서 불기어의 극관성 I_p 값(실제 불기어의 I_p 에 대한 배율) 별로 모터 속도 1,000 rpm과 3,420 rpm 사이의 연성 비틀림 고유진동수의 변화율을 계산하였으며, 그 결과가 Fig. 10에 나타나 있다. 불기어의 극관성 배율이 0.001에서 3으로 증가함에 따라, 1차 고유진동수의 변화율은 음의 방향으로 미량씩 증가한다. 이로써, 자이로스코픽 효과가 작용하는 횡 진동이 비틀림 진동에 연성되어 비틀림 고유진동수의 감소를 결과한 것으로 판단된다.

Fig. 11에는 설계 기어 물림 관성과 모터 속도 3,420 rpm에서 해석된 1차 연성 비틀림 고유진동 모드(b), 비연성 비틀림 고유진동 모드(a), 그리고 해당 연성 횡 진동 모드(c)가 나타나 있다. 여기서, 비연성과 연성의 비틀림 모드 모두 모터 축의 중립선을 한번 교차하는 거의 동일한 형상을 하고 있다.

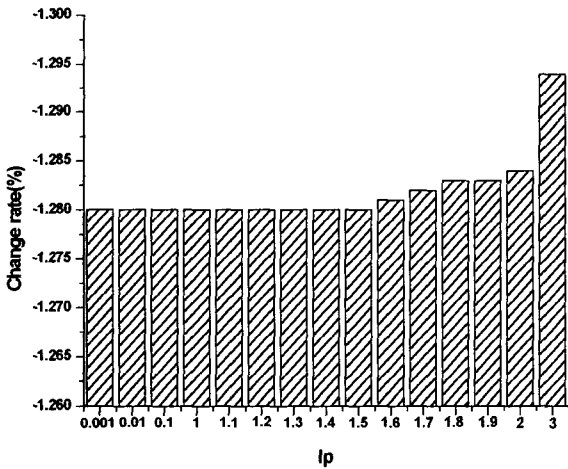
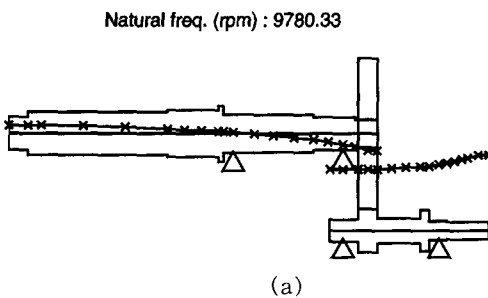
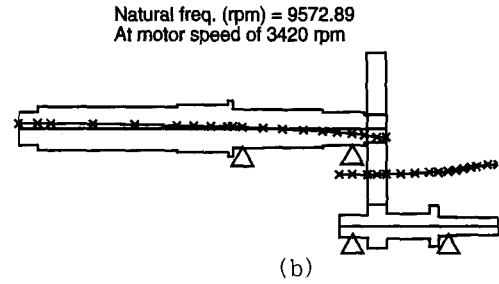


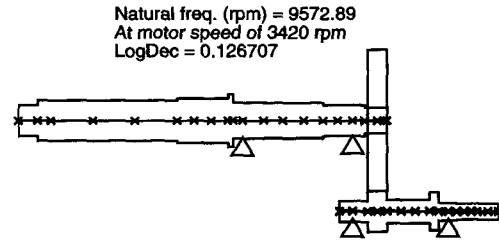
Fig. 10 1st torsional natural frequency change rate vs. a bull gear I_p times over 1,000 to 3,420 rpm.



(a)



(b)



Solid line : Vertical mode shape
Dashed line : Horizontal mode shape

(c)

Fig. 11 (a) 1st torsional mode for the torsional analysis only. (b) 1st torsional mode for the coupled analysis. (c) Corresponding lateral mode for the coupled analysis.

4. 결 론

본 논문에서는 기어 전동 메카니즘을 갖는 로터-베어링 시스템의 횡-비틀림 연성 진동 해석을 위해, 기어 쌍의 일 반화된 연성 유한요소 모델을 개발하고 이를 적용하여 불-피니언 기어의 증속기를 채택한 800 냉동톤 터보-냉동기 전체 로터-베어링 시스템의 횡-비틀림 연성 진동 해석을 수행하였다. 해석결과, 기어 물림 강성의 영향으로 1차 비틀림 고유진동수가 크게 증가하고 연성에 의한 횡 진동의 영향으로 1차 비틀림 고유진동수가 약간 감소하는 특성이 관찰되었으며, 그러나 이에 따른 악영향은 없는 것으로 판단된다. 그리고, 15,000 rpm 이하의 저차 횡 진동 선회 고유진동수들은 연성에 의한 실질적인 영향을 받지 않음이 확인되었다.

참 고 문 헌

- (1) Eshleman, R. L., and Eubanks, R. A., 1969, "On the Critical Speeds of a Continuous Rotor," ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 1180~1188.
- (2) Neriya, S. V., Bhat, R. B., and Sanker, T. S.,

1984, "Effect of Coupled Torsional-Flexural Vibration of a Geared Shaft System on Dynamic Tooth Load," The Shock and Vibration Bulletin, Part 3, Vol. 54, pp. 67~75.

(3) Kahraman, A., Ozguven, H. N., Houser, D. R., and Zakrajsek, J. J., 1992, "Dynamic Analysis of Geared Rotors by Finite Elements," ASME Trans. Journal of Mechanical Design, Vol. 114, pp. 507~514.

(4) Rao, J. S., Chang, J. R., and Shiau, T. N., 1995, 'Coupled Bending-Torsion Vibration of Geared Rotors,' ASME DE-Vol. 84-2, Design Engineering Technical Conferences, Vol. 3, Part B, pp. 977~989.

(5) 전재진, 1984, "평치차시스템의 진동에 관한 연구," 석사학위논문, 한국과학기술원.

부 록 A

$$M_1^G \ddot{u}_1^G = U_1 \Omega_1^2 \cos \Omega_1 t \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} & M_1^G \ddot{v}_1^G + k_m [v_1^G + r_1 \theta_1^G - v_2^G + r_2 \theta_2^G] \\ & + c_m [\dot{v}_1^G + r_1 \dot{\theta}_1^G - \dot{v}_2^G + r_2 \dot{\theta}_2^G] \\ & = U_1 \Omega_1^2 \sin \Omega_1 t + k_m [e_2 \sin \theta_2^G - e_1 \sin \theta_1^G + e_t \sin(N_1 \Omega_1 t)] \\ & + c_m [e_2 \Omega_2 \cos \theta_2^G - e_1 \Omega_1 \cos \theta_1^G + e_t N_1 \Omega_1 \cos(N_1 \Omega_1 t)] \end{aligned} \quad (A2)$$

$$M_2^G \ddot{u}_2^G = U_2 \Omega_2^2 \cos \Omega_2 t \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} & M_2^G \ddot{v}_2^G + k_m [-v_1^G - r_1 \theta_1^G + v_2^G - r_2 \theta_2^G] \\ & + c_m [-\dot{v}_1^G - r_1 \dot{\theta}_1^G + \dot{v}_2^G - r_2 \dot{\theta}_2^G] \\ & = U_2 \Omega_2^2 \sin \Omega_2 t - k_m [e_2 \sin \theta_2^G - e_1 \sin \theta_1^G + e_t \sin(N_1 \Omega_1 t)] \\ & - c_m [e_2 \Omega_2 \cos \theta_2^G - e_1 \Omega_1 \cos \theta_1^G + e_t N_1 \Omega_1 \cos(N_1 \Omega_1 t)] \end{aligned} \quad (A4)$$

$$I_{r1}^G \ddot{\theta}_{X1}^G + I_{p1}^G \Omega_1 \dot{\theta}_{Y1}^G = 0 \quad (A5)$$

$$I_{r1}^G \dot{\theta}_{Y1}^G - I_{p1}^G \Omega_1 \theta_{X1}^G = 0 \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} & I_{p1}^G \ddot{\theta}_1^G + k_m [r_1 v_1^G + r_1^2 \theta_1^G - r_1 v_2^G + r_1 r_2 \theta_2^G] \\ & + c_m [r_1 \dot{v}_1^G + r_1^2 \dot{\theta}_1^G - r_1 \dot{v}_2^G + r_1 r_2 \dot{\theta}_2^G] \\ & = \{k_m [-v_1^G - r_1 \theta_1^G + v_2^G - r_2 \theta_2^G] + c_m [-\dot{v}_1^G - r_1 \dot{\theta}_1^G \\ & + \dot{v}_2^G - r_2 \dot{\theta}_2^G] + k_m [e_1 \sin \theta_1^G - e_2 \sin \theta_2^G \\ & - e_t \sin(N_1 \Omega_1 t)] + c_m [e_1 \Omega_1 \cos \theta_1^G - e_2 \Omega_2 \cos \theta_2^G \\ & - e_t N_1 \Omega_1 \cos(N_1 \Omega_1 t)]\} e_1 \cos \theta_1^G + \{k_m [e_1 \sin \theta_1^G \\ & - e_2 \sin \theta_2^G - e_t \sin(N_1 \Omega_1 t)] + c_m [e_1 \Omega_1 \cos \theta_1^G \\ & - e_2 \Omega_2 \cos \theta_2^G - e_t N_1 \Omega_1 \cos(N_1 \Omega_1 t)]\} r_1 \end{aligned} \quad (A7)$$

$$I_{r2}^G \ddot{\theta}_{X2}^G + I_{p2}^G \Omega_2 \dot{\theta}_{Y2}^G = 0 \quad (A8)$$

$$I_{r2}^G \dot{\theta}_{Y2}^G - I_{p2}^G \Omega_2 \theta_{X2}^G = 0 \quad (A9)$$

$$\begin{aligned} & I_{p2}^G \ddot{\theta}_2^G + k_m [r_2 v_1^G + r_1 r_2 \theta_1^G - r_2 v_2^G + r_2^2 \theta_2^G] \\ & + c_m [r_2 \dot{v}_1^G + r_1 r_2 \dot{\theta}_1^G - r_2 \dot{v}_2^G + r_2^2 \dot{\theta}_2^G] = \\ & = \{k_m [-v_1^G - r_1 \theta_1^G + v_2^G - r_2 \theta_2^G] + c_m [-\dot{v}_1^G - r_1 \dot{\theta}_1^G \\ & + \dot{v}_2^G - r_2 \dot{\theta}_2^G] + k_m [e_1 \sin \theta_1^G - e_2 \sin \theta_2^G \\ & - e_t \sin(N_1 \Omega_1 t)] + c_m [e_1 \Omega_1 \cos \theta_1^G - e_2 \Omega_2 \cos \theta_2^G \\ & - e_t N_1 \Omega_1 \cos(N_1 \Omega_1 t)]\} e_2 \cos \theta_2^G + \{k_m [e_1 \sin \theta_1^G \\ & - e_2 \sin \theta_2^G - e_t \sin(N_1 \Omega_1 t)] + c_m [e_1 \Omega_1 \cos \theta_1^G \\ & - e_2 \Omega_2 \cos \theta_2^G - e_t N_1 \Omega_1 \cos(N_1 \Omega_1 t)]\} r_2 \end{aligned} \quad (A10)$$

$$[M^G] = \begin{bmatrix} M_1^G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1^G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r1}^G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r1}^G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_2^G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2^G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r2}^G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r2}^G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p1}^G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p2}^G \end{bmatrix} \quad (A11)$$

$$[C^G] = c_m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & r_1 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -r_1 & -r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & -r_1 & 0 & 0 & r_1^2 & r_1 r_2 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 & r_1 r_2 & r_2^2 \end{bmatrix} \quad (A12)$$

$$[G^G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{p1}^G \Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{p1}^G \Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p2}^G \Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{p2}^G \Omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A13)$$

$$[K^G] = k_m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & r_1 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -r_1 & -r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & -r_1 & 0 & 0 & r_1^2 & r_1 r_2 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 & r_1 r_2 & r_2^2 \end{bmatrix} \quad (A14)$$

$$\{Q^G\} = \begin{bmatrix} U_1 \Omega_1^2 \cos \Omega_1 t \\ U_1 \Omega_1^2 \sin \Omega_1 t + F_1 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \Omega_2^2 \cos \Omega_2 t \\ U_2 \Omega_2^2 \sin \Omega_2 t - F_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_s e_1 \cos \Omega_1 t - F_1 r_1 \\ F_s e_2 \cos \Omega_2 t - F_1 r_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A15})$$

여기서,

$$F_1 = k_m [e_2 \sin \Omega_2 t - e_1 \sin \Omega_1 t + e_i \sin (N_1 \Omega_1 t)] + c_m [e_2 \Omega_2 \cos \Omega_2 t - e_1 \Omega_1 \cos \Omega_1 t + e_i N_1 \Omega_1 \cos (N_1 \Omega_1 t)] \quad (\text{A16})$$

$$F_s = k_m [-v_1^G - r_1 \Omega_1 t + v_2^G - r_2 \Omega_2 t] + c_m [-\dot{v}_1^G - r_1 \Omega_1 + \dot{v}_2^G - r_2 \Omega_2] - F_1 \quad (\text{A17})$$