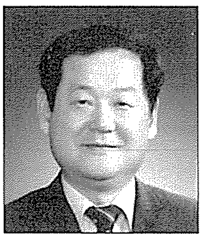
# 압밀이론 조금 세밀하게 들여다보기



(주)주춧돌ENC 대표이사
토질및기초기술사, 공학박사
박 상 국

## 1. 시작글

압밀현상과 관련, 현업에서는 잔류침하량을 포함한 침하량과 침하시간 등이 주요 관심사가 된다. Terzaghi 이론 이전에는 기술자의 경험적 판단에 의한 설계 시공이 이루어졌는데, Terzaghi 이론 후 수치해석을 통한 이론적이고 논리적 접근을 기본으로 하여 경험적 판단이 가미된 해석기법으로 발전하게 된다.

압밀현상이 발생하기 위한 주요 인자는 크게 외적요소와 내적요소로 구분할 수 있으며, 시간, 상재하중등을 외적요소라 한다면 압밀되는 지반의 물성치와 압밀층의 두께, 배수조건 등을 내적요소라 할 수 있고, 이들은 압밀침하량의 크기 및 압밀속도 등에 영향을 미치게 된다. 시간과 상재하중 등의 외적요소는 그 크기만 변할뿐 기본적인 성질은 변하지 않는다. 반면 지반의 내적요소 중 가장 기본적인 요소인 간극수는 응력이 작용할 경우 과잉간극수압으로 전환되어 위치 이동을 하게 되며 이는 흙입자의 체적변화를 야기시키는 형태로 발전된다.

즉, 과잉간극수압 소산에 따른 흙의 체적 변화량이 압밀량의 크기라 판단하고 Terzaghi는, 시간의 변화에 따른 침하량의 변화는 압밀층의 두께에 따른 과잉간극수압의 소산속도의 크기와 같다하고, 유체역학에서 이용되고 있는 Darcy' Law와 베르누우리의 정리를 이용하여 식을 완성시킨다.

수학적으로 해를 구하기 위하여는 미지수의 개수와 방정식의 숫자가 같아야 한다. 미지수는 찾고자 하는 해석조건에서 도출되며, 방정식은 경계조건에서 도출된다. 그러나 경계조건은 제한적이어서 방정식의 수는 제한되는 반면, 지반의 내적성질에 대한 변수는 무척 다양하여 미지수의 수가 훨씬 많게 되므로, 미지수의 수를 줄이기 위하여 가정을 하게 되며 Terzaghi의 가정은 그의 미분방정식을 해석함으로써 찾을 수 있다.

三笠正人은 그의 저서 '軟弱粘土の壓密'에서 테르자기 이론에 대한 수학적 가정에 대한 문제점을 제시하고 일부 보완된 미분방적식을 유도하여 이론을 전개하게 된다.

Terzaghi 이론의 가정 및 문제점에 대하여는 많이 알려져 있으나, 그 가정이 나오게 된 배경은 미분방정식이 도출되는 과정에서 나온다는 사실은 많이 알려져 있지 않다. 따라서 본고에서는 Terzaghi의 미분방정식이 도출된 과정을 통하여, 방정식이 성립하기위한 조건을 검토하고, 三笠正人이 Terzaghi의 모순된 가정을 보완한 방정식 중 하나를 제시함으로써, 지반공학도의 학문을 익히는 방법의 예를 제시하고자 한다.

## 2. Terzaghi 미분방적식의 유도

Terzaghi는 과잉간극수압 U가 압밀현상을 지배하는 주체라 믿고 다음과 같은 열전도형식의 미분방정식 $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 을 도출하였다. 이 식이 나오게 되기에는 크게 다섯 단계의 변화과정을 거치게 되며 이를 식으로 표현하여 정리하면 아래 도표와 같다.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} \text{ (식 1)} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -k\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \text{ (식 2)} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = -k\frac{\partial^2 h_p}{\partial z^2} = -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ (식 3)} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{k}{m_v \gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ (식 4)} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ (식 5)}$$

### 2.1 기본미분방정식의 유도

하중이 작용하는 일정시간에서, 시간의 변화에 따른 침하량의 변화는 압밀층의 두께에 대한 과잉간극수압의 소산속도의 크기와 같다. 즉 일정시간의 범위에서 작용하중에 따른 체적의 미세시간에 대한 변화량은 토층의 범위에서 과잉간극수압으로 표현되는 간극수가 배출되는 양에 좌우되며, 간극수가 배출되는 양은 배수거리에 따른 배출속도와 대등한 관계를 갖는다는 관점으로, 이를 식으로 표현하면 아래 (식 1)과 같다.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \text{(식 1)}$$

Darcy' law를 (식 1)에 적용시켜, 간극수압의 소산속도 $v = ki = k\frac{\partial h}{\partial z}$ 를 (식 1)에 대입한다.

체적이 감소하는 것이므로 부호를 (-)로 표시하면 (식 2)가 성립된다.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -k\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \qquad \text{(식 2)}$$

(식 2)의 동수수두 h는 베르누우리의 정리와 Laplace의 방정식을 이용하여 압력수두로 $h_p$로 변환시킬 수 있고, 압력수두는 다시 경계조건을 고려하여 간극수압으로 변환시켜 적용하면, (식 3)이 성립된다.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} = k\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - k\frac{\partial^2 h_p}{\partial z^2} = -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{(식 3)}$$

전응력=유효응력+간극수압의 원리에서 전응력은 일정하므로, 간극수압 소산에 따른 간극수압의 감소분은 유효응력의 증가를 발생시키므로, 작용하중의 증가분에 대한 체적 감소분의 변화량의 비를 체적압축계수($m_v$)라 명명한다면, $m_v = \partial\varepsilon / \partial p$가 된다. $\partial\varepsilon = m_v\, \partial p$를 (식 3)에 대입하면 (식 4)가 성립된다.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{k}{m_v \gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{(식 4)}$$

전응력(P)=유효응력(σ)+간극수압(u)의 원리에서 전응력의 증분이 없을 경우 유효응력과 간극수압의 합은 0이다. 즉 상재하중의 추가가 없다면 시간의 변화에 따른 유효응력의 변화량은 시간에 따른 간극수압의 변화량과 같고 그 합은 0이다. 따라서 (식 4)의 $\partial p = \partial u$가되고 $C_v = \Leftarrow\frac{k}{m_v}\Rightarrow \gamma_w$이므로 (식 5)가 성립된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{(식5)}$$

이상으로 미분방정식이 성립된 과정을 살펴보았다. 각각의 과정에서 방정식이 성립되기위한 조건을 검토하면 미분방정식의 가정이 도출된다.

### 2.2 유도된 식이 성립하기위한 조건

위에서 Terzaghi의 이론을 5개의 식으로 정리하였다. 각각의 식들이 성립하기위한 조건을 검토하므로서 Terzaghi식이 성립하기 위한 조건을 파악할 수 있다.

#### 1. (식 1) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}$ 의 성립조건

1) 흙입자는 공극수와 고체로서의 흙으로 구성되어 있고(즉 흙은 포화상태에 있다는 가정).

2) 하중 작용에 대하여 고체로서의 흙은 균질 · 등방하여 고유체적과 공극수의 고유체적은 변하지 않고 다만 공극수의 이동에 따른 체적변화만 발생하며 체적변화는 일방향으로 발생되고, 공극수의 이동과 체적변화가 발생되는 방향은 같으며 공극수가 이동된 체적의 크기와 흙입자의 감소된 체적의 크기는 같다.

#### 2. (식 2) $\frac{\partial v}{\partial z} = -k\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$ 의 성립조건

1) 시간변화에 따른 과잉간극수압의 소산속도의 변화는 배수거리의 변화에 따른 동수경사의 변화에 투수계수를 곱한 것과 같다. 즉 투수계수는 정수로서 일정하다는 가정.

2) 고체로서의 흙입자와 물은 비압축성이다.

3) 다시의 법칙은 층류, 등류상태에 대한 이론으로 과잉간극수압의 이동은 1방향의 층류 · 등류상태를 이룬다. 즉 1차원적 해석방법이라 할 수 있다.

#### 3. (식 3) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} = k\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - k\frac{\partial^2 h_p}{\partial z^2} = -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 의 성립조건

1) 속도수두 = 0으로 가정, 1차원 해석으로 위치수두 = 0으로 봄

#### 4. (식 4) $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{k}{m_v\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 의 성립조건

1) $\partial\varepsilon = \frac{\partial e}{1+e_0}$로서 비체적($1+e_0$)에서 흙입자고유의 체적을 단위체적으로 간주하여 1로 보았음. 즉 (식 4)의 이론적 배경은 시간의 변화에 대한 흙의 체적변화는 고려되지 않았으나, 간극수압의 소산에 따라 흙의 체적은 감소하고 반면 흙의 유효응력은 증가한다.

2) $m_v$를 정수로 간주하여, 체적압축계수는 압밀중 변하지않고 일정하다 가정.

#### 5. (식 5) $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 의 성립조건

$\frac{k}{m_v\gamma_w} = c_v$로 정의 하여 압밀계수라 하고 이 값은 정수로 취급하여, 일정하다 가정하였다.

## 3. 三笠正人의 이론 도출

三笠正人는 Terzaghi의 미분방정식을 분석하여, 방정식 성립에 필요한 제한조건에서, 테르자기 이론이 성립하기 위한, 여러 가지 가정을 도출해 내고 이에 대한 문제점 제시와 보완의 일환으로 방정식을 유도 정립시켰다. 그 중에서 $c_v$는 일정하나 k,와 $m_v$가 일정하지 않을 경우에 대하여 정리하여 보자.

Darcy' law에서 간극수압의 소산속도 $\upsilon = ki = k\frac{j}{\gamma_w}$ 가 되며, 여기서 j는 침투수압으로 표현된다.

자중압력이 없다 가정하면 점토입자에는 침투압만 작용하기 때문에 $j = \frac{\delta p'}{\delta z}$ 이 된다. 여기서 $\delta p'$ 는 유효응력의 증가분을 의미한다.

따라서 $\upsilon = ki = k\frac{j}{\gamma_w} = \frac{k}{\gamma_w}\frac{\delta p'}{\delta z}$ (식 6)

$m_v = \partial\varepsilon / \partial p'$ 이므로 이를 (식 6)에 대입시키면

$$\upsilon = \frac{k}{\gamma_w m_v}\frac{\delta\varepsilon}{\delta z} = c_v\frac{\delta\varepsilon}{\delta z} \quad \text{(식 7)}$$

(식 7)을 (식 1)에 대입시키면

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta z}\left(c_v\frac{\delta\varepsilon}{\delta z}\right)$$

여기서 $c_v$가 일정하다고 가정하면 상수로 나올 수 있으므로

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta t} = c_v\frac{\delta^2\varepsilon}{\delta z^2} \quad \text{(식 8)}$$

(식 8)은 $c_v$는 일정하나 k,와 $m_v$가 일정하지 않을 경우 三笠正人이 Terzaghi의 미분방정식을 변형시킨 것으로 압축변형율 에 대한 열전도형 미분방정식이다.

(식 8)은 (식 5)와 형식이 유사하다. (식 8)은 변형율에 대한 식이라면 (식 5)는 간극수압에 대한 식이다.

三笠正人는 (식 5)가 잘못된 것이라 주장하면서, 테르자기 이론이 실제의 침하과정과 잘 일치하는 것처럼 보이는 이유는 k와 $m_v$는 반비례하므로 변화의 비가 일정하다면 서로 상쇄되므로 큰 영향을 미치지 않는 것과 간극수압을 측정하기가 어렵기 때문이라 설명하고 있다.

三笠正人는 테르자기의 일차원 압밀이론을 보완한 일차원압밀방정식을 통하여 자중의 영향을 고려한 1차원압밀방정식을 유도하였으나 본 고에서는 지면 관계상 언급 대상에서 제외하기로 한다.

## 4. 자중압밀이 고려된 Gibson의 이론 조금 들여다 보기

테르자기 압밀이론에서는 간극비와 유효응력간의 관계를 압축계수로 표현, 일정한 전응력하에서는 압밀진행 과정에 관계없이 고정된 상수로 그 값을 가정하였고 Eulerian좌표계를 이용하였다.

그러나 실제 간극비 단계별 압축성을 나타내는 압축계수는 고정된 상수가 아닌 비선형성을 띄고 있으며, 지반의 초기함수비가 높을수록 그비선형성이 증가된다는 사실이 입증되고 있다.

고전적인 압밀이론식(Terzaghi, 1924)은 압밀되는 점토층의 경계가 고정되었다고 가정하였다. 그러나, 느슨한 점토층에서의 압밀은 위쪽 경계가 시간에 따라 현격하게 변하게 되므로 새로운 좌표설정을 하는 것이 편리하다.

1981년 Gibson 등은 간극비와 유효응력의 관계를 일정한 함수형태로 나타내는 대신 비선형계수 g,λ로 간극비와

유효응력간의 비선형적 관계를 Lagriangian좌표계를 이용 압밀 해석하였다. 그러나 비선형계수 역시 고정된 상수가 아니며, 유효응력 변화에 따라 그 비선형성이 크게 변하는 변수이므로, 유효응력 단계에 따른 적정 비선형계수의 추정 및 간극비와 유효응력간의 비선형성을 압밀해석에 충분히 반영하기 위해서는 간극비와 유효응력의 관계를 일정한 함수형태로 표현하는 것이 필요하다. Gibson의 압밀이론은 Lagrangian좌표계로 표시하고 운동량 보존의 법칙과 연속방정식에 의해서 다음과 같이 유도된다.

$$\pm\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w}-1\right)\frac{d}{d_e}\frac{k(e)}{(1+e)}\frac{\partial e}{\partial z}\left[\frac{k(e)}{\gamma_w(1+e)}\frac{d_{\sigma'}}{d_e}\frac{\partial e}{\partial z}\right]+\frac{\partial e}{\partial t}=0$$

위 식은 투수계수와 압축성의 비선형적 변화를 포함하고 있으므로 복잡하다. 따라서 *Gibson* 등은 g(e),λ(e)라는 비선형계수를 도입하여, 방정식 고유의 비선형성을 유지하면서, 다음과 같은 선형의 간편식을 일차원 유한변형율 압밀 지배방정식으로 제안하였다.

$$\frac{\partial^2 e}{\partial z^2}\pm\lambda(\gamma_s-\gamma_w)\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{\zeta}{g\lambda}\left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\right]\frac{1}{g}\frac{\partial e}{\partial t}$$

이들은 유효응력과 간극비의 관계는 유일한 함수형태를 갖는다는 기존의 연구결과 및 자신들의 연구결과를 바탕으로, 각 유효응력 단계별 간극비와 투수계수를 구하였고 이를 압밀현상 예측에 이용하였다.

이러한 관계를 material function이라는 용어를 사용하여 설명하였으며, 이는 과잉간극수압의 소산속도와 관련된 투수계수와 간극비, 유효응력 간의 비선형적인 상관관계식을 의미한다.

이들의 이론과 기존 압밀이론과 가장 큰 차이점은 각 유효응력 단계별 지반의 압축성과 투수성의 변화를 고려했다는 것이다.

Terzaghi의 방정식은 간단한 반면 많은 가정을 내포하고 있고 이들중 일부는 현장과 괴리된 것이 있는 반면 Gibson의 이론은 Terzaghi의 이론을 일부 보완한 측면이 있으나 복잡하여 실무에 적용이 곤란하고 또한 완벽하지 않다. 따라서 실무에 적용시 현장조건에 적합한 이론을 선정하거나 이를 변형시켜 적용하는 것이 오차를 줄이는 것으로 판단된다.

## 5. 끝글

학문의 발달은 새로운 장비의 개발과 신소재 개발에 따른 시공결과의 수치적 증명 및 설계원칙을 정립하기 위한 필요성으로 발전하게 된다. 토질 및 기초기술사는 현장에서 발생되는 문제에 대하여 그 문제점과 해결방안에 대한 경험적 판단을 근거로 이론적 뒷받침을 제시하여야 할 책무가 주어져 있다.

본 고는 우리에게 많이 알려져 있는 Terzaghi이론을 수학적으로 풀어가는 과정에서, 가정상의 문제점을 도출하여 각각의 가정이 만들어진 동기를 파악하고, 또한 현실적으로 불합리한 가정을 보완하여 이론을 전개한 三笠正人의 예를 제시함으로써 현업에 종사하는 실무자들에게 조금이나마 도움이 되길 바라는 마음이다.

Terzaghi이론에서 야기되는 가정상의 세밀한 문제점과 그럼에도 불구하고 실무에서 적용되는 이유에 대하여는 널리 알려져 있으므로 언급하지 않았다.

이론을 현장에 적용할 때 이론의 탄생배경을 이해하고 적용하는 것이 매우 중요하다는 것을 밝혀두는 바이다.