

# 실험적 모드 해석의 기초 이론

## Basic Theory of Experimental Modal Analysis

정 해 일\*

(한국기술교육대학교 기계공학부)

실험적 모드 해석이란 측정된 주파수응답함수(frequency response function ; FRF)로부터 시스템의 모드변수(고유진동수, 감쇠비, 진동모드)를 구하는 과정이라 할 수 있다.

### 1. 1자유도계(Single Degree of Freedom (SDOF) System)의 FRF

1자유도계의 FRF는 감쇠 형태에 따라 다음과 같이 구해진다.

1) 점성 감쇠(viscous damping)

$$\alpha(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i\omega c} \quad (1)$$

2) 구조 감쇠(structural damping)

$$\alpha(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i k \eta} \quad (2)$$

여기서  $\eta$ 는 손실 계수(loss factor)이다.

FRF는 응답(response)의 종류에 따라 다음과 같이 구별된다.

$$\text{Receptance } \alpha(\omega) = \frac{\text{변위}}{\text{힘}} = \frac{X}{F}$$

$$\text{Mobility } Y(\omega) = \frac{\text{속도}}{\text{힘}} = \frac{V}{F} \quad (3)$$

$$\text{Inertance } A(\omega) = \frac{\text{가속도}}{\text{힘}} = \frac{A}{F}$$

그런데  $x(t) = X e^{i\omega t}$ ,  $v(t) = \dot{x}(t) = i\omega X e^{i\omega t}$ 이므로, receptance, mobility, inertance 사이에는

$$Y(\omega) = \frac{V}{F} = i\omega \frac{X}{F} = i\omega \alpha(\omega),$$

$$A(\omega) = \frac{A}{F} = -\omega^2 \alpha(\omega) \quad (4)$$

의 관계식이 성립한다.

FRF는 복소함수이기 때문에 Bode 선도(크기와 위상), 실수-허수부 선도 혹은 Nyquist 선도로 나타낼 수 있다.

Receptance를 기준으로 살펴 볼 때, Bode plot에서는 FRF의 크기(magnitude)가 최대이며 위상이  $+90^\circ$ 이거나  $-90^\circ$ 인 주파수가, 실수-허수부 선도에서는 허수부의 크기가 최대이며 실수부의 값이 0 부근인 주파수가, Nyquist 선도에서는 원과 허수축이 만나는 점의 주파수가 시스템의 고유진동수가 된다.

\* E-mail: hijung@kut.ac.kr

## 2. 다자유도계(Multi-degree of Freedom(MDOF) System)의 FRF

### 2.1 비감쇠계의 FRF

$N$  자유도계의 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (5)$$

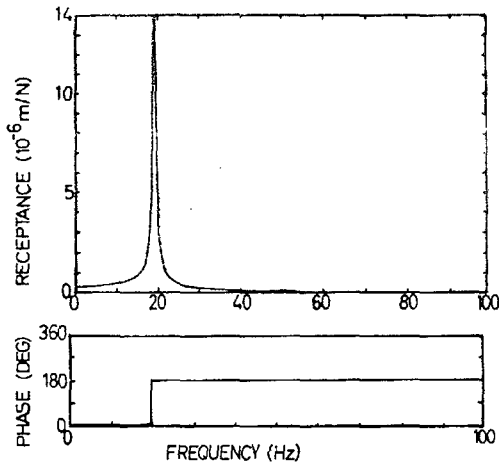


그림 1 1자유도계의 Bode 선도

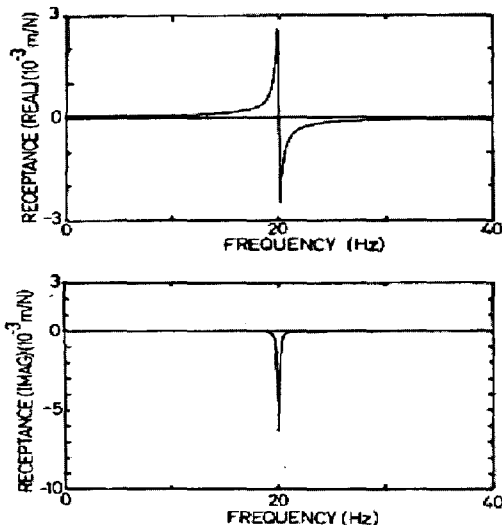


그림 2 1자유도계의 실수-허수부 선도

여기서,  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $x(t)$ ,  $f(t)$ 는 각각 질량행렬, 강성행렬, 변위벡터, 힘벡터를 의미한다.  $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$ 가 작용할 때, 계의 응답을  $\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$ 라 하면 운동 방정식은

$$([K] - \omega^2[M])\{X\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$\text{즉, } \{X\} = ([K] - \omega^2[M])^{-1}\{F\} \quad (7a)$$

$$\{X\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (7b)$$

여기서  $[\alpha(\omega)]$ 는  $N \times N$  receptance 행렬이며,  $[\alpha(\omega)]$ 의 각 element  $\alpha_{jk}(\omega)$ 는

$$\alpha_{jk}(\omega) = \left( \frac{X_j}{F_k} \right)_{f_m = 0; m=1, N; i \neq k} \quad (8)$$

식 (7)을 이용하여 FRF를 구할 수도 있으나, 자유도  $N$ 이 증가하면 계산 시간이 많이 소요된다. 모드 벡터의 직교성을 이용하여  $[\alpha(\omega)]$ 를 구하는 방법을 알아보기로 한다. 식 (7)로부터

$$[K] - \omega^2[M] = [\alpha(\omega)]^{-1}$$

위 식의 양변에 정규화된 모드행렬의 전치행렬  $[\phi]^T$ 와 모드행렬  $[\phi]$ 를 곱하면

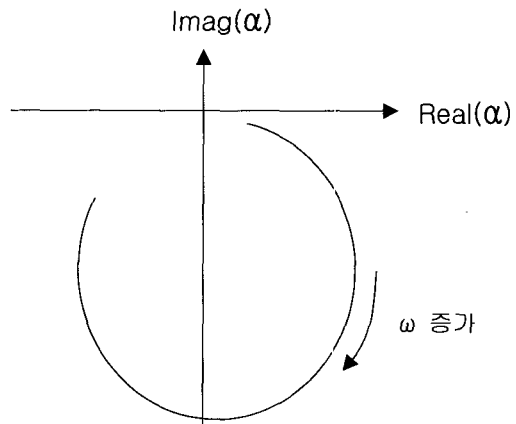


그림 3 1자유도계의 Nyquist 선도

$$[\phi]^T([K] - \omega^2[M])[\phi] = [\phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\phi] \quad (9)$$

그런데,  $[\phi]^T[M][\phi] = [I]$ ,  $[\phi]^T[K][\phi] = [\omega_r^2]$  이므로 식 (9)는,

$$[\omega_r^2 - \omega^2] = [\phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\phi] \quad (10)$$

따라서,  $[\alpha(\omega)] = [\phi][\omega_r^2 - \omega^2]^{-1}[\phi]^T$

식 (10)을 이용하여  $[\alpha(\omega)]$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^j \phi_r^k}{\omega_r^2 - \omega^2} = \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^j \phi_r^k}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} = \sum_{r=1}^N \frac{A_r^{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (11)$$

### 2.2 비례 감쇠계의 FRF

감쇠행렬  $[C]$ 나  $[H]$ 가 질량행렬과 강성행렬의 조합으로 나타낼 수 있을 경우, 이 계를 비례 감쇠계라 한다.

$$[C] = \beta[K] + \gamma[M] \text{ 혹은}$$

$$[H] = \beta[K] + \gamma[M]$$

비감쇠계의 모드행렬이 비례감쇠계의 감쇠행렬을 대각행렬로 만들어주기 때문에 비례감쇠계의 모드벡터는 비감쇠계의 모드벡터와 동일하며 실수 값을 갖는다. 비감쇠계의 FRF를 구하는 방법과 동일한 방법으로 비례 감쇠계의 FRF를 구해보면 점성 감쇠계의 경우는

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^j \phi_r^k}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^j \phi_r^k}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \zeta_r \omega \omega_r} \end{aligned} \quad (12)$$

구조감쇠계의 FRF는

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^j \phi_r^k}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\eta_r k_r)} \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^j \phi_r^k}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2} \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{A_r^{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2} \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.3 일반 구조 감쇠계

비례감쇠가 아닌 일반감쇠계의 경우 고유치와 모드벡터는 복소수가 된다. 모드벡터가 복소수가 되면 비례감쇠계와는 달리 고정된 노드점(nodal point)이 존재하지 않는다. 일반 구조 감쇠계의 FRF는

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^j \phi_r^k}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\eta_r k_r)} \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^j \phi_r^k}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2} \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{A_r^{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2} \end{aligned} \quad (14)$$

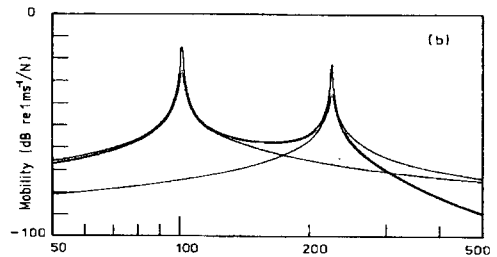
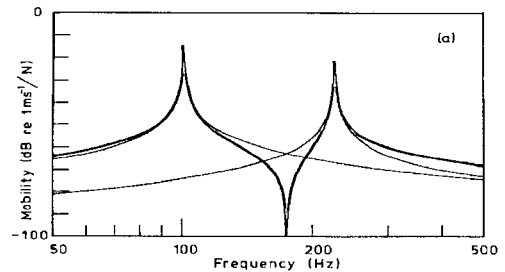


그림 4 2자유도계의 Mobility 선도

식 (13)과 식 (14)는 동일해 보이지만, 식 (13)에서  $\phi_r^j$ 와  $A_r^{jk}$ 는 실수이고 식 (14)에서는 복소수이다.

MDOF 비감쇠계의 FRF는 식 (11)로 표시된다. 다음 식과 같은 receptance  $\alpha_{11}(\omega)$ 와  $\alpha_{21}(\omega)$ 를 갖는 2자유도계 FRF의 Bode plot은 그림 4와 같이 표시된다.

$$\alpha_{11}(\omega) = \frac{0.5}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{0.5}{\omega_2^2 - \omega^2},$$

$$\alpha_{21}(\omega) = \frac{0.5}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{0.5}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

Point receptance ( $j=k$ )  $\alpha_{11}(\omega)$ 와 transfer receptance ( $j \neq k$ )  $\alpha_{21}(\omega)$ 의 차이는 두 번째 모드의 모드 상수의 부호가 다르다는 것이다. Point receptance에서는 모드 상수가 항상 양이므로  $\omega_r < \omega < \omega_{r+1}$  구간에서는 인접한 모드  $r$ 과  $r+1$ 항의 부호가 반대가 된다. 따라서 두 고유진동수 사이에  $\alpha(\omega) = 0$  인 주파수가 존재한다. 이 점을 반공진점(antiresonance)이라 한다.

감쇠계의 FRF는 고유진동수 부근에서 damping의 영향에 의해 peak 값이 감소하는 것 외에는 비감쇠계의 FRF와 유사하다. 그림 5, 6은 2자유도 비례감쇠계의 Nyquist 선도와 실수-허수부 선도이다.

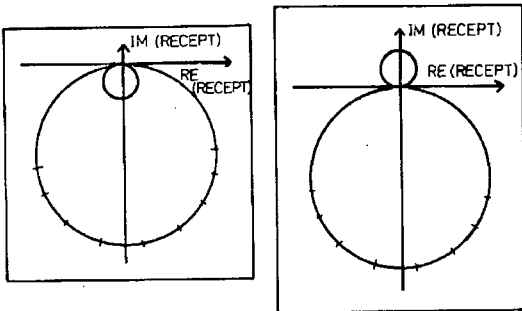


그림 5 2자유도계의 Nyquist 선도

### 3. 모드 변수의 추출(Modal Parameter Extraction)

FRF는 진동계의 동특성에 의해 결정되며, 계측과 신호 처리 과정을 통해 실험적으로 구할 수 있다. 모드 변수 추출은 실험으로 구한 FRF로부터 모드 변수(고유진동수, 감쇠비, 모드형상)를 구하는 과정이다. 이 과정에는 curve fitting 방법이 사용된다.

모드 변수 추출 방법에는 주파수 영역 해석 방법, 시간 영역 해석 방법이 있다. 각 방법에는 1개의 모드만을 고려하는 SDCF법과 여러 모드의 모드 변수를 동시에 구할 수 있는 MDOF법이 있다. 여기에서는 주파수 영역의 SDOF 방법에 대해 알아보기로 한다.

#### 3.1 Peak Amplitude 법

이 방법은 damping이 크지 않고 모드가 잘 분리된 FRF의 모드 변수를 추출할 때 사용된다. 모드 변수 추출 절차는 다음과 같다.

(1) FRF에서 공진점을 찾아내고 이 점의 주파수를 고유진동수( $\omega_r$ )로 결정한다.

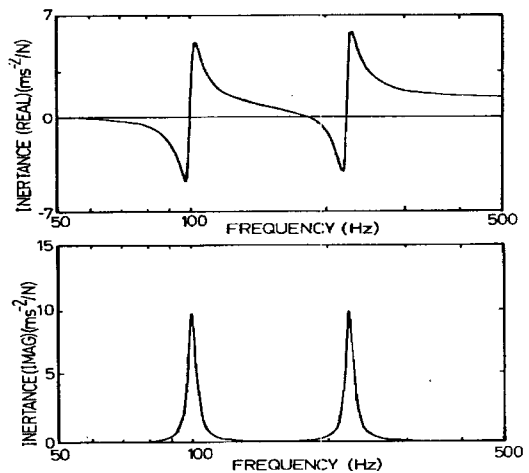


그림 6 2자유도계의 실수-허수부 선도

(2) FRF의 최대값  $|\hat{\alpha}|$ 의  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이 되는 점 (half power point)의 주파수  $\omega_a$ 와  $\omega_b$ 의 차  $\Delta\omega$ 로부터 감쇠비를 다음과 같이 구한다.

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2} \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_r}, \quad \zeta_r = 2\eta_r \quad (15)$$

(3) 고유 진동수와 감쇠비로부터 모드 상수를 구하고 모드 상수로부터 모드 형상을 구한다.

Receptance  $\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r^{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}$  에서  $\omega = \omega_r$ 일 때

$$|\alpha_{jk}(\omega_r)| = |\hat{\alpha}| = \frac{A_r^{jk}}{\omega_r^2 \eta_r}$$

즉,  $A_r^{jk} = \phi_r^j \phi_r^k = |\hat{\alpha}| \omega_r^2 \eta_r \quad (16)$

### 3.2 Circle Fit 법

1자유도계의 FRF 중 구조 감쇠의 receptance와 점성 감쇠의 mobility의 Nyquist plot은 원이 된다. 다자유도계의 FRF의 Nyquist plot도 고유 진동수  $\omega_r$  부근에서는  $r$ 번째 모드의 영향이 지배적이기 때문에 일반적으로 원호를 형성한다. Circle fit 법은 이러한 성질을 이용한다. 다자유도계의 FRF는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}(\omega) &= \sum_{s=1}^N \frac{A_s^{jk}}{\omega_s^2 - \omega^2 + i\eta_s \omega_s^2} \\ &= \frac{A_r^{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} \\ &\quad + \sum_{s=1, s \neq r}^N \frac{A_s^{jk}}{\omega_s^2 - \omega^2 + i\eta_s \omega_s^2} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 우변의 첫째 항은 관심 모드이고, 둘째 항은 다른 모드의 영향을 나타낸다. 다른 모드의 영향은 관심 모드에 비해 작고 주파수와 상관없이 일정하다고 가정하면 두 번째 항은 상수로 나타낼

수 있다.

$$\alpha_{jk}(\omega)_{\omega = \omega_r} \approx \frac{A_r^{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} + B_r^{jk} \quad (18)$$

식 (18)은 복소평면 상에서 원의 궤적을 그린다.

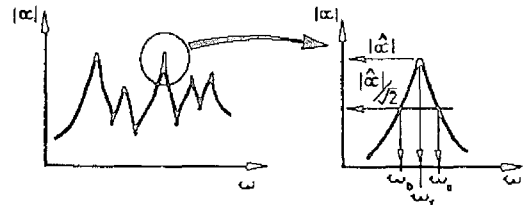
모드 원으로부터 모드 변수를 추출하기 위해 모드 원의 성질을 알아보기로 하자. 먼저 다음 함수를 고려해 보자.

$$\alpha = \frac{1}{\omega_r^2 \{1 - (\omega/\omega_r)^2 + i\eta_r\}} \quad (19)$$

이 함수의 Nyquist 선도는 그림 8과 같다.

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \frac{\eta_r}{1 - (\omega/\omega_r)^2}, \quad \tan(90^\circ - \gamma) \\ &= \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - (\omega/\omega_r)^2}{\eta_r} \end{aligned}$$

임의의 주파수  $\omega$ 에서 다음의 관계식이 성립한다.



(a) (b)  
그림 7 Peak amplitude 법

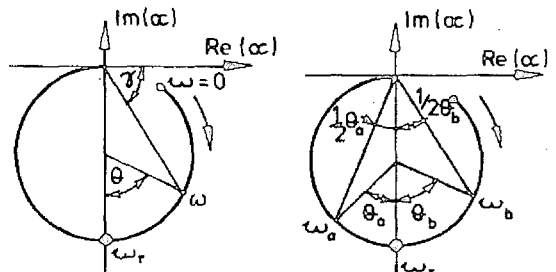


그림 8 모드 원

따라서

$$\omega^2 = \omega_r^2 (1 - \eta_r \tan \frac{\theta}{2}) \quad (20)$$

식 (20)을  $\theta$  로 미분하면

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} = -\frac{\omega_r^2 \eta_r}{2} \left\{ 1 + \frac{(1 - (\omega/\omega_r)^2)^2}{\eta_r^2} \right\} \quad (21)$$

$\frac{d\omega^2}{d\theta}$ 의 역수는 고유 진동수  $\omega_r$ 에서 최대값을 갖는다. 즉, 식 (21)을  $\omega$ 로 미분하면

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{d\omega^2}{d\theta} \right)_{\omega=\omega_r} = 0 \quad (22)$$

식 (22)는 고유 진동수에서 측정점간의 간격 (sweeping angle)이 최대가 된다는 것을 의미한다. 이 성질로부터 고유 진동수 값을 구할 수 있다. 식 (21)로부터 damping은 다음과 같이 계산된다.

$$\left( \frac{d\theta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_r} = -\frac{2}{\eta_r \omega_r^2} \quad (23)$$

모드 원에서 고유 진동수 보다 높은 주파수  $\omega_a$ 와 고유 진동수 보다 낮은 주파수  $\omega_b$ 로부터

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta_b}{2} &= \frac{1 - (\omega_b/\omega_r)^2}{\eta_r}, \\ \tan \frac{\theta_a}{2} &= \frac{1 - (\omega_a/\omega_r)^2}{\eta_r} \end{aligned} \quad (24)$$

따라서,

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2 \left( \tan \frac{\theta_a}{2} + \tan \frac{\theta_b}{2} \right)} \quad (25)$$

모드 원의 마지막 성질은 지름과 관계가 있다. 식 (19)의 모드 원의 지름은  $\frac{1}{\omega_r^2 \eta_r}$  이 된다. 이

식의 분자에 모드 상수를 곱하면 FRF가 되고 이 경우의 지름은

$$D_r^{jk} = \frac{|A_r^{jk}|}{\omega_r^2 \eta_r} \quad (26)$$

따라서, 모드 원의 지름으로부터 모드 상수를 구할 수 있다.

지금까지는 구조 감쇠의 경우를 살펴보았는데 점성 감쇠의 경우도 모드 원으로부터 damping을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\zeta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2 \omega_r \left( \omega_a \tan \frac{\theta_a}{2} + \omega_b \tan \frac{\theta_b}{2} \right)} \quad (27)$$

앞에서 살펴본 모드 원의 성질로부터 모드 변수를 추출할 수 있다. 그 과정은 다음과 같다.

- (1) Nyquist plot에서 분석할 data의 수를 선정한다.
- (2) 측정된 data를 이용하여 최적의 모드 원을 구한다.
- (3) 고유 진동수를 찾고 damping을 계산한다.
- (4) 모드 변수를 구한다.

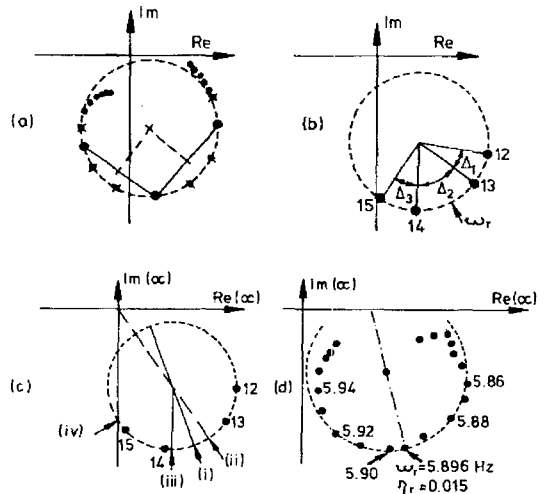


그림 9 측정된 FRF에 circle-fit 적용 예

Data 수를 선정할 때는 고유 진동수 전후의 data를 포함시켜야 하며, 포함된 data는 인접 모드의 영향을 받지 않은 data이어야 한다. 그리고, 가능하면  $180^\circ$  이상의 원주각이 되도록 data의 수를 선정하되 data의 수는 6보다 작지 않아야 한다.

(2) 단계에서 최적의 모드 원을 구하기 위해서 최소 자승법(least square method)을 사용한다. (3) 단계는 고유 진동수와 damping을 구하는 단계이다. 모드 원의 성질 중 고유 진동수에서 측정점간의 간격(sweeping angle)이 최대가 된다는 것(식 (22))을 살펴보았으므로 이 성질로부터 고유 진동수 값을 구할 수 있다. Damping은 식 (25)나 식 (27)을 이용하여 구할 수 있다.

이 시점에서 고유 진동수를 결정하는 다른 방법을 살펴보기로 하자. 고유 진동수는

- (a) Receptance의 크기가 최대가 되는 주파수
- (b) Receptance의 허수부가 최대가 되는 주파수
- (c) Receptance의 실수부가 0이 되는 주파수

그림 9(c)에 각각에 해당하는 주파수가 표시되어 있다. 그러나, 대부분의 경우 이 주파수들은 거의 같은 값을 갖는다. 이 값들이 차이가 날 경우에는 측정점간의 간격(sweeping angle)이 최대가

되는 주파수를 고유 진동수로 결정하는 것이 보다 정확하다.

Step(iv)에서는 구해진 고유 진동수, damping, 모드 원의 지름으로부터 식 (26)을 이용하여 모드 상수를 구한다.

SDOF 방법 중 circle-fit 방법은 상대적으로 다른 모드의 영향을 적게 받기 때문에 가장 널리 사용되고 있다.

### 참 고 문 헌

- (1) Ewins, D. J., 1984, Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press.
- (2) Rao, S. S., 1995, Mechanical Vibration, 3rd ed., Addison-Wesley.
- (3) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1980, Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, John Wiley & Sons.
- (4) Newland, D. E., 1984, An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis, 2nd ed., Longman.
- (5) White, R. G. and Walker, J. G., 1982, Noise and Vibration, John Wiley & Sons.