

# 주기적인 입력의 평균이 느리게 변하는 비선형 시스템의 안정성

## On a Stability Property of Nonlinear Systems with Periodic Inputs Having Slowly Varying Average

최 용 운, 심 형 보\*, 서 진 현  
(Yong-un Choi, Hyungbo Shim, and J.H. Seo)

**Abstract :** It is known that, if an equilibrium of a nonlinear system has a stability property when an external input is frozen, then the property is maintained under the input being slowly varying. In this paper, we show that the same stability property is preserved not only under slowly varying input but also under slowly-varying-average input (which is not actually slowly varying but its 'average' is slowly varying) The input is assumed to be periodic and to vary sufficiently fast. We prove the claim by the average theory and some previous results on the slowly varying inputs.

**Keywords :** average theory, slowly varying input, stability of nonlinear systems

### I. 서론

1990년대 초반 [1,3,5]에서 입력이 느리게 변하는 비선형 시스템의 안정성에 대한 결과들이 발표되었고, 최근에도 주요 결과들이 문헌 [2]에 실려있기도 하다. 이 논문의 목표는 [1,3,5]의 결과를 확장하는 것인데, 입력의 '평균'이 느리게 변하더라도 기존 결과에서 도출하는 유사한 안정성을 보일 수 있을 것이다. 즉, 본 논문에서 고려하는 시스템의 입력은 '평균'이 느리게 변하지만, 입력 자체는 그렇지 않을 수도 있다.

좀더 구체적으로, 다음의 시스템을 고려하자:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1}$$

여기서,  $f(\cdot, \cdot)$  는 연속적으로 미분 가능하고 ( $C^1$ ),  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \Gamma \subset \mathbb{R}^m$  이며,  $\Gamma$  는 연결된(connected) 컴팩트 집합이다. 시스템 (1)이 상수 입력  $u \in \Gamma$  를 가질 때, 그 시스템의 평형점  $x^*(u)$  가 존재한다고 가정한다 (즉,  $f(x^*(u), u) = 0$ ). 또한,  $\Gamma$  에 속하는 임의의 두 상수  $u_1$  과  $u_2$  에 대해서 시스템의 상태 변수  $x(t)$  를 이 시스템의 어떤 궤적(trajjectory)을 따라가며  $x^*(u_1)$  의 근방에서  $x^*(u_2)$  의 근방으로 옮기는 문제를 설정하자. 이 문제는 [1,3,5]에서 다뤄졌는데,  $\Gamma$  안에 두 점  $u_1$  과  $u_2$  를 잇는 곡선 경로 U가 있다는 전제 하에, 곡선 U 위에 고정되어 있는 각  $\bar{u}$  에 대응되는 시스템의 평형점  $x^*(\bar{u})$  가 국부적으로, 지수적으로 안정(locally exponentially stable)한 경우, 입력  $u(t)$  를 곡선 U를 따라  $u_1$  에서  $u_2$  로 충분히 느리게 변화시키면, 상태 변수  $x(t)$  는 점  $x^*(u_1)$  의 근방에서  $x^*(u_2)$  의 근방으로 이동할 수 있음을 밝혔다. 한편, 여기서 각각의  $\bar{u} \in U$  에 대해서, 평형점  $x^*(\bar{u})$  의 이 끌림 영

역(region of attraction)이  $\bar{u}$  를 내점(interior point)으로 포함한다면, 지수적인 안정성은 점근적인 안정성(asymptotic stability)으로 완화될 수 있다[5]. 이 성질을 'NvBA (Non-vanishing Basin of Attraction)' 안정성이라고 하고, [6]에 그 안정성을 검증하는 방법이 제안되어 있다. 본 논문에서는 입력  $u(t)$  가 반드시 느리게 변할 필요는 없고, 평균값이 곡선 U를 따라가도 같은 결과를 얻을 수 있음을 보인다.

실제로, 입력의 평균이 느리게 변한다는 가정이 입력 자체가 느리게 변한다는 것보다 더 적합한 경우가 많다. 고전적인 예로는 순간적인 제어 입력의 평균이 알짜 효과(net effect)를 내는 펄스-폭 변조(pulse-width modulation) 제어이다. 또 다른 예는 환자에게 처방하는 약물의 양을 조절(drug dose control)하는 문제인데, 보통 약물 효과는 환자가 약을 복용한 시점에 따라서 순간적인 변화를 겪는다. 하지만, 이런 변화를 모두 고려하는 것은 너무 복잡한 일이므로, 장기간에 걸쳐서 나타나는 약물 효과, 즉, 평균적인 효과만을 고려하는 것이 보다 합리적일 수 있을 것이다.

본 논문은 II절에 주요 결과를, III절에 그 결과를 진자 시스템에 적용한 모의 실험 결과를 담고 있다.

### II. 주요 결과

효과적인 설명을 위해, 위에서 간략히 소개한 시스템이 일반적으로 다음과 같이 주어졌다고 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u_a(t), u_f(\frac{1}{\varepsilon}t)), \\ u_a &\in \Gamma \subset \mathbb{R}^m, u_f \in \mathbb{R}^l \end{aligned} \tag{2}$$

여기서,  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  와  $u_a(\cdot)$  는 연속적으로 미분 가능하고,  $\Gamma$  는 연결된 컴팩트 집합이며, 조각적으로 연속(picewise continuous)인  $u_f(\cdot)$  는 주기가  $T$  인 주기 함수이다. (따라서,  $u_f(t/\varepsilon)$ 도 주기 함수이고, 주기는  $\varepsilon T$  이다.)

작은 양수  $\varepsilon$  는 나중에 결정되는 값인데, 함수  $u_f$  의 값이 빠르게 진동하고 있음을 나타낸다. 이 시스템은 대체적으로 각기 다른 속도로 변하는 세 가지 중요한 변수들을 가지는데,  $\varepsilon$

\* 책임저자(Corresponding Author)  
논문접수 : 2004. 10. 18., 채택확정 : 2004. 12. 4.  
최용운, 심형보, 서진현 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부  
(cloud9@snu.ac.kr/hshim@snu.ac.kr/jhseo@snu.ac.kr)  
※ 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-003-D00130).

이 매우 작아서,  $u_f(t/\varepsilon)$  가 충분히 빠르게 진동하게 되고,  $u_a(\cdot)$  는 시간에 대한 변화율이 작으며(즉,  $\|du_a/dt\| \leq \kappa$ ,  $\kappa$  는 작은 값), 상태 변수  $x(t)$  는 두 변수의 중간 정도 크기의 변화율을 갖는다. 즉, 입력 신호의 빠름과 느림은 상태 변수  $x(t)$  의 변화율을 기준으로 삼은 것이라 할 수 있다.

참고 1 : 이 논문에서 다루는 “입력  $u(t)$  의 평균이 느리게 변하는 시스템”은 다음 형태라고 볼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f(x(t), u_a(t) + u_f(\frac{1}{\varepsilon}t)).$$

여기서,  $u_a(\cdot)$  는 느리게 변하고, 주기 함수  $u_f(\cdot)$  의 평균은 0 이다. 그러면, 위 시스템은 (2)에 포함된다.

앞으로의 논의 전개를 위해  $t/\varepsilon$  를 하나의 독립 변수  $\tau$  로 간주하는데,  $\tau$  를  $u_a$  에 비해서 매우 빠르게 변하는 가상의 상태 변수로 이해할 수도 있을 것이다. 그러면, 시스템 (2) 를 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\dot{x}(t) = f_{av}(x(t), u_a(t)) + f_p(x(t), u_a(t), u_f(\tau)). \quad (3)$$

여기서, 함수  $f$  의 ‘평균’,  $f_{av}$  는

$$f_{av}(x, u_a) = \frac{1}{T} \int_0^{T+\sigma} f(x, u_a, u_f(s)) ds$$

와 같이 정의되는데, 여기서,  $\sigma$  는 임의의 상수이고,  $f_p(x, u_a, u_f) = f(x, u_a, u_f) - f_{av}(x, u_a)$  이다. 따라서, 모든  $x$  와  $u_a$  에 대해서  $\int_0^{T+\sigma} f_p(x, u_a, u_f(s)) ds = 0$  임을 알 수 있다.

이제, 평균 시스템이 고정된(frozen) 상수 입력으로  $u_a$  를 가지는 경우, 그 시스템의 안정성을 다음과 같이 가정한다. 여기서, 집합  $B_r(x)$  (또는,  $\bar{B}_r(x)$ ) 은 중심이  $x$  이고, 반지름이  $r > 0$  인 열린 (또는, 닫힌) 근방(neighborhood 또는 ball) 을 의미하기로 한다.

가정 2 : 각 상수  $u_a \in \Gamma$  에 대해서, (평균) 시스템

$$\dot{x} = f_{av}(x, u_a) \quad (4)$$

이 고립된(isolated) 평형점  $x^*(u_a)$  를 가진다. 즉,  $f_{av}(x^*(u_a), u_a) = 0$  이다. 또한, 국부적으로 립슈츠(locally Lipschitz)인 함수  $V: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  와 양수  $r$  이 모든  $u_a \in \Gamma$  와  $x \in B_r(x^*(u_a))$  에 대해서 다음이 만족된다:

$$\alpha_1(\|x - x^*(u_a)\|) \leq V(x, u_a) \leq \alpha_2(\|x - x^*(u_a)\|) \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_{av}(x, u_a) \leq -\alpha_3(\|x - x^*(u_a)\|), \text{ a.e.} \quad (6)$$

여기서,  $\alpha_i(\cdot)$ , ( $i=1,2,3$ ) 는 클래스-K 함수이다.

참고 3 : 가정 2는 느리게 변하는 시스템(slowly varying systems)에 관련된 것으로, 입력이 고정되어 있을 경우의 시스템이 점근적으로 안정한 경우, 입력이 상수가 아니더라도 충분히 느리게 변하면 시스템이 평형점 근처에 머물러 있다는 기존의 결과가 나와 있다. 본 논문에서는 느리게 변하는

시스템의 이 결과가 평균 시스템 (4)에 적용된다고 생각할 수 있겠다.

정리 4 : 가정 2를 만족하는 시스템 (2)를 고려하자. 임의의 양수  $\rho$  가 주어질 때, 다음 세 조건 (7)-(9) 를 만족하면, 초기 시간 이후에 항상 상태 변수  $x(t)$  가  $x^*(u_a(t))$  에 충분히 가까이 있도록, 즉,

$$\|x(t) - x^*(u_a(t))\| \leq \rho, \quad \forall t \geq 0$$

을 만족하도록 양의 상수  $\delta$ ,  $\kappa$ ,  $\varepsilon^*$  를 찾을 수 있다:

i) 초기 상태 변수가 평형점  $x^*(u_a(0))$  가까이에 있다.

$$\|x(0) - x^*(u_a(0))\| \leq \delta; \quad (7)$$

ii)  $u_a(t)$  를 충분히 느리게 변한다. 즉,

$$\left\| \frac{du_a}{dt}(t) \right\| \leq \kappa; \quad (8)$$

iii) 마지막으로,  $u_f(t/\varepsilon)$  는 충분히 빠르게 진동하도록 한다. 즉,

$$0 < \varepsilon < \varepsilon^*. \quad (9)$$

증명 : 먼저, 우리가 관심있는 상태 변수, 입력 공간의 콤팩트 부분 집합을 정의한다.

$$D := \{(x, u_a) \in \mathbb{R}^n \times \Gamma : x \in \bar{B}_r(x^*(u_a))\}.$$

각 원소  $(x, u_a) \in D$  에 대해서,  $\mu(x, u_a, \tau)$  를 다음과 같이 정의한다:

$$\mu(x, u_a, \tau) = \int_0^\tau f_p(x, u_a, u_f(s)) ds.$$

여기서,  $\tau \in \mathbb{R}$  이고. 따라서, 다음이 성립한다:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, u_a, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial f_p}{\partial x}(x, u_a, u_f(s)) ds,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u_a}(x, u_a, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial f_p}{\partial u_a}(x, u_a, u_f(s)) ds.$$

위의 정적분들은  $x$  와  $u_a$  를 고정하고 계산한 것임을 주목한다. 또한,  $\mu(x, u_a, \tau)$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, u_a, \tau)$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial u_a}(x, u_a, \tau)$  의 크기(norm)는  $D \times [0, \infty)$  의 모든 원소  $(x, u_a, \tau)$  에 대해서 어떤 양의 상수  $c_m$  보다 작운데, 그것은  $f_p(x, u_a, u_f(\tau))$  와  $(x$  와  $u_a$  에 대한)  $f_p$  의 편미분들이  $\tau$  에 대해서 주기  $T$  인 주기 함수이고, 평균이 0 이기 때문이다.

다음의 좌표 변환을 생각하자.

$$x = y + \varepsilon \mu(y, u_a, t/\varepsilon) \quad (10)$$

여기서, 새로운 변수  $y$  는  $n$  차원 벡터이다. 사상(map) (10)의 자코비안(Jacobian)은

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y, u_a, \tau) = I + \varepsilon \frac{\partial \mu}{\partial y}(y, u_a, \tau)$$

으로 볼 수 있다. 변수  $y$ 가 음함수로 정의되었지만, 자코비안은 가역(invertible) 행렬이고, 그것의 주요 부분 행렬의 행렬식(leading principal minor)은  $\varepsilon$ 이 충분히 작으면  $(y, u_a, \tau) \in D \times [0, \infty)$  영역에서 항상 양수이다. 그것은 편미분  $\partial\mu/\partial y$ 이  $D \times [0, \infty)$ 에서 유계이기 때문이다. 그러면, [4, Thm. 1]에 의해서 양수  $\varepsilon_1$ 이 다음을 만족하도록 구할 수 있다.

각각의  $(u_a, t, \varepsilon) \in \Gamma \times [0, \infty) \times [0, \varepsilon_1]$ 에 대해서, 사상  $y \mapsto x$ 은  $C^1$ 이고, 모든  $y \in \bar{B}_r(x^*(u_a))$ 에 대해서 일대일 대응 함수이다.

이제, 식 (10)의 양변을 시간에 대해서 미분하면,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{y}(t) + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial y}(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \cdot \dot{y}(t) \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial u_a}(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \cdot \dot{u}_a(t) \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial \tau}(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

이 되고, 이 식을 다음과 같이 정리한다.

$$\begin{aligned} &\left[ I + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial y}(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \right] \dot{y}(t) \\ &= \dot{x} - \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial u_a}(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \cdot \dot{u}_a(t) \\ &\quad - \frac{\partial\mu}{\partial \tau}(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \\ &= f(x(t), u_a(t), u_f(t/\varepsilon)) \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial u_a}(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \cdot \dot{u}_a(t) - f_p(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \\ &= f_{av}(y(t), u_a(t)) - \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial u_a}(y(t), u_a(t), t/\varepsilon) \cdot \dot{u}_a(t) \\ &\quad + f(x(t), u_a(t), u_f(t/\varepsilon)) - f(y(t), u_a(t), u_f(t/\varepsilon)) \\ &= f_{av}(y, u_a) + p_0(y, u_a, t, \varepsilon)\dot{u}_a + p_1(y, u_a, u_f, t, \varepsilon). \end{aligned}$$

여기서,  $p_0(y, u_a, t, \varepsilon) = -\varepsilon \partial\mu/\partial u_a$ 이고,  $p_1(y, u_a, u_f, t, \varepsilon) = [f(y + \varepsilon\mu, u_a, u_f) - f(y, u_a, u_f)]$ 이다. 함수  $p_1$ 은 ( $f$ 가 연속적으로 미분 가능하므로)

$$p_1(y, u_a, u_f, t, \varepsilon) = \bar{f}(y, u_a, u_f, \varepsilon\mu) \cdot \varepsilon\mu$$

와 같이 쓸 수 있으며,  $\bar{f}$ 는 연속 함수의 행렬이다. 따라서, 모든  $(y, u_a) \in D$ ,  $t \in [0, \infty)$ 과  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ 에 대해서

$$\|p_0(y, u_a, t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon c_m \tag{11}$$

$$\|p_1(y, u_a, u_f, t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon c_f c_m \tag{12}$$

이고, 여기서,

$$c_f = \sup_{(y, u_a) \in I, 0 \leq \tau, 0 \leq \varepsilon\mu \leq \varepsilon_1 c_m} \|\bar{f}(y, u_a, u_f(\tau), \varepsilon\mu)\|$$

이다( $\bar{f}$ 가 연속이고,  $u_f$ 가 조각적 연속이므로  $c_f < \infty$ 이다).

이제, 가정 2의 함수  $V$ 를 이용하여, 좌표 변환된 시스템을 분석한다. 이 시스템의 궤적에 따른  $V$ 의 전미분(total derivative)을  $y$  좌표로 표현하면,

$$\dot{V}(y, u_a) = \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial u_a} \dot{u}_a$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial V}{\partial y} \left[ I + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial y} \right]^{-1} (f_{av} + p_0 \dot{u}_a + p_1) + \frac{\partial V}{\partial u_a} \dot{u}_a \\ &= \frac{\partial V}{\partial y} f_{av} + \frac{\partial V}{\partial y} \left( \left[ I + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial y} \right]^{-1} - I \right) f_{av} \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial y} \left[ I + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial y} \right]^{-1} (p_0 \dot{u}_a + p_1) + \frac{\partial V}{\partial u_a} \dot{u}_a \end{aligned}$$

와 같다. 함수  $V$ 가 국부적으로 립쉬츠이므로, 그 편미분  $\partial V/\partial y$ 과  $\partial V/\partial u_a$ 은 집합  $D$ 에서 거의(almost everywhere) 유계이다. 따라서, 다음 상수들을 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} c_v &= \text{esssup}_{(y, u_a) \in I} \left\| \frac{\partial V}{\partial y}(y, u_a) \right\|, \\ c_w &= \text{esssup}_{(y, u_a) \in D} \left\| \frac{\partial V}{\partial u_a}(y, u_a) \right\|, \quad c_a = \text{esssup}_{(y, u_a) \in I} \|f_{av}(y, u_a)\|. \end{aligned}$$

또한,  $\varepsilon < 1/c_m$  일 때,

$$\left\| \left[ I + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon c_m}, \quad \left\| \left[ I + \varepsilon \frac{\partial\mu}{\partial y} \right]^{-1} - I \right\| \leq \frac{\varepsilon c_m}{1 - \varepsilon c_m}$$

이 성립한다.

따라서, 가정 2와 (11), (12)로부터 거의 모든  $(x(t), u_a(t)) \in D$ 에서 다음이 성립된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(y(t), u_a(t)) &\leq -\alpha_3 (\|y(t) - x^*(u_a(t))\|) \\ &\quad + c_v \frac{\varepsilon c_m}{1 - \varepsilon c_m} c_a + c_v \frac{1}{1 - \varepsilon c_m} \varepsilon c_m \|\dot{u}_a\| \\ &\quad + c_w \frac{1}{1 - \varepsilon c_m} \varepsilon c_f c_m + c_w \|\dot{u}_a\|, \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

이제, 일반성을 잃지 않고, 양수  $\rho (\leq r)$ 가 주어졌다고 가정한다. 그러면, 다음을 만족하는 양수의 순서쌍  $(\varepsilon_2, \kappa)$ 를 정할 수 있는데, 아래 식의 좌변이 두 변수에 대해서 연속이고, 두 변수 모두 0일 때, 좌변도 0이 되기 때문이다.

$$\frac{\varepsilon c_m}{1 - \varepsilon c_m} c_v (c_a + \kappa + c_f) + c_w \kappa \leq (\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1)(\frac{\rho}{2}).$$

그러면,

$$\dot{V}(y(t), u_a(t)) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) + (\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1)(\frac{\rho}{2})$$

인데, 이로부터  $V(y(0), u_a(0)) \leq \alpha_1(\rho/2)$ 일 때, 모든  $t \geq 0$ 에서  $V(y(t), u_a(t)) \leq \alpha_1(\rho/2)$ 가 성립함을 알 수 있다. 따라서,  $\delta = (\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1)(\rho/2)$ 로 두면,  $\|y(0) - x^*(u_a(0))\| \leq \delta$ 이고,  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1/c_m\}$ 일 경우, 모든  $t \geq 0$ 에 대해서  $\|y(t) - x^*(u_a(t))\| \leq \rho/2$ 가 성립한다.

원래 시스템이  $x$  좌표로 주어졌으므로,  $x$  좌표에서 분석하고 증명을 마치기로 한다. 좌표 변환 (10)으로부터,  $x(0) = y(0)$ 이다. 따라서,  $\|x(0) - x^*(u_a(0))\| \leq \delta$ 일 때,  $\|y(t) - x^*(u_a(t))\| \leq \frac{\rho}{2}$ 이고,  $(y(t), u_a(t)) \in D$  (모든  $t \geq 0$ )이므로,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*(u_a(t))\| &\leq \|x(t) - y(t)\| + \|y(t) - x^*(u_a(t))\| \\ &\leq \|\varepsilon\mu(y(t), u_a(t), t/\varepsilon)\| + \frac{\rho}{2} \leq \varepsilon c_m + \frac{\rho}{2} \end{aligned}$$

이 된다. 이제, 마지막으로,  $\varepsilon^*$  를

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \frac{1}{c_m}, \frac{\rho}{2c_m}\}$$

와 같이 정하면  $\varepsilon < \varepsilon^*$  일 때, 모든  $t \geq 0$  에 대해서,

$$\|x(t) - x^*(u_a(t))\| \leq \rho$$

이다. ■

### III. 감쇠가 있는 진자

이 절에서는 본 논문의 결과를 감쇠(damping)가 있는 진자(pendulum) 시스템에 적용한다. 진자의 질량, 실의 길이, 중력 등의 단위를 적절히 조정된 후에 얻은 다음 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega(t) \\ -\sin\theta(t) - \omega(t) + u(t) \end{bmatrix} \\ &=: f(\theta(t), \omega(t), u(t)). \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,  $\theta \in \mathbb{R}$  는 각도,  $\omega \in \mathbb{R}$  는 각속도이며,  $u(t) \in \mathbb{R}$  는 진자를 움직이기 위한 토크(torque)이다. 고정된 입력  $u(t) = \alpha$  에 대한 이 시스템의 평형점은  $x^*(\alpha) = [\sin^{-1}(\alpha) \ 0]^T$  이다. 문헌 [5]에서 입력  $u(t)$  가 느리게 변하는 경우 이 시스템의 안정성을 분석했다. 이 절에서는 본 논문의 결과를 이용하여  $u(t)$  가 느리게 변하지 않더라도 평균이 느리게 변하면 같은 안정성을 얻을 수 있음을 확인한다.

토크  $u(t)$  는 평균이 느리게 변하는 입력이므로,  $u(t) = u_a(t) + u_f(t/\varepsilon)$  으로 표현할 수 있다. 여기서,  $u_a \in \Gamma = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$  이고,  $u_f(\cdot) = 2\sin t$  로 주어진다 가정한다. 그러면, 위 시스템 (14)의 평균 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega(t) \\ -\sin\theta(t) - \omega(t) + u_a(t) \end{bmatrix} \\ &=: f_{av}(\theta(t), \omega(t), u_a(t)). \end{aligned} \quad (15)$$

이 시스템의 상태 변수와 입력의 평균이 다음 집합

$$D := \{(\theta, \omega, u_a) \in \mathbb{R}^2 \times \Gamma : (\theta, \omega) \in \bar{B}_{\frac{\pi}{4}}(x^*(u_a))\}$$

안에 있을 경우를 고려하기로 한다. 평균 시스템에서 고정된  $u_a \in \Gamma$  값에 대한 리아푸노프 함수를 영역  $D$  에서 다음과 같이 정할 수 있다.

$$\begin{aligned} V(x, u_a) &= \frac{1}{2}(x - x^*(u_a))^T P(x - x^*(u_a)) \\ &+ \int_0^{\theta - \sin^{-1}(u_a)} \{\sin(\sigma + \sin^{-1}(u_a)) - u_a\} d\sigma. \end{aligned}$$

여기서,  $x = [\theta \ \omega]^T \in \mathbb{R}^2$  이고,  $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$  이다. 그러면,  $V$  는 가정 2의 (5)와 (6)에 해당되는 다음 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} c_1 \|x - x^*(u_a)\|^2 \leq V(x, u_a) \leq c_2 \|x - x^*(u_a)\|^2, \\ \frac{\partial V}{\partial x} f_{av} \leq -c_3 \|x - x^*(u_a)\|^2. \end{aligned}$$

여기서,  $c_1 = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(P) = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(P) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7+\sqrt{5}}{8} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ ,  $c_3 = \min\{(\frac{1}{2} - \zeta)\frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}), 1 - \frac{1}{4\zeta}\}$  이다. ( $c_3$  가 가장 큰 값을 가질 수 있도록,  $\zeta = 0.273$  으로 두었다.) 시스템 (14)와 (15)로부터

$$f_p(x, u_a, u_f) = f(x, u_a + u_f) - f_{av}(x, u_a) = [0 \ u_f]^T$$

이므로

$$\mu(x, u_a, \tau) = \int_0^\tau f_p(x, u_a, u_f(s)) ds = \int_0^\tau [0 \ u_f(s)]^T ds$$

인데,  $\mu$  는 상태 변수  $(\theta, \omega)$  와 입력의 평균  $u_a$  와 모두 무관한 함수이다. 그러므로,  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial u_a} = 0$  이고, (11)과 관련하여,  $p_0 = 0$  이다. (참고로,  $u_f(t) = 2\sin t$  이므로  $\mu$  와 21 편 미분의 상계는  $c_m = 4$  이다.) 또한, (12)

$$p_1 = [f(x + \varepsilon \mu, u_a, u_f) - f(x, u_a, u_f)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \varepsilon \mu$$

에서 함수 행렬  $\bar{f}$  의 크기는  $c_f = \sqrt{2}$  이다. 또한, 두 부등식  $|\partial V / \partial \theta| \leq \frac{1}{2}\sqrt{10} \|x - x^*(u_a)\|_2$ ,  $|\partial V / \partial \omega| \leq \frac{1}{2}\sqrt{5} \|x - x^*(u_a)\|_2$  으로부터  $|\frac{\partial V}{\partial x}| \leq \frac{1}{2}\sqrt{15} \|x - x^*(u_a)\|_2 \leq \frac{\pi}{8}\sqrt{15} (= c_v)$  을 얻는다. 함수  $V$  를  $u_a$  로 편미분한 식은

$$\frac{\partial V}{\partial u_a} = -\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1-u_a^2}}\right)(\theta - \sin^{-1} u_a) - \frac{1}{2\sqrt{1-u_a^2}} \omega$$

이므로,  $u_a \in \Gamma$  에 의해서  $|\frac{\partial V}{\partial u_a}| \leq \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} (= c_w)$  이 성립한다.

벡터  $\mu$  가 상태 변수  $x$  에 의존하지 않아서, 좌표 변환 (10)의 자코비안은 단위 행렬  $I$  이므로, 전미분  $\dot{V}$  의 상계는  $\Pi$  절보다 간단하게 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), u_a(t)) &\leq -c_3 \|x(t) - x^*(u_a(t))\|^2 \\ &+ \varepsilon c_v c_m \|\dot{u}_a\| + \varepsilon c_v c_f c_m + c_w \|\dot{u}_a\|. \end{aligned}$$

따라서, 양수  $\varepsilon_2$  와  $\kappa$  는 다음 부등식

$$\varepsilon_2 c_v c_m \kappa + \varepsilon_2 c_v c_f c_m + c_w \kappa \leq \frac{c_1 c_3}{4c_2} \rho^2$$

을 만족하도록 정할 수 있고,  $\varepsilon^*$  는 식 (13)을 이용하여 구한다. 계산에 의하면, 초기 시간에 이 시스템의 상태 변수와 느리게 변하는 입력  $u_a$  에 대한 평형점  $x^*(u_a)$  사이의 거리(norm)가  $\delta = 2.44 \times 10^{-3}$  보다 작고, 느리게 변하는 입력  $u_a$  의 변화율(절대값)이  $\kappa = 1.23 \times 10^{-3}$  보다 작으며, 마지막으로, 빠르게 진동하는 입력은  $\varepsilon \leq 2.08 \times 10^{-3}$  인 경우에 상태 변수  $x(t) = [\theta(t) \ \omega(t)]^T$  와 평형점  $x^*$  의 차이가  $\rho = 5\pi/180$  보다 작아지는 것이 본 논문의 결과에 의해서 보장된다.

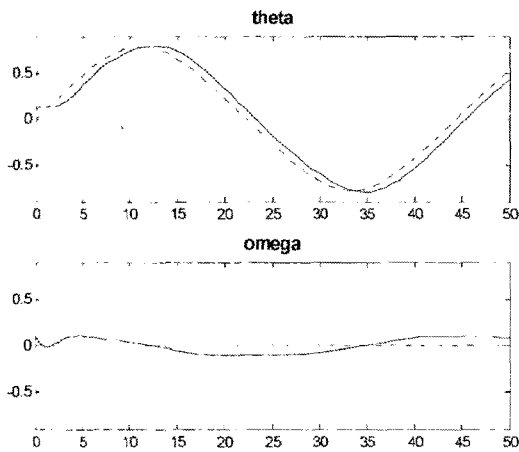


그림 1. 입력이 느리게 변하는 경우의 모의 실험  
Fig. 1. Simulation results in case the inputs vary slowly.

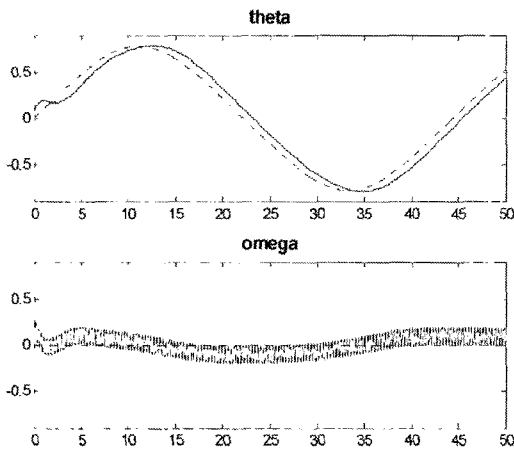


그림 2. 입력의 평균이 느리게 변하는 경우의 모의 실험  
Fig. 2. Simulation results in case the average of inputs varies slowly.

이렇게 구한 양수  $\delta$ ,  $\kappa$ ,  $\varepsilon^*$  은 아주 작은 값이 되는데, 이는 이론 전개 과정에서 사용된 상계(upper bound)들이 느슨한 부등식에 의해서 구해졌기 때문이다. 하지만, 실제로 이들 값보다 큰 값을 이용하여도 상태 변수와 평형점의 궤적이 일치해 보이는 정도의 모의 실험 결과를 얻을 수 있었다. 본

논문에서는 두 궤적이 달라 보일 만큼 이들 상수 값이 큰 경우의 모의 실험 결과를 보이기로 한다.

그림 1은 입력이 느리게 변하는 경우, 그리고, 그림 2는 입력의 '평균'이 느리게 변하는 경우 진자 시스템 (14)의 모의 실험 결과로서, 실선은 상태 변수(각도, 각속도)를, 점선은 진자 시스템의 평형점을 나타낸다. 모의 실험에서 상태 변수의 초기값으로는  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\omega(0) = 0.1$ , 느리게 변하는 입력 신호는  $u_f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2\kappa}t)$ , 빠르게 변하는 입력 신호는  $u_f(t) = 2\sin t$ , 그 외 파라미터는  $\kappa = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.05$  으로 설정하였다. 모의 실험 결과, 이 절에서 이론적으로 구한  $\varepsilon^*$  와  $\kappa$  는 이론적으로 작은 값이지만, 그보다 큰 값에 대해서도 시스템의 궤적이 평형점 주위를 많이 벗어나지 않음을 알 수 있다.

#### IV. 결론

이 논문에서는 비선형 시스템이 상수 입력을 가질 때, 평형점이 점근적으로 안정하면 입력의 평균이 느리게 변하더라도 그 안정성이 비교적 잘 보존됨을 느리게 변하는 입력과 평균 이론의 성질을 이용하여 증명하였다. 또한, 이 논문의 결과를  $u_f(t)$  가 주기 함수가 아닌 경우에도 '일반' 평균 (general average)을 이용하여 확장할 수 있을 것이다.

#### 참고문헌

- [1] M. Kelemen, "A stability property," *IEEE Trans. Automatic Control*, 31:766-768, 1986.
- [2] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 2<sup>nd</sup> edition, 1996.
- [3] H. Khalil and P. Kokotović, "On stability properties of nonlinear systems with slowly varying inputs," *IEEE Trans. of Automatic Control*, 36:229, 1991.
- [4] S. Kou, D. Elliott, and T. Tam, "Observability of nonlinear systems," *Information and Control*, 22:89-99, 1973.
- [5] D. Lawrence and W. Rugh, "On a stability theorem of nonlinear systems with slowly varying inputs," *IEEE Trans. of Automatic Control*, 7:860-864, 1990.
- [6] H. Shim, H. Chang, and J. Seo, "Non-vanishing basin of attraction with respect to a parametric variation and center manifold," *IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 2984-2989, Dec. 2004.



#### 최 용 운

2002년 서울대학교 전기컴퓨터공학부 공학 석사. 2002년~현재 동 대학원 박사 과정 재학중. 관심분야는 비선형 제어 이론.



#### 심 형 보

2000년 서울대학교 전기공학부 공학 박사. 2000~2001년 캘리포니아 대학 (UCSB) 박사 후 연구원. 2002~2003년 양대학교 전기컴퓨터공학부 교수. 200~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 수. 관심분야는 비선형 시스템 분

제어 이론.



**서진현**

1985년 캘리포니아대학교(UCLA) 공학 박사. 2000년 서울대학교 전기공학부 공학 박사. 1985~1989년 텍사스공과대학교 교수. 1989년~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 교수. 관심분야는 비선형 시스템 이론, 대형 시스템 제어, 무한 차

원 시스템 이론.