

# 정합조건을 만족시키지 않는 불확실한 시스템을 위한 선형 슬라이딩 평면의 LMI 매개변수화

## LMI Parameterization of Linear Sliding Surfaces for Mismatched Uncertain Systems

이재관, 최한호\*

(Jae Kwan Lee and Han Ho Choi)

**Abstract :** In this paper, we consider the problem of designing sliding surfaces for a class of dynamic systems with mismatched uncertainties in the state space model. In terms of LMIs, we give necessary and sufficient conditions for the existence of a linear sliding surface such that the reduced order sliding mode dynamics is asymptotically stable and completely independent of uncertainties. We parameterize all such linear sliding surfaces by using the solution to the given LMI conditions. And, we consider the problem of designing linear sliding surfaces guaranteeing pole placement constraints or  $H_2/H_\infty$  performances. Finally, we give a design example in order to show the effectiveness of our method.

**Keywords :** LMI(Linear Matrix Inequality), variable structure system, sliding surface, uncertain system, matching condition

### I. 서론

현재까지 여러 저자들에 의하여 다양한 슬라이딩 평면 설계 방법에 대하여 정합조건(matching condition)이 성립한다는 가정하에 제안되었다[1,2]. 정합조건은 매우 제한적이며 실제 응용에서 불확실성을 모델링하는데 적절하지 않은 경우가 많다. 최근 이러한 사실을 고려하여 정합조건을 만족시키지 않는 시스템을 위한 슬라이딩 평면 설계방법이 LMI에 기반하여 제안되었다[3-6]. LMI에 기반한 방법들은 극배치조건,  $LQ$ ,  $H_2$ ,  $H_\infty$ ,  $L_\infty$  성능조건 등과 같이 LMI로 표현가능한 성능지수들을 설계시에 고려해 넣을 수 있는 융통성을 제공한다. 그리고 매우 효율적인 LMI 최적화 알고리즘을 이용하여 대규모 시스템을 위한 설계에도 손쉽게 적용될 수 있는 장점을 갖고 있다. 그러나 [3-6]에 주어진 방법들은 축차등가 슬라이딩모드 동역학이 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성에 전혀 영향 받지 않는 것을 보장하는 선형 슬라이딩 평면이 존재할 필요충분조건을 제시하지는 못했다. 최근 [7]에서 주어진  $n$ 개의 상태와  $m$ 개의 입력을 갖는 시스템에 대하여  $n \times n$  리아푸노프 행렬과 연관된 LMI를 사용하여 슬라이딩 모드 동역학이 안정하며 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성에 전혀 영향 받지 않는 것을 보장하는 선형 슬라이딩 평면이 존재할 새로운 불변조건(invariance condition)을 구하였다.

우리도 역시 [7]에서와 같이 상태 공간 모델의 불확실성이 정합조건을 만족시키지 않는 선형시스템의 슬라이딩 평면 설계 문제를 고려한다. 주어진  $n$ 개의 상태와  $m$ 개의 입력을 갖는 시스템에 대하여  $(n-m)$ 차의 등가 슬라이딩 모드 동역학의  $(n-m) \times (n-m)$  리아푸노프 행렬과 연관

된 LMI를 사용하여 슬라이딩모드 동역학이 안정하며 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성에 전혀 영향 받지 않는 것을 보장하는 선형 슬라이딩 평면이 존재할 불변조건(invariance condition)을 제시한다. 그리고 모든 선형 슬라이딩 평면을 주어진 LMI조건을 해를 이용하여 매개변수화하여 제시한다. 결국 [7]과 마찬가지로 슬라이딩 평면을 LMI 최적화 알고리즘을 이용하여 설계할 수 있는데 최악의 경우 [7]에서 제시된 방법이  $n(n+1)/2 + m(m+1)/2$  개의 최적화 변수를 요구하는데 반해 본 논문에서 제시된 방법은  $n(n+1)/2 - m(m+1)/2$  개의 최적화 변수를 요구하여 본 논문에서 제시된 방법이 훨씬 효율적이다. 우리는 극점 배치 구속조건이나  $H_2/H_\infty$  성능을 보장하는 선형 슬라이딩 평면이 존재할 필요충분조건도 제시한다. 그리고 마지막으로 제시된 방법의 효율성을 보이기 위해 정합조건을 만족시키지 않는 시스템을 제어하기 위한 설계 예를 제시한다.

### II. 문제 설정

우리는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 고려한다[7].

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + DF(x, t)E]x(t) \\ &+ B[u(t) + \eta(x, u, t)]. \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  각각 상태, 입력을 가리키며  $\eta(x, u, t) = f(x, t) + Z(x, t)u(t)$ 로 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1:  $A, B, D, E$ 는 상수 행렬들이다.

A2: 입력행렬  $B$ 는 rank가  $m$ 으로 full rank이다.

A3:  $F(\cdot), Z(\cdot), f(\cdot)$ 는  $x, t$ 에 대하여 연속이다.

A4:  $\|F(x, t)\| \leq 1$ 를 만족시킨다.

A5: 알려진  $\phi$ 에 대하여  $\|Z(x, t)\| \leq \phi < 1$ 이다.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 6. 9., 채택확정 : 2005. 8. 29.

이재관 : 삼성 SDS(jaegwan.lee@samsung.com)

최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)

A6:  $\|f(x, t)\| \leq \rho(x, t)$ 를 만족시키는 스칼라 양함수  $\rho(x, t)$ 가 알려져 있다.

위의 가정에서  $DF(x, t)Ex$  는 [1-3]에서 고려된 시스템들과 달리 정합조건을 만족시킬 것을 요구받지 않았음을 주목해야 한다. 스위칭 평면의 설계에 있어 A4-6은 필요하지 않고 다만 스위칭 궤환 제어입력의 설계에 필요함을 주목해야 한다.

다음 보조정리는 주요 결과를 유도하는데 필수적이다.

보조정리 1 [8]: 주어진 적절한 차원을 갖는 세쌍의 행렬  $(A, B, C)$ 에 대하여  $AXB=C$  행렬식의 해  $X$ 를 구하는 문제를 고려하자.  $AXB=C$ 의 해가 존재할 필요충분조건은  $AA^sCB^sB=C$ 가 성립하는 것이다. 여기에서  $(\cdot)^s$ 는 행렬의 Moore-Penrose 역행렬을 의미한다.  $AXB=C$ 해가 존재하는 경우 모든 해는 다음과 같이 주어진다.

$$X = A^sCB^s + Z - A^sAZBB^s.$$

여기에서  $Z$ 는 적절한 차원을 갖는 임의의 행렬이다.

### III. 슬라이딩 모드 동역학

스위칭 평면을  $\Omega = \{x : Sx=0\}$ 로 정의하자. 여기에서  $S \in R^{m \times n}$ 으로 rank가  $m$ 이다. 이전의 결과[1-6]들로부터 우리는 스위칭 평면이 다음과 같은 성질들을 만족시켜야 함을 알 수 있다.

P1:  $SB$ 가 비특이 행렬(nonsingular matrix)이다. 일반성을 훼손시키지 않고  $SB=I$ 라고 가정한다.

P2: 적절한 스위칭 궤환 제어 입력에의해 스위칭평면  $Sx=0$ 에 시스템 궤적이 구속된 상황에서, 즉 슬라이딩모드가 시작되는 reaching time  $t_r$  이후,  $(n-m)$  차의 축차등가 슬라이딩모드 동역학이 광역적으로 quadratically 안정하다.

주 1: 축차등가 슬라이딩모드 동역학이 제어 입력과 무관하기 위해서는  $SB$ 가 비특이 행렬이 되어야하며 성질 P1은 유일한 등가 입력의 존재를 위해 필요함에 유의해야 한다[1-3].

역행렬이 존재하는 변환 행렬  $M$ 과 이에 대응하는 벡터  $v=Mx$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$M = \begin{bmatrix} \Phi^T \\ (B^T B)^{-1} B^T \end{bmatrix} \in R^{n \times n}, \quad v = Mx = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

여기에서  $\Phi \in R^{n \times (n-m)}$ 은  $B^T \Phi = 0$ 와  $\Phi^T \Phi = I$ 를 만족시키는 rank가  $(n-m)$ 인 행렬이다. 그러면 우리는  $M^{-1} = [\Phi \ B]$ 가 성립하고 (1)은 다음과 같은 regular form으로 변환시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11}(t) & \widehat{A}_{12}(t) \\ \widehat{A}_{21}(t) & \widehat{A}_{22}(t) \end{bmatrix} v \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} [u + Z(x, t)u + f(x, t)], \\ \widehat{A}_{11}(t) &= \Phi^T [A + DF(t)E] \Phi, \\ \widehat{A}_{12}(t) &= \Phi^T [A + DF(t)E] B, \\ \widehat{A}_{21}(t) &= (B^T B)^{-1} B^T [A + DF(t)E] \Phi, \\ \widehat{A}_{22}(t) &= (B^T B)^{-1} B^T [A + DF(t)E] B. \end{aligned}$$

우리는 보조정리1을 사용하여  $S$ 를 다음처럼 매개변수화 할 수 있다.

$$S = (B^T B)^{-1} B^T + K \Phi^T. \quad (3)$$

여기에서  $K \in R^{m \times (n-m)}$ 으로 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Sx &= (B^T B)^{-1} B^T x + K \Phi^T x = SM^{-1}v \\ &= K v_1 + v_2 = [K, \ I]v. \end{aligned}$$

[1]의 방법에 따라 등가입력이 다음처럼 주어지므로

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -[I + Z(x, t)]^{-1} S[A + DF(x, t)E]x \\ &\quad - [I + Z(x, t)]^{-1} f(x, t), \end{aligned}$$

$\sigma = K \dot{v}_1 + \dot{v}_2 = \sigma = K v_1 + v_2 = 0$ 로 놓고 입력  $u$ 를  $u_{eq}$ 로 대체하여 슬라이딩 모드 동역학을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{v}_1 = [\bar{A} - \bar{B}K]v_1 + \bar{D}F(x, t)[\bar{E} - \bar{C}K]v_1. \quad (4)$$

여기에서  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{E}, \bar{D}$ 는 다음처럼 주어진다.

$$\bar{A} = \Phi^T A \Phi, \bar{B} = \Phi^T A B, \bar{C} = E B, \bar{E} = E \Phi, \bar{D} = \Phi^T D.$$

### III. 슬라이딩 평면의 공식

(4)의 슬라이딩 모드 동역학식과 [4]와 [9]의 결과를 참조하여 다음 (5)를 만족시키는 해  $(X, K, \phi)$ 가 존재하는 것이 성질 P1-P2를 만족시키는 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건임을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} X > 0, \quad \phi > 0, \\ (\bar{A} - \bar{B}K)X + X(\bar{A} - \bar{B}K)^T + \phi \bar{D} \bar{D}^T \\ + \frac{1}{\phi} X(\bar{E} - \bar{C}K)^T(\bar{E} - \bar{C}K)X < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

위의 식은 변수치환식  $KX=Y$ 와 Schur complement 공식[9]에 의하여 다음의 LMI와 동치임을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X - \bar{B}Y + * & * & * & 0 \\ EX - CY & -\phi I & 0 & 0 \\ \phi \bar{D}^T & 0 & -\phi I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

여기에서 \*는 대칭성에 의해서 쉽게 유추될 수 있는 행렬 블록을 의미한다. 결국 우리는 LMI (6)이 성질 P1-P2를 만족시키는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건임을 알 수 있다. 그리고 그 경우 성질 P1-P2를 만족시키는 모든 선형 슬라이딩평면은 다음 식으로 표현될 수 있음을 알 수 있다.

$$S = (B^T B)^{-1} B^T + YX^{-1} \Phi^T. \quad (7)$$

그리고 축차등가 슬라이딩모드 동역학은 다음 식으로 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{v}_1 = [\bar{A} - \bar{B}YX^{-1}]v_1 + \bar{D}F(x, t)[\bar{E} - \bar{C}YX^{-1}]v_1. \quad (8)$$

위의 슬라이딩모드 동역학식 (8)은 LMI (6)을 사용하여 설

계된 슬라이딩평면은 슬라이딩모드 동역학의 quadratic 안정성은 보장하나 다음의 성질 P3를 보장하지는 않음을 의미한다.

P3: 축소등가 슬라이딩모드 동역학이 가정 A3-A6을 만족시키는 임의의 불확실성에 대하여 독립적이다.

결국 LMI (6)은 성질 P1-P3를 만족시키는 슬라이딩평면을 설계하는 문제에 직접 적용하기 힘들다.

슬라이딩모드 동역학 (4)는 임의의  $F(x, t)$ 에 대하여 다음 (9)와 같이 간소화되기 위한 필요충분조건은  $\bar{D} = \phi^T D = 0$  거나  $\bar{E} = \bar{C}K$  임을 의미한다.

$$\dot{v}_1 = [\bar{A} - \bar{B}K]v_1, \quad v_1 = \phi^T x. \quad (9)$$

$\bar{D} = \phi^T D = 0$ 가 성립할 때 다음 LMI (10)이 성질 P1-P3를 보장하는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건임은 자명하다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X - \bar{B}Y + * & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

$\bar{E} = \bar{C}K$ 가 성립할 때 다음 LMI (11)이 성질 P1-P3를 보장하는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건인 것 역시 자명하다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X - \bar{B}KX + * & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix} < 0.* \quad (11)$$

보조정리 1은  $\bar{E} = \bar{C}K$ 가 성립할 필요충분조건은 다음과 같음을 의미한다.

$$\bar{C} \bar{C}^g \bar{E} = \bar{E}. \quad (12)$$

여기에서  $\bar{C}^g$ 는  $\bar{C}$ 의 Moore-Penrose 역행렬이다. 그리고  $\bar{E} = \bar{C}K$ 의 일반해를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = \bar{C}^g \bar{E} + \mathcal{E} - \bar{C}^g \bar{C} \mathcal{E}. \quad (13)$$

여기에서  $\mathcal{E}$ 는 적절한 차원을 갖는 임의의 행렬이다. (13)을 사용하여 (11)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_0 X - \bar{B}_0 \mathcal{E} X + * & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

여기에서  $\bar{A}_0 = \bar{A} - \bar{B} \bar{C}^g \bar{E}$ ,  $\bar{B}_0 = \bar{B} - \bar{B} \bar{C}^g \bar{C}$ 이다. 결국 변수치환식  $\mathcal{E}X = Y$ 을 사용하면 (14)는 다음과 같은 LMI로 바뀐다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_0 X - \bar{B}_0 Y + * & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

정리하면 성질 P1-P3를 만족시키는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건은 다음 C1이나 C2가 성립하는 것이다.

C1:  $\bar{D} = \phi^T D = 0$ 이고 LMI (10)을 만족시키는 해가 존재한다.

C2:  $\phi^T D \neq 0$ ,  $\bar{C} \bar{C}^g \bar{E} = \bar{E}$ 이고 LMI (15)를 만족시키는 해가 존재한다.

정리 1: 시스템 (1)를 고려하자. 성질 P1-P3를 만족시키는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건은 C1이나 C2가 성립하는 것이다. C1이 성립하는 경우 성질 P1-P3를 만족시키는 선형 슬라이딩평면은 LMI (10)의 해를 사용하여 (7)처럼 표현될 수 있고 축소등가 슬라이딩모드 동역학은 다음의 시불변시스템으로 주어진다.

$$\dot{v}_1 = [\bar{A} - \bar{B}YX^{-1}]v_1. \quad (16)$$

C1이 성립하는 경우 성질 P1-P3를 만족시키는 선형 슬라이딩평면은 LMI (10)의 해를 사용하여 다음 (17)처럼 표현될 수 있고 축소등가 슬라이딩모드 동역학은 다음 (18)의 시불변시스템으로 주어진다.

$$S = (\bar{C}^g \bar{E} + [I - \bar{C}^g \bar{C}]YX^{-1})\phi^T + (B^T B)^{-1}B^T, \quad (17)$$

$$\dot{v}_1 = [(\bar{A} - \bar{B} \bar{C}^g \bar{E}) - \bar{B}(I - \bar{C}^g \bar{C})YX^{-1}]v_1. \quad (18)$$

주 2: (10)과 (15)는 매우 단순하고 선형적이므로 LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 우리는 성질 P1-P3를 만족시키는 슬라이딩평면을 매우 효율적으로 설계할 수 있다. 이 경우  $n(n+1)/2 - m(m+1)/2$  개의 최적화 변수를 요구한다. [7]을 사용하여서 설계할 수도 있는데 [7]의 방법은  $n \times n$  리아푸노프 행렬과 연관된 LMI를 사용했기에 최악의 경우  $n(n+1)/2 + m(m+1)/2$  개의 최적화변수를 요구한다. 결국 최악의 경우 우리의 방법이 [7]의 방법보다  $m(m+1)$ 개의 최적화변수를 덜 요구하므로 우리의 방법이 더 효율적이다.

주 3: [7]의 결과를 참조하여 우리는 다음의 스위칭 제어 회환제어를 사용하여 폐회로 응답을 광역적으로 안정화시킬 수 있음을 보일 수 있다.

$$u = -\delta\sigma - \frac{p(x, t)}{1 - \phi} \frac{\sigma}{\|\sigma\|}. \quad (19)$$

여기에서  $p(x, t)$ 는 다음처럼 주어지고

$$p(x, t) = (\varepsilon + \rho(x, t) + \|SAx\| + \|SD\| \cdot \|Ex\|),$$

$\delta, \varepsilon$ 는 양수이다. 그리고 다음과 같이 크기가 제한된 Bang-bang 제어를 사용하면 폐회로 시스템의 국소적인 (local) 안정성을 보장할 수 있다.

$$u_i(t) = -\xi_i \text{sgn}(\sigma_i).$$

여기에서  $\xi_i$ 는 양수의 설계 패러미터값이다.

#### IV. 강인 성능 설계

정리 1에서 제시된 방법은 LMI에 기반을 두었기 때문에 기존의 LMI 기반 방법들처럼 극배치조건,  $LQ/H_2$  성능조건, covariance 성능조건,  $L_\infty$  성능조건 등과 같이 LMI로 표현 가능한 성능지수들을 설계할 때 고려해 넣을 수 있는 융통성을 제공한다. 본 절에서 우리는 극배치조건,  $H_2/H_\infty$  구속 조건을 고려한 설계 방법을 제시한다.

1. 극배치 구속조건

[10]에 소개된 LMI region은 제어기 설계에 필요한 대부분의 유용한 영역을 포함한다. 슬라이딩모드 동역학의 모든 극들이  $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : A + z\Gamma + \bar{z}\Gamma^T < 0\}$ 로 정의되는 LMI region에 위치해야 하는 구속조건을 만족시켜야 한다고 가정하자. 여기에서  $A$ 는  $l \times l$  차원의 상수대칭행렬이고  $\Gamma$ 는  $l \times l$  차원의 상수행렬이다(LMI region에 대한 자세한 사항은 [10] 참조). [10]의 결과를 참조하면 슬라이딩모드 동역학 (9)는 다음을 만족하는 양한정행렬  $X$ 가 존재하면 모든 극들이 LMI region  $\Pi$ 에 위치함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{jk}X + \Gamma_{jk}(\bar{A} - \bar{B}K)X \\ + \Gamma_{kj}X(\bar{A} - \bar{B}K)^T \end{bmatrix}_{1 \leq j, k \leq l} < 0. \quad (20)$$

여기에서  $M = [M_{jk}]_{1 \leq j, k \leq l}$ 은  $M$ 이  $M_{jk}$ 의 블록을 갖는  $l \times l$  블록행렬임을 의미한다. (20)은 변수치환식  $KX = Y$ 에 의해 다음의 LMI로 변환될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{jk}X + \Gamma_{jk}(\bar{A}X - \bar{B}Y) \\ + \Gamma_{kj}(\bar{A}X - \bar{B}Y)^T \end{bmatrix}_{1 \leq j, k \leq l} < 0. \quad (21)$$

그러므로  $\Phi^T D \neq 0$ 인 경우에는 (12)-(15)와 (21)을 참조하여 다음의 조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{jk}X + \Gamma_{jk}(\bar{A}_0X - \bar{B}_0Y) \\ + \Gamma_{kj}(\bar{A}_0X - \bar{B}_0Y)^T \end{bmatrix}_{1 \leq j, k \leq l} < 0. \quad (22)$$

여기에서  $\bar{A}_0 = \bar{A} - \bar{B} \bar{C}^s \bar{E}$ ,  $\bar{B}_0 = \bar{B} - \bar{B} \bar{C}^s \bar{C}$ 이다. 결국 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 2: 시스템 (1)를 고려하자.  $\Phi^T D \neq 0$ 이라고 가정하자, 즉 불확실성  $DF(x, t)Ex$ 가 기존의 정합조건을 만족시키지 않는다고 가정하자. P1-P3를 만족시키며 슬라이딩모드 동역학의 모든 극점을 LMI region  $\Pi$ 에 위치시키는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건은  $\bar{C} \bar{C}^s \bar{E} = \bar{E}$ 가 성립하고 LMI (22)의 해가 존재하는 것이다. 그리고 이 경우 슬라이딩평면은 LMI (22)의 해를 사용하여 (17)처럼 표현될 수 있고 축소등가 슬라이딩모드 동역학은 (18)의 시불변시스템으로 주어진다.

주 4:  $\Phi^T D = 0$ 인 경우에는 P1-P3를 만족시키며 슬라이딩모드 동역학의 모든 극점을 LMI region  $\Pi$ 에 위치시키는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건은 LMI (21)의 해가 존재하는 것이고 슬라이딩평면은 LMI (21)의 해를 사용하여 (7)처럼 표현될 수 있음을 손쉽게 알 수 있다.

주 5: 위의 정리를 이용하여  $DF(x, t)Ex$ 가 기존의 정합조건을 만족시키지 않는 경우  $\bar{C} \bar{C}^s \bar{E} = \bar{E}$ 가 성립하고 적절한 양수  $\alpha$ 에 대하여 다음을 만족시키는 해가 존재하면 성질P1-P3를 만족시키며 슬라이딩모드 동역학의 최소 감쇠율  $\alpha$ 를 보장하는 슬라이딩평면이 존재함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}_0 + \alpha I)X - \bar{B}_0Y + * & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (23)$$

또한  $\bar{C} \bar{C}^s \bar{E} = \bar{E}$ 가 성립하고 LMI (24)를 만족시키는 해

가 존재하면 성질P1-P3를 만족시키며 슬라이딩모드 동역학의 모든 극점을 반지름과 중심이 각각  $r$ ,  $(-c, 0)$ 인 복소평면의 원상에 위치시키는 슬라이딩평면이 존재함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -rX & cX + \bar{A}_0X - \bar{B}_0Y \\ * & -rX \end{bmatrix} < 0. \quad (24)$$

2.  $H_2/H_\infty$  성능 지수

$H_2/H_\infty$  성능 구속조건을 포함시키기 위해 시스템 (1)을 수정한 다음의 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + DF(x, t)E]x(t) \\ &\quad + B[u(t) + \eta(x, u, t)] + Lw(t), \\ z(t) &= Hx(t). \end{aligned} \quad (25)$$

여기에서  $x, u, A, B, D, E, F(x, t), \eta(x, u, t)$ 는 (1)과 같고  $L, H$ 는 적절한 차원의 상수행렬이고  $w \in R^p$ 는 외란입력이며  $z \in R^q$ 는 제어출력이라고 하자. (4)를 참조하여 우리는 슬라이딩모드가 시작되는 reaching time  $t_r$  이후  $K\Phi^T x + (B^T B)^{-1} B^T z = Kv_1 + v_2 = 0$ 에 구속된 슬라이딩모드 동역학은 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= [\bar{A} - \bar{B}K]v_1 + \bar{D}F(x, t)[\bar{E} - \bar{C}K]v_1 \\ &\quad + \Phi^T Lw, \\ z &= (H\Phi - HBK)v_1. \end{aligned} \quad (26)$$

위의 동역학은 reaching time  $t_r$  이후 슬라이딩모드 동역학이 다음의 (27)과 같은 시불변시스템으로 주어지기 위한 필요충분조건은  $\bar{D} = \Phi^T D = 0$  거나  $\bar{E} = \bar{C}K$ 임을 의미한다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= [\bar{A} - \bar{B}K]v_1 + \Phi^T Lw, \\ z &= (H\Phi - HBK)v_1. \end{aligned} \quad (27)$$

그리고 이 경우  $w$ 에서  $z$ 로의 전달함수  $H_{zw}(s)$ 가 다음처럼 주어짐을 의미한다.

$$H_{zw}(s) = (H\Phi - HBK)(sI - \bar{A} + \bar{B}K)^{-1} \Phi^T L. \quad (28)$$

[9]의  $H_2$  제어 표준 이론으로부터  $\|H_{zw}\|_2 < \nu$ 의  $H_2$  성능 구속조건을 만족시키기 위한 필요충분조건이 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{A}X - \bar{B}Y + * + \Phi^T L L^T \Phi &< 0, \quad Tr(W) < \nu, \\ \begin{bmatrix} W & H\Phi X - HB Y \\ * & X \end{bmatrix} &> 0. \end{aligned} \quad (29)$$

그러므로  $\Phi^T D \neq 0$ 인 경우에는 (12)-(15)와 (29)를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

정리 3: 시스템 (1)를 고려하자.  $\Phi^T D \neq 0$ 이라고 가정하자. P1-P3를 만족시키며  $\|H_{zw}\|_2 < \nu$ 를 보장하는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건은  $\bar{C} \bar{C}^s \bar{E} = \bar{E}$ 가 성립하고 다음 LMI (30)의 해가 존재하는 것이다. 그리고 이 경우 슬라이딩평면은 LMI (30)의 해를 사용하여 (17)처럼 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \overline{A_0}X - \overline{B_0}Y + * + \Phi^T L L^T \Phi < 0, \\ & \begin{bmatrix} W & \overline{\sigma} \\ * & X \end{bmatrix} > 0, \quad T\gamma(W) < \nu. \end{aligned} \quad (30)$$

여기에서  $\overline{A_0} = \overline{A} - \overline{B} \overline{C^g} \overline{E}$ ,  $\overline{B_0} = \overline{B} - \overline{B} \overline{C^g} \overline{C}$  이며  $\overline{\sigma} = H(\Phi - B \overline{C^g} \overline{E})X - HB(I - \overline{C^g} \overline{C})Y$  이다.

주 6:  $\Phi^T D = 0$  인 경우에는 (17)과 (30)을 (7)과 (29)로 대체하면 된다. [2]에서는  $J = \int_{t_0}^{\infty} x^T Q x dt$  를 최소화하는 슬라이딩평면 설계방법이 주어졌다. LQ제어이론과  $H_2$  제어이론과의 동가를 고려하여 [2]에서 다루어진 방법은  $\Phi^T D = 0$ ,  $H^T H = Q > 0$ ,  $L = I$  로 가정한 아주 특별한 경우에 해당함을 알 수 있다.

[9]의  $H_{\infty}$  제어 표준 이론으로부터  $\|H_{zw}\|_{\infty} < \gamma$  의  $H_{\infty}$  성능구속조건을 만족시키기 위한 필요충분조건이 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overline{A}X - \overline{B}Y + * & * & * & 0 \\ L^T \Phi & -I & 0 & 0 \\ H(\Phi X - BY) & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

그러므로  $\Phi^T D \neq 0$  인 경우에는 (12)-(15)와 (31)을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

정리 4: 시스템 (1)를 고려하자.  $\Phi^T D \neq 0$  이라고 가정하자. P1-P3를 만족시키며  $\|H_{zw}\|_{\infty} < \gamma$  를 보장하는 선형 슬라이딩평면이 존재할 필요충분조건은  $\overline{C} \overline{C^g} \overline{E} = \overline{E}$  가 성립하고 다음 LMI (32)의 해가 존재하는 것이다. 그리고 이 경우 슬라이딩평면은 LMI (32)의 해를 사용하여 (17)처럼 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overline{A_0}X - \overline{B_0}Y + * & * & * & 0 \\ L^T \Phi & -I & 0 & 0 \\ \overline{\sigma} & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

여기에서  $\overline{A_0} = \overline{A} - \overline{B} \overline{C^g} \overline{E}$ ,  $\overline{B_0} = \overline{B} - \overline{B} \overline{C^g} \overline{C}$  이며  $\overline{\sigma} = H(\Phi - B \overline{C^g} \overline{E})X - HB(I - \overline{C^g} \overline{C})Y$  이다.

주 7:  $\Phi^T D = 0$  인 경우, 즉 불확실성이 기존의 정합조건을 만족시키는 경우에는 (17)과 (32)를 (7)과 (31)로 대체하면 된다.

주 8: 여러 개의 성능 구속조건을 동시에 만족시키는 슬라이딩평면을 설계하려면 각 성능조건에 해당하는 LMI 조건을 모으고 모아진 LMI 조건을 동시에 만족시키는 공통의 해  $X, Y$  를 찾으면 된다.

### V. 수치적 예

다음 자료를 갖는 시스템 (1)을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \\ F(x, t) = \zeta, \quad f(x, t) = 0, \quad Z(x, t) = 0.$$

여기에서  $\zeta$  는  $[-1, 1]$  사이의 값을 갖는 미지의 패러미터값이다. 위의 모델 (33)은 [11]에서 사용된 속도가 135 knots일 때의 VTOL의 선형화된 모델에 불확실성이 가미된 동역학식이다. 위의 불확실성이 포함된 VTOL 모델 동역학에서  $DF(x, t)E$  가 정합조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다. 슬라이딩모드 동역학의 최소감쇠율  $\alpha = 1$  를 보장하며 성질 P1-P3를 만족시키는 슬라이딩평면의 설계가 요구된다고 가정하자. 정리 1과 주 5를 참조하면 LMI (23)의 해가 존재하는 것이 슬라이딩평면 존재의 필요충분조건임을 알 수 있다. LMI 최적화를 통해 다음과 같은 (23)의 해를 구할 수 있다.

$$X = \begin{bmatrix} 9.870 & -20.721 \\ * & 98.139 \end{bmatrix}, \quad Y = 10^4 \begin{bmatrix} -0.102 & -1.070 \\ 0.218 & 2.277 \end{bmatrix}$$

여기에서 최적화 변수가 7개 필요함을 알 수 있다. 만약 [7]의 방법을 쓴다면 최적화 변수가 13개가 필요했을 것이다. 결국 본 논문의 방법이 위의 예에서는 최적화 변수가 6개 덜 필요함을 알 수 있다. 공식 (17)에 의해 다음의 슬라이딩평면을 구할 수 있다.

$$\sigma = Sx = \begin{bmatrix} 2.168 & 0.074 & 0.040 & -1.001 \\ 1.012 & -0.097 & 0.019 & -0.599 \end{bmatrix} x = 0 \quad (34)$$

그리고 공식 (18)를 사용하여 축차 등가 슬라이딩 모드 동역학 시스템이 다음과 같은 시불변 안정한 시스템으로 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{z}_1 = \begin{bmatrix} -0.6600 & 0.4124 \\ -7.5557 & -2.8344 \end{bmatrix} z_1. \quad (35)$$

위의 시스템은 고유치가  $-1.747 \pm 1.391i$  로 -1보다 작아 슬라이딩모드 동역학의 최소감쇠율  $\alpha = 1$  이 보장됨을 알 수 있다.

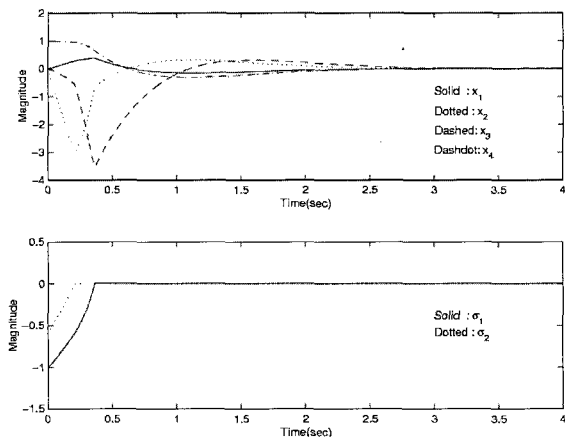


그림 1. (33)과 (36)의 폐회로 응답(위쪽:  $x$ , 아래쪽:  $\sigma$ ).  
Fig. 1. Closed-loop system responses of (33) and (36) (Top:  $x$ , Bottom:  $\sigma$ ).

그림 1(Fig. 1)은 Bangbang 형태를 연속함수로 근사화한 제어기 (36)을 정합조건을 만족시키지 않는 시스템 (33)에 가했을 때 출력을 도시한 것으로 여기에서  $x_1(0)=0, x_2(0)=0, x_3(0)=0, x_4(0)=0, \zeta = \sin 2\pi t$ 으로 주어진다고 가정했다.

$$u_i(t) = -3 \frac{\sigma_i}{(|\sigma_i| + 0.001)} \quad (36)$$

**VI. 결론**

본 논문에서 우리는 불확실성을 갖는 다변수 시스템을 위한 슬라이딩모드 제어시스템 설계 문제를 고려했다. 슬라이딩모드 동역학이 안정하며 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성에 전혀 영향 받지 않는 것을 보장하는 선형 슬라이딩 평면이 존재할 필요충분조건을 LMI 형태로 제시하였다. 그리고 극배치조건,  $H_2/H_\infty$  구속 조건을 고려한 설계 방법을 제시하였다. 마지막으로 제안된 방법의 효용성을 보이기위해 수치적인 예를 제시하였다.

**참고문헌**

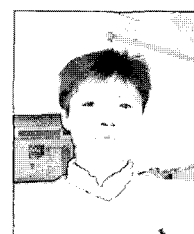
[1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes." *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-22, pp. 212-222, 1977.  
 [2] V. I. Utkin and K. D. Yang, "Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems," *Autom. remote Contr.*, vol. 39, pp. 1466-1470, 1978.  
 [3] C. Edwards and S. K. Spurgeon, "Linear matrix inequality methods for designing sliding mode output

feedback controllers," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 150, pp. 539-545, 2003.  
 [4] K.-S. Kim and Y. Park, "Parametric approaches to sliding mode design for linear multivariable systems," *Int. J. Control, Automation, and Systems*, vol. 1, pp. 11-18, 2003.  
 [5] K.-S. Kim, Y. Park, and S.-H. Oh, "Robust sliding modes design for parametric uncertain systems:a Riccati approach," *Automatica*, vol. 34, pp. 1015-1020, 2000.  
 [6] C. Edwards, S. K. Spurgeon, and A. Akoachere, "Sliding mode output feedback controller design using linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, pp. 115-119, 2001.  
 [7] 최한호, "불확실성이 매칭조건을 만족시키지 않는 선형 시스템을 위한 슬라이딩 평면 설계 방법," 제어자동화시스템공학논문지, 제9권, 11호, pp. 861-867, 2003.  
 [8] C. R. Rao and S. K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, Wiley, 1971.  
 [9] S. Boyd, L. ElGhaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.  
 [10] M. Chilali and P. Gahinet, " $H_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, pp. 358-367, 1996.  
 [11] L. Keel, S. P. Bhattacharyya, and J. W. Howze, "Robust control with structured perturbations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, pp. 68-78, 1988.



이재관

1968년 1월 18일생. 1991년 2월 서울대학교 기계설계학과 준우등 졸업(공학사). 1993년 2월 서울대학교 기계설계학과(공학석사). 1999년 2월 서울대학교 기계설계학과(공학박사). 1999년 3월~2001년 2월 서울대학교 정밀기계설계공동연구소 연구원. 2002년 3월~현재 삼성 SDS 책임컨설턴트. 관심분야는 반도체 관련 설비 등 동역학 시스템 및 제어기 설계, 유전 알고리즘 및 최적화 알고리즘.



최한호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원. 1998년 3월~2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수. 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 강인제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로보틱스.