≪연구논문≫ Journal of the Korean Magnetics Society, Volume 16, Number 1, February 2006

여러 부분으로 구성된 계의 양자 얽힘

이혁재*

국민대학교, 물리학과, 서울 성북구 정릉동 861-1, 136-702

(2006년 1월 19일 받음, 2006년 2월 2일 최종수정본 받음)

양자상태의 얽힘을 양으로 나타낼 수 있는 방법들에 대하여 기술하였다. 두 부분으로 구성된 순수 양자상태는 쉽게 얽힘을 판별할 수 있는 방법을 알 수 있으나 혼합된 형태의 양자상태는 양자 얽힘을 판별하기가 어렵다. 일반적으로 부분이 많아지는 경우에 대해서는 순수 상태도 그 판별을 하는 것이 어렵다고 알려져 있으나 이 논문에서 그 방법을 제시하고 혼합 상태로의 적용에 대하여 논의한다.

주제어 : 여러 부분 계, 양자얽힘, 양자얽힘 판별, 혼합상태

I. 서 론

양자 얽힘은 최근 양자컴퓨터 및 양자이론의 등장과 함께 양자역학의 중요한 현상으로 많은 연구가 진행 되고 있다. 양자 얽힘의 응용으로는 dense coding[1], 양자전송[2], 양자암호[3] 및 양자컴퓨터 등이 있는데, 이들은 양자 얽힘의 중요성뿐만 아니라 향후 많은 응용의 가능성을 보여 주고 있다. 양자 얽힘의 연구는 양자물리이론 및 실험에서 중요한 위치를 차지할 것으로 예상되고 있다.

양자 얽힘 상태란 2개 이상의 계가 혼합된 형태의 계의 양자 상태 중 두 개의 부분계가 혼합된 계의 순수상태(pure state)는 각 부분 계의 상태들의 직접 곱(direct product)으로 쓸 수 있으면 분리가능한(separable) 상태로 부른다. 그러나 모든 순수 상태들은 직접 곱으로 쓸 수 없고 singlet 상태 $(|0>|1>-|1>|0>)/\sqrt{2}$ 처럼 분리가능한 순수상태의 중첩으로 쓰여 진 상태는 직접 곱으로 쓸 수 없는 대표적인 양자상태이다. 이런 상태를 양자 얽힘 상태라 부른다. 혼합 상태(mixed state)에서 밀도 행렬이 분리가능한 상태라는 것은 $\rho=\sum_{k=1}^{n}p_k|u^k><u^k|\otimes|v^k><v^k|$로 쓰여 질 수 있는 형태를 말한다. 즉 확률 p_k인 분리가능한 순수상태의 앙상블로 표현 할 수 있으면 분리가능 상태라고 하고 그렇게 쓸 수 없으면 양자적으로 얽힌 상태라고 정의 한다.

양자 상태가 주어 졌을 때 그 상태가 분리가능한 상태인지 아니면 양자 얽힘 상태에 있는지 그 구별은 매우 중요하다. 2차원 힐버트 공간과 2차원 힐버트 공간(2×2 공간) 또는 2차원 힐버트 공간과 3차원 힐버트 공간(2×3 공간)으로 구성된 두 개의 부분 계로 구성된 계는 그 판별법이 제시되어 있다[4, 5]. A와 B로 표시된 두 개의 부분계로 구성된 계의 상태를 행렬로 나타낸 뒤에 두 부분 계중의 하나를 부분 전치(partial transposition) 한 행렬(ρ^{T_A})의 고유 값들(eigenvalues)을 구했을 때 모두 양수를 갖는 경우 분리가능한 상태이고 그렇지 않으면 양자 얽힘 상태가 된다. 부분전치 행렬 ρ^{T_A}는 $\rho^{T_A'}_{ik,jl}=\rho_{jk,il}=<j|\otimes<k|\rho|i>\otimes|l>$ 로 계산 할 수 있다. 그러나 이러한 판별법은 전체 계를 구성하고 있는 부분계의 상태 공간의 차원과 부분 계의 수가 증가하는 경우는 사용이 불가능하다. 세 개 이상의 부분 계로 구성 되어 있고 각 부분 계의 차원이 큰 경우에 대한 응용들이 양자 컴퓨터 및 양자 정보처리 과정에서 나타나면서 판별법이 필요하게 되었다.

양자 얽힘이 있는 상태들에서도 양자 얽힘 정도가 얼마나 되는지에 대한 구별이 필요하다. 즉 양자 얽힘을 양으로 나타 낼 수 있는 방법이 필요하다. 이것을 측정할 수 있는 방법으로는 두 개의 부분 계로 이루어진 순수 상태의 경우는 entanglement of formation[6], entanglement of distillation [6] 그리고 relative entropy[7] 등이 발표 되었다. 그러나 혼합 상태에 대한 측정은 이들 측정 방법을 직접적으로 적용 불가능하다. 그 이유는 한 혼합 상태는 표현 할 수 있는 앙상블의 개수가 유일하지 않고 많은 가능한 앙상블들이 있으므로 어느 것을 기준으로 해야 하는지 모호하다. 그 기준을 앙상블 중에 양자 얽힘이 가장 작은 값으로 혼합상태의 양자 얽힘 양으로 정의하나 그 계산이 용이 하지 않았다. Wootters는 concurrence의 개념을 이용하여 혼합 상태의 양자 얽힘을 양적으로 나타낼 수 있는 방법을 제시하였다[8]. 그러나 이것 역시 전체 계가 두 개의 부분 계로 구성된 경우에만 가능하고 세 개 이상인 경우는 불가능하다. 이 논문에서는 세 개 이상의 2차원 힐버트 공간을 갖는 부분 계(qubit)로 이루어진 전체 계에 대한 양자 얽힘 상태에 대한 논의를 할 것이다.

*Tel: (02) 910-5462, E-mail: lhjae@kookmin.ac.kr

II. 순수상태의 양자 얽힘

여러 개의 큐빗(qubit)으로 구성된 계는 두 개의 큐빗으로 만들어진 계보다 복잡하다. 두 개의 큐빗 계의 양자얽힘은 다음과 같은 Schmidt 분해하여

$$|\Psi\rangle_{AB}=\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle \tag{1}$$

로 항상 쓸 수 있다. 여기서 α와 β는 실수로 $\alpha^2+\beta^2=1$의 조건을 만족한다. 이 때 α, β 중의 하나가 영이면 분리가능한 상태를 나타내며 그 α, β 모두가 영이 아닌 경우 양자 얽힘 상태가 된다. 세 개 이상의 큐빗으로 구성된 계는 식(1)과 같은 분해가 불가능하고 이를 판별하기에는 부분전치방법으로 불가능하다. 또한 다중 큐빗 계에서는 부분적인 양자 얽힘이 가능하다. 예를 들면 5개의 큐빗들로 구성된 계를 보면 몇 가지 종류의 부분 양자얽힘 상태가 존재 할 수 있다. 1개의 큐빗과 양자 얽힘상태에 있는 4개의 큐빗들과 분리가능한 상태로 존재할 수 있다. 4개의 큐빗들 만이 양자 얽힘 상태에 있고 전체적으로 보면 분리가능한 상태로 있는 경우다. 다음은 2개 큐빗들이 부분 양자얽힘 상태에 있고 다른 3개의 큐빗들이 부분 양자 얽힘이 있으나 2개 큐빗들과 3개 큐빗들 사이에는 분리가능한 상태로 존재하는 경우도 있다. 그 밖에도 2개의 부분 양자얽힘 있는 2 큐빗들과 1개의 큐빗으로 분리될 수 있는 분리가능한 상태가 존재할 수도 있다. 기존의 방법들은 이러한 경우를 모두 판별하기는 어렵다.

3개의 큐빗들로 구성된 계의 상태를 분류하기 위해서 다음과 같이 텐서 같은 양을 정의한다.

$$M_{ijk}(123;|\Psi\rangle)=\langle(\sigma_i(1)-\lambda_i(1))\otimes(\sigma_j(2)-\lambda_j(2))\otimes(\sigma_k(3)-\lambda_k(3))\rangle, \tag{2}$$

여기서 $\sigma_i(\alpha)$는 큐빗의 i-성분 파울리 행렬을 나타내며 $\lambda_i(\alpha)$는 $\sigma_i(\alpha)$의 평균 기대값이다. $\langle\ldots\rangle$는 양자 상태 $|\Psi\rangle$의 기대값을 의미한다.

이 양을 이용하여 3 큐빗들로 구성된 계에 대한 양자얽힘은 모두 분류할 수 있다. 어떤 i, j, k에 대하여 하나라도 $M_{ijk}(123)$이 영이 아니면 이 상태는 양자 얽힘 상태가 된다. 그러나 모든 i, j, k에 대하여 이 값이 영이면 계의 상태는 분리가능한 상태를 의미한다. 이 경우에 우리는 부분 양자얽힘에 대해서 조사해야한다. 이것을 위해서 다음과 같은 양들을 계산해야만 한다.

$$M_{ij}(12;|\Psi\rangle)=\langle(\sigma_i(1)-\lambda_i(1))\otimes(\sigma_j(2)-\lambda_j(2))\otimes I(3)\rangle, \tag{3}$$

$$M_{ik}(13;|\Psi\rangle)=\langle(\sigma_i(1)-\lambda_i(1))\otimes I(2)\otimes(\sigma_k(3)-\lambda_k(3))\rangle, \tag{4}$$

$$M_{jk}(23;|\Psi\rangle)=\langle I(1)\otimes(\sigma_j(2)-\lambda_j(2))\otimes(\sigma_k(3)-\lambda_k(3))\rangle. \tag{5}$$

여기서 $I(\alpha)$는 α 큐빗에 대한 단위행렬을 나타낸다.

(3)이 영이 아닌 i, j 성분이 존재하면 이계는 큐빗 1과 큐빗 2 사이에 부분 양자얽힘이 있음을 나타내며 (4)가 영이 아닌 i, k 성분이 존재하면 큐빗 1과 3들 사이에 부분 양자 얽힘이 있으며, (5)가 영이 아닌 j, k 성분이 존재하면 큐빗 2와 3들 사이에 부분 양자 얽힘이 있음을 보여준다. 또한 (3), (4) 그리고 (5)가 모두 영이면 계의 상태는 완전히 분리가능한 상태 된다.

4개의 큐빗들을 갖는 계를 위해서는 (2)식을 네 번째 큐빗을 포함한 형태로 확장할 수 있다.

$$M_{ijkl}(1234;|\Psi\rangle)=\langle(\sigma_i(1)-\lambda_i(1))\otimes(\sigma_j(2)-\lambda_j(2))\otimes(\sigma_k(3)-\lambda_k(3))\otimes(\sigma_l(4)-\lambda_l(4))\rangle \tag{6}$$

그러나 식 (6)은 하나의 큐빗과 나머지 큐빗들을 분리가능한 상태를 구별할 수 있으나 두 개의 큐빗들을 갖는 2개의 부분으로 분리가능한 상태를 분리해 내지는 못한다. 그래서 4개 이상의 큐빗들을 갖는 계를 위해서 식 (6)을 변형한

$$M'_{ijkl}(1234;|\Psi\rangle)=M_{ijkl}(1234;|\Psi\rangle)-M_{ij}(12;|\Psi\rangle)M_{kl}(34;|\Psi\rangle)-M_{ik}(13;|\Psi\rangle)M_{jl}(24;|\Psi\rangle)-M_{il}(14;|\Psi\rangle)M(23;|\Psi\rangle) \tag{7}$$

을 정의 한다. 식 (7)의 값은 4개의 큐빗들로 구성된 계의 양자 상태를 모두 분류할 수 있다. 식 (7)을 이용하면 4개의 큐빗들이 모두 양자얽힘에 관여한 경우, 3개의 큐빗들이 부분 양자얽힘 상태에 있고 나머지 1개는 3개의 큐빗들과 분리가능한 상태로 있는 경우, 부분 양자얽힘 상태에 있는 2개의 큐빗들로 구성 2개의 부분 계로 구성된 상태로 있는 경우 그리고 마지막으로 모든 큐빗들이 분리가능한 상태로 있는 가능성 등을 구별해 낼 수 있다.

그러나 식 (7)로 구별해 낼 수 있는 것은 전체 또는 부분 큐빗들의 양자얽힘을 구별해 낼 수 있으나, 식 (7)의 결과 중에서 영이 아닌 경우에도 분류한 상태들이 양자 얽힘 정도가 다를 수 있다. 예를 들어 3개의 큐빗들로 구성된 계가 전체 양자얽힘 상태인 경우는 크게 GHZ(Greenberger-Horne-Zeilinger) 상태와 W 상태로 구분할 수 있다. GHZ 상태는

$$|\Psi_{GHZ}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle+|111\rangle), \tag{8}$$

그리고 W 상태는

$$|\Psi_{W}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle+|010\rangle+|100\rangle), \tag{9}$$

로 둘 다 식(7)의 값 중에 일부가 영이 아니어서 전체적으로 양자얽힘 상태에 있다. 그러나 두 상태는 이미 알려진 것처럼 다른 양자얽힘 상태라는 것이 알려져 있다. 이를 구별하기 위해서 양자얽힘을 양으로서 그 순서를 정할 수 있는

방법을 모색해야 한다. 이를 위하여 다음과 같은 양을 정의한다.

$$B^{(m)}(\alpha\beta\gamma\cdots\delta;|\Psi>) = \sum_{ijkl\cdots}^{3} M'_{ijkl\cdots}(\alpha\beta\gamma\cdots\delta;|\Psi>)M'_{ijkl\ldots}(\alpha\beta\gamma\ldots\delta;|\Psi>) \quad (10)$$

위 식은 α, β, γ, ⋯, δ로 명명된 m개의 큐빗들 사이의 양자얽힘을 측정하는 양을 나타낸다. 식 (10)의 값은 몇 가지 조건들을 갖는다. 먼저 이 값은 m개의 큐빗들 중 하나라도 분리가능한 상태로 있으면 영이 된다. 즉 분리가능 상태는 그 값이 영이 된다. 두 번째 이 값들은 항상 영보다 크거나 같다. 세 번째는 임의의 국소 유니타리 변환에 의하여 그 값이 변하지 않는다. 마지막으로 이 값은 LOCC(local operations and classical communication)에 의하여 불변이거나 그 값이 줄어든다. LOCC 중 측정연산에 대해서 살펴보면 국소 측정 연산 후의 양자 상태에 대해서는 그 값이 항상 영이 된다. 임의의 한 큐빗에 대하여 측정을 하는 경우 그 큐빗은 측정 연산자의 한 값으로 붕괴되고 그것은 다른 큐빗들과 분리가 능한 상태로 원래 상태에서 변하게 된다. 따라서 분리가능한 상태에 대한 식(10) 값은 영이 되고 그 평균값들도 영이므로 측정 연산 후에 계의 상태에 대한 식 (10) 값은 영이 된다.

어떤 상태가 부분 양자얽힘이 있는지는 식 (7)을 이용하여 판별하고 판별된 상태가 얼마의 양자얽힘이 있는 지는 식(10)을 계산하면 된다. 예를 들면 4개의 큐빗들로 구성된 계의 상태가 3개의 큐빗(1, 2, 3)들 사이에 부분 양자 얽힘이 있고 나머지 하나인 큐빗 4가 3개와 분리가능한 상태로 있다면 모든 i, j, k, l에 대하여 $M'_{ijkl}(1234;|\Psi>)$ 값들은 모두 영이 된다. 그리고 모든 i, j, k 중에서 적어도 하나는 $M'_{ijk}(123;|\Psi>)$의 $B^{(3)}(123;|\Psi>)$ 값이 영이 아니다. 이 때 우리는 값을 계산하여 그 상태의 양자얽힘 정도를 구할 수 있다. 이러한 방법으로 3개의 큐빗들과 4개의 큐빗들로 구성된 계에 대한 특정한 상태들의 $B^{(m)}$ 값들을 계산하여 표로 나타내었다. $B^{(m)}$ 값들은 GHZ 상태의 값을 1로 규격화하여 나타냈다. 상태 $1/\sqrt{2}(|00>+|11>)\otimes|0>$에서 $B^{(2)}(\alpha\beta;|\Psi>)$ 값이 0또는 1인 것은 첫 번째 큐빗과 두 번째 큐빗 사이에 부분 양자얽힘이 있는 것을 보여주며, 세 번째와 나머지 큐빗들 사이에는 분리가능한 상태에 있음을 보여준다.

4개의 큐빗 계에서는

Table I. $B^{(m)}$ values for all the possible three-qubit states.

state	$B^{(2)}(\alpha\beta;\|\Psi>)$	$B^{(3)}(123;\|\Psi>)$
$\|GHZ_3>$	1/2	1
$\|W_3>$	88/243	280/729
$1/\sqrt{2}(\|00>+\|11>)\otimes\|0>$	1 or 0	0

Table II. $B^{(m)}$ values for all the possible four-qubit states.

state	$B^{(2)}(\alpha\beta;\|\Psi>)$	$B^{(3)}(\alpha\beta\gamma;\|\Psi>)$	$B^{(3)}(1234;\|\Psi>)$
$\|GHZ_4>$	1/3	0	1
$\|W_4>$	3/16	7/64	51/256
$\|\phi_6>$	1/3	0	7/27
$\|\phi_4>$	1/3 or 0	0	1/3
$\|GHZ_3>\otimes\|0>$	1/3	1 or 0	0
$1/2(\|00>+\|11>)\otimes(\|00>++11>)$	1 or 0	0	0

$$|GHZ_4> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000>+|111>)$$

$$|W_4> = \frac{1}{2}(|0001>+|0010>+|0100>+|1000>)$$

$$|\phi_4> = \frac{1}{2}(|0000>+|0011>+|1100>-|1111>)$$

$$|\phi_6> = \frac{1}{\sqrt{6}}(|0011>+|0101>+|1001>+|1010>+|0110>+|1100>)$$

상태들에 대한 $B^{(m)}$ 값을 계산하였다. $|GHZ_4>$, $|\phi_4>$, $|\phi_6>$ 상태들은 전체 양자얽힘이나 두 큐빗들 사이에 양자 얽힘이 있으나, 세 큐빗들 사이에 부분 양자 얽힘이 없음을 보여준다. $|W_4>$ 상태는 전체 양자 얽힘, 두 큐빗들 사이, 그리고 세 큐빗들 사이의 양자 얽힘이 있다. 따라서 위 상태들은 전체 양자얽힘이 있는 것으로 판별 되었지만 $B^{(4)}$, $B^{(3)}$, $B^{(2)}$의 값들을 이용하여 각 상태들의 양자 얽힘의 종류를 구별할 수 있다.

III. 혼합 상태의 양자얽힘

혼합 상태(mixed state)는 순수 상태와 다르다. 혼합 상태는 확률 p_1, p_2, ⋯ p_m을 갖는 규격화된 순수상태들 $|\Psi_1>$, ⋯, $|\Psi_n>$상태들의 모임인 앙상블에 의하여 혼합 상태의 밀도 행렬은

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} p_i|\Psi_i><\Psi_i| \quad (11)$$

로 앙상블과 관련된 형태로 쓸 수 있다. 그런데 밀도행렬을 식 (11)처럼 표현할 수 있는 많은 다른 앙상블들이 있다. 예를 들면 스핀이 1/2인 입자의 상태가 $\rho=(1/2)I$인 완전 혼합 상태의 경우 밀도 함수는 똑같은 확률 1/2을 갖는 두개의 상태로 이루어진 앙상블로 나타 낼 수 있으며, 또한 똑같은 확률 1/3을 갖는 세 개의 상태 (1, 0), $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(1/2, -(\sqrt{3}/2))$로 이루어진 앙상블로 표현할 수도 있다. 이 외에도 다른 방법들이 존재 한다[9].

두 개 이상의 큐빗들로 구성된 합성 계가 혼합 상태로 존재할 때 양자 얽힘에 대한 이야기는 매우 복잡해진다. 두 개

의 큐빗들 만으로 구성된 계의 경우는 앞에서 설명하였듯이 부분전치 행렬을 이용하여 분리가능성을 판별할 수 있다. 그러나 이 방법은 세 개 이상의 큐빗들로 구성된 경우 적용이 불가능하다. 앞에서 정의한 식 (7)을 직접적으로 적용하는 경우 기존의 결과와 다르다. 예를 들면 잘 알려진 Werner 상태의 경우 singlet 상태의 fidelity를 나타내는 F의 값에 의하여 양자얽힘을 표현할 수 있는데 F가 1/2보다 작으면 분리가능한 상태로 분류된다. 그러나 식 (7)을 이용하여 판별하면 $F=1/4$인 경우에만 분리가능한 상태이고 다른 경우는 양자얽힘 상태로 나타난다. 이것은 우리가 사용한 식 (7)은 특정한 앙상블을 이용하였기 때문이다. 혼합 상태의 경우 여러 다른 앙상블들로 표변할 수 있기 때문에 그중에서 하나의 앙상블에서라도 M이 영이면 그 상태를 분리가능한 것으로 정의 할 수 있다. 그러나 그러한 앙상블을 찾아내는 것은 굉장히 어렵다. 여러 개의 부분으로 구성된 계가 혼합상태로 존재할 때 그 상태가 양자얽힘이 있는지를 알아내는 것은 원리적으로 가능하나 실제 계산은 아직 불가능하다.

VI. 결　　론

우리는 지금까지 양자 얽힘을 판별할 수 있는 방법을 여러 부분 계로 구성된 전체 계의 양자 상태에 대해서 기술하였다. 그 방법은 식 (2)와 (7)에서처럼 양자상관관계를 계산함으로 쉽게 계산할 수 있다. 또한 양자얽힘을 양으로 측정할 수 있는 B를 도입하였다. B는 전체적인 양자얽힘 뿐만 아니라 부분 양자 얽힘까지 구별할 수 있는 양들을 줄 수 있다는 것을 알 수 있다. 그러나 혼합 상태에서는 그 이야기가 복잡한 이유를 언급하였다. 혼합상태는 앙상블의 선택에 의하여 양자얽힘이 달라질 수 있다. 이것은 혼합상태의 경우 우리가 어떤 앙상블을 사용하는가에 의존한다는 것을 보여준다. 어쩌면 이것은 양자얽힘을 앙상블에 따라 다르게 측정해야 하는 것일 수도 있다. 앙상블의 선택은 측정과 관련 있으므로 측정 방법에 따라 계의 양자얽힘을 다르게 보아야 한다. 따라서 혼합상태의 경우 양자얽힘 양이 단일 값으로 결정되기 보다는 앙상블 선택에 따라 달라 질 수 도 있게 정의하는 것도 옳은 방법일 것이다.

참고문헌

[1] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **68**, 2881(1992).
[2] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895(1993).
[3] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661(1991).
[4] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413(1996).
[5] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. **A223**, 1(1996).
[6] C. Bennett, D. DiVincenzo, J. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. **A54**, 3824(1996).
[7] V. Vedral, M. Plenio, M. Rippin, and P. Knight, Phys. Rev. Lett. **78**, 2275(1997).
[8] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245(1998).
[9] L. P. Hughston, R. Jozsa, and W. K. Wootters, Phys. Lett. **A183**, 14(1993).

Multi-partite Quantum Entanglement

Hyuk-jae Lee*

Department of Physics, Kookmin University, Seoul 136-702, Korea

(Received 19 January 2006, in final form 2 February 2006)

We present a method describing the quantum entanglement. We knows the criterion which can determine entanglement in a bipartite system. It is difficult in mixed states. Even though the entanglement criterion for multipartite systems is difficult, we offer a criterion for multiqubits and discuss entanglement of the mixed state.

Key words : multi-partite, quantum entanglement, entanglement criterion, mixed state