

# 최적제어의 동력학적 응용

## ■ 한수희

(서울대학교 공과대학 기계·항공공학부)

### 1. 서론

최적제어의 문제는 17세기 과학자 갈릴레오가 기본적인 동역학 문제를 제기한 것부터 시작하여 현재까지 다양한 분야에서 연구되고 있다. 갈릴레오는 양 끝이 고정된 줄이 늘어져 있는 모습이 포물선이라고 주장했으나 이후 아님이 밝혀졌고, 최적제어의 근간이 되는 변분론에 의해서 정확한 모양이 구해졌다. 또한 갈릴레오는 주어진 위치에서 중력에 의해서만 가장 빠른 시간에 도착하는 경로를 찾는 문제에서 해가 원이라고 주장했는데, 이 또한 나중에 변분법을 사용하여 cycloid 곡선임이 밝혀졌다. 18세기 오일러는 이런 문제를 일반화한 이론을 정립하였다. 오일러는 라그랑주 함수  $L$ 을 소개하고, 아래와 같은 목적 함수

$$\int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \tag{1}$$

를 최소화하는  $x(t)$ 가 만족해야 할 필요조건을 다음과 같이 제시하였다.

$$\frac{d}{dx} L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{2}$$

여기서 라그랑주 함수  $L$ 은 운동 에너지와 위치에너지를 나타내는데 해밀톤의 원리에 의하면 동역학 시스템은 이 함수  $L$ 의 시간 적분이 최소가 되는 경로를 택한다. 1747년에 Maupertuis는 이 사실을 통해서 자연은 신의 지혜에 의해서 가장 일을 적게 하도록 경로를 선택한다고 말했다. 이렇듯 현대의 최적제어 이론은 물리학의 동력학적인 현상을 기술하기 위한 자연의 법칙을 연구하는데서 시작됐다. 그 이후에 인간이 만든 시스템에 대해서도 신의 지혜를 흉내 내어 사람들은 최적의 운동을 하기 위해 최적제어 이론을 발전 시켰다.

이와 같이, 역사적으로 최적제어 이론은 물리에서 시작된 이론이지만, 현대 제어 공학에서는 최적제어이론을 물리적인 관련성은 배제하고, 수학적인 문제로만 다루어 왔다. 이 논고에서는 제어공학에서 매우 익숙한 최적제어 이론으로부터 몇 가지 물리적인 최적화 문제를 풀어보도록 한다.

가속도 함수 (1)에 대한 최적제어 이론은 매우 잘 알려져 있다 [1]. 이 결과로부터 물리학적 문제를 풀기 위해 간단한 공식을 유도하고, 이 공식으로부터 이동하는 진자시스템, 갈릴레오가 제안한 최속강하선 문제, 측지선 문제 등을 풀어본다 [2].

## 2. 최적제어 이론과 오일러 방정식

다음과 같은 시스템과 가격함수를 생각하자.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (3)$$

$$J = \int_0^T L(x, u, t) dt + \phi(x(T)) \quad (4)$$

해밀토니안 함수  $H$ 를 다음과 같이 정의하면

$$H(x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (5)$$

최적제어 이론에 의해 가격함수  $J$ 를 최소화하는  $H$ 는 다음을 만족한다.

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x} \lambda + \frac{\partial L}{\partial x} \quad (6)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u} \lambda \quad (7)$$

간단한 스칼라 시스템으로  $\dot{x} = u$ 를 생각하면

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 1 \quad (8)$$

이것 수식 (6)과 (7)를 합쳐서 다음과 식이 만들어진다.

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (9)$$

$L$ 이 운동 에너지와 위치에너지의 차이이고,  $x$ 와  $u$ 가 위치와 속도를 각각 나타낸다고 할 때 수식 (8)은 해석 역학에서 중요하게 다루어지는 오일러 방정식이 된다. 이 방정식에 의하면 동력학적 시스템의 이동 경로는 운동 에너지와 위치 에너지의 차이를 시간 적분한 것을 최소화 하는 방향으로 결정된다.

$L$ 이  $t$ 에 무관한 함수인 경우 수식 (9)는 좀 더 간단해질 수 있다. 우선 다음과 같은 관계식으로부터

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dL(x, u)}{dt} = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} + \dot{u} \frac{\partial L}{\partial u} \\ \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \ddot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \end{aligned} \quad (10)$$

아래 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = - \frac{dL}{dt} - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (11)$$

수식 (11)의 우변에 두 항은 오일러 방정식에 의하여 소거되고 최종으로 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{상수} \quad (12)$$

지금부터는 오일러 방정식 (9)와 (12)를 사용하여 몇 가지 문제를 풀어보도록 하자.

## 3. 동력학적 문제

그림 1과 같은 이동하는 진자시스템에서  $x$ 와  $\theta$ 사이의 동력학적 관계식을 구해보자. 운동에너지와 위치에너지의 차  $L$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 \\ &\quad + (l \dot{\theta} \sin \theta)^2] + mgl \cos \theta \end{aligned} \quad (13)$$

전체 운동에너지 경우 진자시스템 전체의 이동과 진자의 운동에 관련된 운동에너지로 구성되어 있고, 위치 에너지는 진자의 최저점으로부터의 높이에 의해 결정된다.

우리가 다루는 변수가  $x$ 와  $\theta$ 이므로 각각에 대해서 오일러 방정식 (9) 또는 (12)를 적용하면 다음 두 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta &= 0 \\ l\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

힘의 분해를 통해서 뉴턴 역학을 사용하면 매우 복잡해질 문

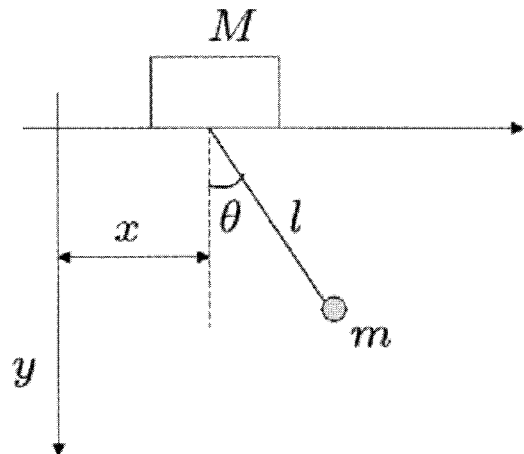


그림 1. 이동하는 진자 시스템

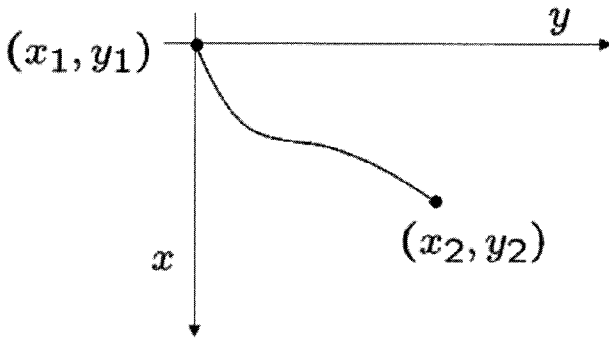


그림 2. 최속강하선 문제

제를 오일러 방정식을 통해서 매우 손쉽게 유도할 수 있다는 것을 알 수 있다.

이번에는 갈릴레오가 제기했던 최속강하선 문제를 풀어보자. 그림 2와 같이 어떤 위치  $(x_1, y_1)$ 에서 정지하고 있는 질량  $m$ 의 입자가 다른 더 낮은 위치  $(x_2, y_2)$ 로 중력의 힘만 사용하여 최소의 시간으로 이동할 수 있는 경로를 찾는 문제를 생각해 보자. 에너지 보존 법칙에 의해서 속력은  $v = \sqrt{2gx}$ 이며,  $x$  성분의 속도 성분만을 추리면 다음과 같다.

$$v_x = \frac{\sqrt{2gx}}{\sqrt{1+(\dot{y})^2}} \quad (15)$$

여기서  $\dot{y}$ 은  $y$ 의  $x$ 에 대한 미분이다.  $v_x dt = ds$  ( $s$ 는  $x$  방향으로의 이동 거리)이므로 이동시간은 다음과 같이 구해진다.

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v_x} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+(\dot{y})^2}{2gx}} dx \quad (16)$$

수식 (16)에서 보시다시피 적분안에  $y$ 변수를 가지고 있지 않으므로 수식 (9)에 해당하는 오일러 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (17)$$

수식 (9)의  $x, t, u$ 는 수식 (17)에서 각각  $y, x, \dot{y}$ 에 해당된다. 수식 (17)으로부터  $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ 은 상수가 되며, 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{(\dot{y})^2}{x(1+(\dot{y})^2)} = \frac{1}{2a} \quad (18)$$

여기서  $a$ 는 상수로 주어지고 나중에 경계조건에 의해 정해

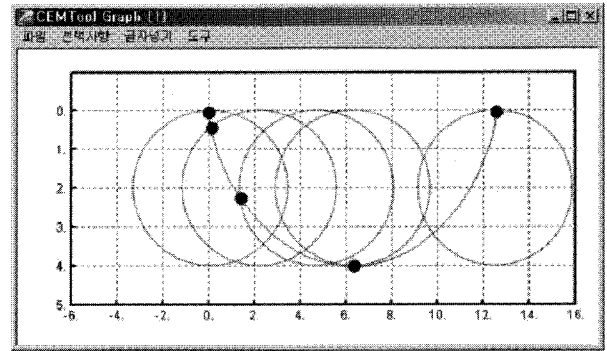


그림 3. cycloid 그래프

진다.  $y$ 에 대해서 적분식으로 표현하면

$$y = \int \frac{xdx}{(2ax-x^2)^{1/2}} \quad (19)$$

여기에서  $x = a(1 - \cos\theta)$ 와 같이 변수 치환하면 다음을 얻는다.

$$y = \int a(1 - \sin\theta)d\theta \quad (20)$$

적분 상수는 초기 위치  $(x_1, y_1)$ 가 원점에 있다는 사실에 근거하여 정하면 최종  $x$ 와  $y$ 의 궤적은  $\theta$ 를 매개변수로 하여 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= a(1 - \cos\theta) \\ y &= a(\theta - \sin\theta) \end{aligned} \quad (21)$$

$a$ 는 위 곡선이  $(x_2, y_2)$ 를 지나도록 정하면 된다. 수식 (21)은 cycloid가 되며, 갈릴레오가 짐작했던 원은 아님을 알 수 있다. cycloid 그래프는 그림 3에서 볼 수 있다. 원이  $x$ 축을 굴러가면서 초기 원점에 접했던 원위의 점이 시간에 따라 그린 궤적과 일치한다.

그래프는 CEMTool [3]을 사용하여 도시했다.

이번에는 구면에서 주어진 두 점 사이의 최단 거리(측지선)를 구하는 문제를 생각해 보자. 평면위에서 두 점 사이의 최단거리는 직선임이 너무 자명하겠지만, 곡선위의 최단거리는 그렇지 않다. 오일러 방정식을 사용하여 구면위의 두 점 사이의 최단 거리를 구해 보자.

반경  $\rho$ 인 구면 위의 길이의 요소는

$$ds = \rho \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2} \quad (22)$$

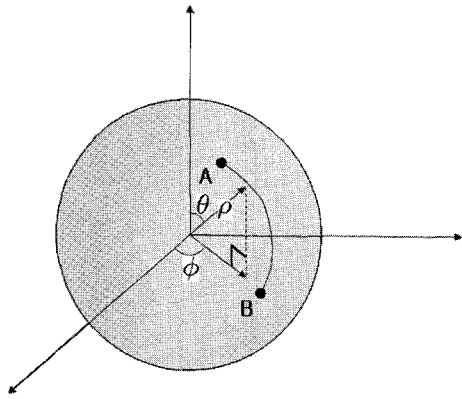


그림 4. 측지선 문제

이므로 점 A과 점 B의 거리  $J$ 는

$$J = \rho \int_A^B \left[ \left( \frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{1/2} d\phi \quad (23)$$

이고, 가격함수  $L$ 은

$$L = ((\dot{\theta})^2 + \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (24)$$

가 된다. 여기서  $\dot{\theta} = d\theta/d\phi$  이다.  $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$  이므로 오일러 방정식 (12)를 쓰면 그 결과는 다음과 같다.

$$(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2} - \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2} = a \quad (25)$$

수식 (12)의  $x, t, u$  는 수식 (25)에서 각각  $\theta, \phi, \dot{\theta}$  에 해당되고,  $a$  는 상수이다. (25)에서  $\dot{\theta}$  에 대해 미분하고 정리하면

$$\sin^2 \theta = a(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (26)$$

을 얻는다.  $\dot{\theta}$  에 대해서 풀고  $\phi$  에 대해 적분하면 다음을 얻는다.

$$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{\cot \theta}{\beta} \right) + \alpha \quad (27)$$

$\alpha$  는 적분상수이고,  $\beta^2 = \frac{1-a^2}{a^2}$  이다. 다시 정리하면  $\cot \theta = \beta \sin(\phi - \alpha)$  가 되며 양변에  $\rho \sin \theta$  를 곱하고,  $\sin(\phi - \alpha)$  를 전개하면 아래와 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} & (\beta \cos \alpha) \rho \sin \theta \sin \phi - (\beta \sin \alpha) \rho \sin \theta \cos \phi \\ & = \rho \cos \theta \end{aligned} \quad (28)$$

$\beta \cos \alpha \equiv A, \beta \sin \alpha \equiv B$  라 놓고 구좌표상의 위치를  $x, y, z$  라고 놓으면 아래와 같다.

$$Ax + By = z \quad (29)$$

이것의 구의 중심을 지나고 두 점 A와 B를 지나는 평면의 식이다. 이와 같이, 구면의 측지선은 이 평면과 구면의 교선이 나타내는 경로이다. 또한 반대쪽의 교선은 구면 위에 있는 두 점 사이의 최대의 거리가 된다.

#### 4. 결론

본고에서는 최적제어이론을 바탕으로 오일러 방정식을 유도하고, 그 식으로부터 세 가지의 흥미로운 동력학적 문제를 풀어 보았다. 이 외에도 다양한 물리학의 문제들이 제어공학에서 다루는 최적제어이론에 의해 접근될 수 있다. 최적제어에서 등장하는 해밀토니안과 Costate 방정식들도 물리량들과 매우 밀접한 관계에 있으며, 이러한 것들을 파악하는 것은 최적 제어에 대한 수학적 이해를 한층 깊게 할 것이다.

#### 참고문헌

- [1] F. L. Lewis, Optimal Control, John Wiley & Sons, Inc, 1986.
- [2] M. Thornton, Classical dynamics, Harcourt Brace & Company, 1995.
- [3] CEMTool : <http://cemtool.co.kr>

#### 저자 약력



#### 한수희

- 1974년 8월 26일생.
- 1998년 2월 서울대학교 전기공학부(공학사).
- 2000년 2월 서울대학교 전기·컴퓨터공학부(공학석사).
- 2003년 8월 서울대학교 전기·컴퓨터공학부(공학박사).
- 2002년 11월~2003년 8월 서울대학교 제어계측신기술연구소 연구원.
- 2003년 9월~2005년 1월 서울대학교 BK 박사후 연구원.
- 2005년 1월~2005년 10월 스탠포드 방문연구원.
- 2005년 10월~2007년 4월 서울대학교 제어계측신기술연구소 선임 연구원.
- 2007년 5월~현재 서울대학교 기계·항공공학부 BK 연구 교수.
- 관심분야 : 최적 제어 및 확률 제어, 이동 구간 제어, 시간 지연 시스템, 블록형 최적화, 추정 이론, 컴퓨터 이용 제어 시스템 설계.