

극배치 특성을 갖는 LQR 제어기 설계

LQR Controller Design with Pole-Placement

박민호*, 박문수, 박덕기, 홍석교, 이상혁

(Minho Park, Mun-Soo Park, Duckgee Park, Suk-Kyo Hong, and Sang-Hyuk Lee)

Abstract : This paper deals with LQR controller design method for system having complex poles. The proposed method is capable of systematically calculating weighting matrices based on the pole's moving-range and the relational equation between closed-loop pole(s) and weighting matrices. The method moves complex poles to complex poles or two distinct real poles. This will provide much-needed functionality to apply LQR controller. The example shows the feasibility of the proposed method.

Keywords : LQR, weighting matrix, pole's moving-range, pole-placement

I. 서론

제어기 설계의 목적은 설계사양에 맞도록 시스템의 성능을 향상시키고 동시에 시스템을 안정하게 하는 것이다. 제어 가능하고 관측 가능한 선형시스템의 제어기를 설계하는 방법은 PID, 최적제어, 적응제어, 극배치 기법 등 다양하다. 그중에서도 LQR 제어기 설계 방법은 시스템의 상태방정식(state equation)을 만족하고 가중된 상태변수의 제곱과 가중된 제어 입력 신호의 제곱의 합으로 표현한 성능지수를 최소화하는 제어법칙을 설계하는 것이다. 최적 제어 이론에 따르면 제어법칙은 유일하게 존재하고 실시간으로 측정되는 상태변수와 Riccati 방정식의 유일한 해로 표현되는 이득의 곱으로 표현된다. 이런 이유로 LQR 제어기 설계는 Riccati 방정식의 설계 변수인 두 개의 가중행렬을 선정하는 문제와 같다. LQR 제어기를 포함하는 폐루프 시스템의 극점 위치는 선정된 두 개의 가중행렬에 의해서 결정된다. 이렇게 계산된 LQR 제어기는 선정된 가중행렬의 값에 관계없이 시스템의 안정성에 대해서 이득여유와 위상여유를 보장한다. 반면에 LQR 제어기 설계 요소인 가중행렬과 폐루프의 극점 위치의 관계가 선형적이지 않기 때문에 원하는 설계사양을 만족하는 응답특성을 얻기 위해서 시행착오 방법으로 가중행렬을 조정하여 설정하는 단점이 있다. 이런 단점을 해결하기 위해서 많은 학자들이 가중행렬을 이용하여 폐루프 극점을 결정하는 방법을 연구하였다. 1972년에 Solheim[1]은 근과 가중행렬의 관계를 Hamiltonian 행렬로부터 유도하였고, 이를 이용하여 시스템 근중에서 실근(real pole)을 원하는 폐루프 실근으로 이동시키는 가중행렬을 구하는 방법을 제시하였다. 그렇지만 시스템의 복소근을 폐루프의 복소근 또는 서로 다른 두 실근으로 이동시키는 가중행렬의 구하는 방법은 명확하게 제시하지 못했다. 1989년에

Saif[2]는 행렬 연산을 이용하여 Solheim과 동일한 결과를 유도했으나 앞서 언급한 문제점은 해결하지 못했다. Anderson[3]은 동일한 폐루프 극점을 갖는 가중행렬이 여러 개 존재 한다는 사실을 밝혔다. 1996년과 2001년에 Fujinaka 등은 새로운 형태의 상태가중행렬을 이용하여 폐루프 복소근을 이동시키는 가중행렬을 계산하는 방법을 제시하였다 [4,5]. 이 방법은 Solheim이 해결하지 못한 시스템의 복소근을 이동시키는 가중행렬의 계산이 가능하다. 그러나 Fujinaka의 방법도 두 가지 문제점이 있다. 첫째는 SISO(Single Input Single Output) 시스템과 MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템에 따라 근과 가중행렬의 관계식이 다르게 표현되어 입력의 개수에 따라서 가중행렬의 계산하는 방법이 다른 것이다. 둘째는 시스템의 폐루프 복소근의 이동범위를 좌표평면에 표현 할 수 없어서 설계사양을 만족하는 근을 직관적으로 선택 할 수 없는 것이다.

박민호 등[6,7]은 s -평면에 그려지는 근의 이동범위를 기반으로 LQR 제어기를 설계하는 새로운 개념을 제시하였다. 이것은 SISO와 MIMO 시스템에 관계없이 복소근과 가중행렬의 관계를 하나의 수식으로 표현하고, 이 관계식에서 얻어지는 근의 이동범위를 s -평면에 그려 원하는 폐루프 복소근을 직관적으로 선택한다. 비록 시스템의 복소근을 폐루프 복소근으로 이동하는 경우로 제한적이지만 앞에서 언급한 Solheim과 Fujinaka의 문제점을 해결하였다.

이 논문은 시스템의 복소근을 폐루프의 서로 다른 두 실근으로 이동시키는 방법을 제시하여 논문[6,7]의 개념을 확대하였다. 그리고 논문[6,7]의 복소근의 이동범위와 복소근과 가중행렬의 관계식을 보완하였다. 예제에서 SISO 시스템의 복소근을 폐루프 복소근으로 이동시킨 후 시스템의 실근을 폐루프 실근으로 이동시키는 경우와 SISO 시스템의 복소근을 폐루프의 서로 다른 두 실근으로 이동시킨 후 시스템의 실근을 폐루프 실근으로 이동시키는 경우로 나누어 제안한 방법의 타당성을 검증한다.

2장에서는 LQR의 기본개념과 상태피드백 이득의 특성에 대해 알아본다. 3장에서는 근과 가중행렬의 관계식을 유도하고, 근의 이동범위는 4장에서 설명한다. 5장에서는 제시한 방법을

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 1. 31., 채택확정 : 2007. 3. 12.

박민호, 박문수, 박덕기, 홍석교, 이상혁 : 아주대학교 전자공학과 (minhinf@gmail.com/pmshark@ajou.ac.kr/duckgee@ajou.ac.kr/skhong@ajou.ac.kr/lsh74@ajou.ac.kr)

※ 본 논문은 한국과학재단 특정기초연구 R01-2006-000-11373-0 지원으로 수행되었음.

적용하여 예제를 풀어보고, 6장에 결론을 기술한다.

II. 최적제어

(1)은 선형 시불변 시스템을 나타낸다. 이 시스템의 고유값은 허수축 상에 존재하지 않는 서로 다른 값을 가지며 모든 상태변수는 제어 가능하고 관측 가능하다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -Kx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 A, B는 각각 $n \times n$, $n \times m$ 상수 행렬이고, 상태변수 (state variable) x 는 $n \times 1$ 벡터이고, 제어입력(control input) u 는 $m \times 1$ 벡터이다. 그리고 K는 최적제어 이론에 의해 성능지수 (2)를 최소화하는 제어법칙이다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

여기서 상태가중행렬(state weighting matrix) Q는 양의 반한정대칭행렬(positive semi-definite symmetric matrix)이고 제어가중행렬(control weighting matrix) R은 양의 한정대칭행렬(positive definite symmetric matrix)이다.

제한조건인 상태방정식을 만족하면서 (2)를 최소화하는 제어법칙은 제한조건 없이 Lagrange 곱수(multiplier)로 표현되는 성능지수를 최소화하는 것과 같다[8]. (3)의 Hamiltonian 시스템에서 유도되는 Lagrange 곱수는 Riccati 방정식(4)의 유일한 해인 변수 P에 의해 (5)로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -V \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad V = BR^{-1}B^T \quad (3)$$

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (4)$$

$$\lambda = Px \quad (5)$$

여기서 F는 Hamiltonian 행렬이다. Lagrange 곱수로 표현되는 (6)은 성능지수를 최소화하는 제어법칙이다. 이 제어법칙 결정하는 것은 (4)의 가중행렬 Q와 R을 설정하는 것과 같다.

$$u = -R^{-1}B^T \lambda = -R^{-1}B^T Px = -Kx \quad (6)$$

그리고 [1]에 의하면 시스템의 근을 한 번에 하나씩 원하는 페루프 근으로 순차적으로 이동시키는 상태가중행렬 Q는 (7)과 같이 각 단계에서 얻어지는 상태가중행렬 Q_i 의 합이 된다.

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (7)$$

III. 근과 가중행렬의 관계식

(8)로 표현되는 Hamiltonian 시스템 특성방정식은 2n개의 근을 가지며 s-평면의 좌반면(left half plane)에 n개 우반면(right half plane)에 나머지 n개가 위치하며 좌반면과 우반면의 근들은 서로 허수축에 대칭이다.

$$\begin{aligned} |sI - F| &= \begin{vmatrix} sI - A & V \\ Q & sI + A^T \end{vmatrix} \\ &= |sI - A| |sI + A^T - Q(sI - A)^{-1} V| \end{aligned} \quad (8)$$

LQR 제어를 포함한 페루프 시스템 특성방정식의 근이 Hamiltonian 시스템 특성방정식의 좌반면 근과 같다는 조건에서 가중행렬과 근의 관계식이 유도된다[1]. 시스템의 고유값을 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 로 정의하면 시스템 행렬 A는 변환행렬 T에 의해 (10)의 대각행렬(diagonal matrix) Λ 로 변환된다.

$$x = Tz \quad (9)$$

$$A = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

그러면 상태방정식, 성능지수 그리고 Hamiltonian 시스템도 T에 의해 각각

$$\dot{z} = Az + \tilde{B}u, \quad (11)$$

$$J = \int_0^{\infty} (z^T \tilde{Q}z + u^T Ru) dt, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\tilde{V} \\ -\tilde{Q} & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} = \tilde{F} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (13)$$

으로 변환된다. 여기서 기호 ($\tilde{\quad}$)는 대각행렬화된 시스템과 변수를 나타내고, $\tilde{B} = T^{-1}B$ 이고

$$\tilde{V} = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \dots & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} & \dots & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_{1n} & \tilde{v}_{2n} & \dots & \tilde{v}_{nn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

이다.

시스템 특성방정식의 근은 실근과 복소근으로 나누어지며 근중에서 실근과 가중행렬의 관계식은 Solheim의 방법을 사용하고, 복소근과 가중행렬의 관계식은 시스템 복소근을 페루프 복소근과 서로 다른 두 실근으로 이동시키는 경우로 나누어 유도한다.

1. 시스템의 복소근을 페루프 복소근으로 이동

시스템의 고유값이 한 쌍의 복소근 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$)와 n-2개의 실근을 가지면 변환행렬 T'에 의해 시스템 행렬 A는 대각행렬 (15)로 변환된다.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

이처럼 시스템의 고유값에 복소수가 있으면 변환행렬 T'와 대각행렬 Λ 그리고 \tilde{V} 의 원소(element)에 복소수가 포함되어 실수인 경우보다 계산이 복잡해진다. 따라서 행렬에 포함된 복소수를 실수로 변환하기 위해 (16)의 변환행렬 L을 적용하여 새로운 변환행렬 T를 유도한다[9].

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{j}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$T = T' L \quad (17)$$

변환행렬 T는 시스템 행렬 A를 (18)과 같은 모양의 행렬 A*로 변환시킨다.

$$A^* = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (18)$$

A*를 기준으로 하여 한 쌍의 복소근과 관계되는 상태가중행렬 Q̃를 (19)와 같이 정의하면 Hamiltonian 시스템의 특성방정식은 (20)이 된다.

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$|sI - \tilde{F}| = \begin{vmatrix} s - \alpha & -\beta & \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} \\ \beta & s - \alpha & \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} \\ \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & s + \alpha & -\beta \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & \beta & s + \alpha \end{vmatrix} \times \prod_{i=3}^n (s + \lambda_i)(s - \lambda_i) \quad (20)$$

이 (20)의 근은

$$\begin{vmatrix} s - \alpha & -\beta & \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} \\ \beta & s - \alpha & \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} \\ \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & s + \alpha & -\beta \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & \beta & s + \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

을 만족하는 s₁, s₂와

$$s_i = \pm \lambda_i, \quad i = 3, 4, \dots, n \quad (22)$$

이 된다.

시스템의 복소근(α ± jβ)은 설계된 LQR 제어기에 의해 페루프 복소근으로 이동되며, 근과 가중행렬의 관계식은 이동된 페루프 복소근이 (21)의 근이라는 조건에서 유도된다. 상태가중행렬 Q̃의 변수를 (23)과 같이 정의하면[4,5], Q̃가 양의 반한정행렬이 되기 위해서는 ρ와 θ는 (24)를 만족해야 한다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos^2 \theta & \rho \cos \theta \sin \theta \\ \rho \cos \theta \sin \theta & \rho \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\rho > 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

그리고 페루프 복소근을 s₁, s₂ = γ ± jδ (γ ≠ 0, δ ≠ 0)라 정의하면 복소근과 가중행렬의 관계식은 (25)와 (26)의 θ와 ρ로 표현된다.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-e_{c2} \pm \sqrt{e_{c2}^2 - 4e_{c1}e_{c3}}}{2e_{c3}} \right) \quad (25)$$

$$\rho = \frac{e_{c14}}{\cos^2 \theta e_{c11} + \cos \theta \sin \theta e_{c12} + \sin^2 \theta e_{c13}} \quad (26)$$

$$= \frac{e_{c24}}{\cos^2 \theta e_{c21} + \cos \theta \sin \theta e_{c22} + \sin^2 \theta e_{c23}}$$

여기서 e_{c1} = e_{c14} e_{c21} - e_{c24} e_{c11},

$$e_{c2} = e_{c14} e_{c22} - e_{c24} e_{c12},$$

$$e_{c3} = e_{c14} e_{c23} - e_{c24} e_{c13},$$

$$e_{c11} = \tilde{v}_{11}, \quad e_{c12} = 2\tilde{v}_{12}, \quad e_{c13} = \tilde{v}_{22},$$

$$e_{c14} = 2(\gamma^2 - \delta^2 - \alpha^2 + \beta^2),$$

$$e_{c21} = \alpha^2 \tilde{v}_{11} - 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{22},$$

$$e_{c22} = 2(\alpha^2 \tilde{v}_{12} - \alpha\beta(\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{11}) - \beta^2 \tilde{v}_{12}),$$

$$e_{c23} = \alpha^2 \tilde{v}_{22} + 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{11},$$

$$e_{c24} = (\gamma^2 + \delta^2)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

이다. 설계된 Q̃는 시스템의 복소근 α ± jβ를 페루프 복소근 γ ± jδ로 이동시킨다.

2. 시스템의 복소근을 페루프의 서로 다른 두 실근으로 이동

앞장처럼 시스템이 한 쌍의 복소근을 λ_{1,2} = α ± jβ로 표현하면 변환행렬과 Hamiltonian 시스템의 특성방정식은 동일하게 표현된다. 상태가중행렬도 동일하게 정의하고 페루프의 서로 다른 두 실근을 s₁ = r₁, s₂ = r₂ (r₁ ≠ r₂, r₁ ≠ 0, r₂ ≠ 0)라 하면 근과 가중행렬의 관계식은 (27)과 (28)의 θ와 ρ로 표현된다.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-e_{c5} \pm \sqrt{e_{c5}^2 - 4e_{c4}e_{c6}}}{2e_{c6}} \right) \quad (27)$$

$$\rho = \frac{e_{c44}}{\cos^2 \theta e_{c41} + \cos \theta \sin \theta e_{c42} + \sin^2 \theta e_{c43}} \quad (28)$$

$$= \frac{e_{c54}}{\cos^2 \theta e_{c51} + \cos \theta \sin \theta e_{c52} + \sin^2 \theta e_{c53}}$$

여기서 e_{c4} = e_{c44} e_{c51} - e_{c54} e_{c41},

$$e_{c5} = e_{c44} e_{c52} - e_{c54} e_{c42},$$

$$e_{c6} = e_{c44} e_{c53} - e_{c54} e_{c43},$$

$$e_{c41} = \tilde{v}_{11}, \quad e_{c42} = 2\tilde{v}_{12}, \quad e_{c43} = \tilde{v}_{22},$$

$$e_{c44} = r_1^2 + r_2^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2),$$

$$e_{c51} = \alpha^2 \tilde{v}_{11} - 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{22},$$

$$e_{c52} = 2(\alpha^2 \tilde{v}_{12} - \alpha\beta(\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{11}) - \beta^2 \tilde{v}_{12}),$$

$$e_{c53} = \alpha^2 \tilde{v}_{22} + 2\alpha\beta \tilde{v}_{12} + \beta^2 \tilde{v}_{11},$$

$$e_{54} = r_1^2 r_2^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

이다. 설계된 Q̃는 시스템의 복소근 α ± jβ를 페루프의 서로 다른 두 실근 r₁, r₂으로 이동시킨다.

IV. 근의 이동범위(Pole's moving-range)

설계된 상태가중행렬이 시스템 근을 이동시킬 수 있는 영역을 좌표평면에 그린 것이 근의 이동범위이다. 이 범위는 근과 가중행렬의 관계식에서 계산되는 상태가중행렬이 양의 반한정행렬이 될 조건[10]에서 얻어진다. 근의 이동방법에 따라 근의 이동범위는 페루프 복소근과 페루프의 서로 다른 두 실근으로 나누어 구한다.

1. 페루프 복소근의 이동범위

좌표평면에 그려지는 페루프 복소근의 이동범위는 조건 (24)를 만족하는 θ와 ρ의 공통 영역으로 표현된다. (25)의

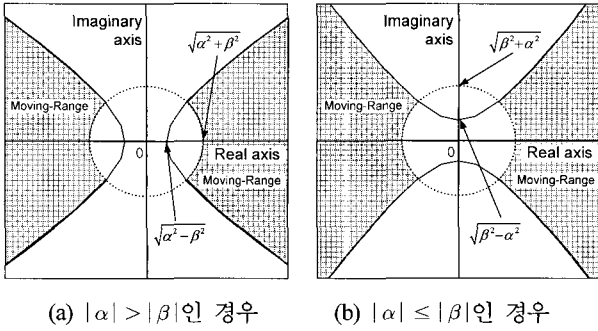


그림 1. ρ 에 의한 폐루프 복소근의 이동범위.
 그림 1. Closed-loop complex pole's moving-range by ρ .

θ 가 (24)를 만족할 조건은 (29)이다.

$$e_{e2}^2 - 4e_{e1}e_{e3} \geq 0 \quad (29)$$

그리고 시스템이 제어 가능하고 제어가중행렬의 모든 고유값이 양수이기 때문에 (26)의 분모의 크기는

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta e_{e11} + \cos \theta \sin \theta e_{e12} + \sin^2 \theta e_{e13} &\geq 0 \\ \cos^2 \theta e_{e21} + \cos \theta \sin \theta e_{e22} + \sin^2 \theta e_{e23} &\geq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

과 같고 분모의 최소가 0이 되는 θ 가 조건 (29)를 만족하지 않기 때문에 분모들은 항상 양수가 된다. 그래서 ρ 가 양수가 될 조건은 (31)이다.

$$\begin{aligned} \gamma^2 - \delta^2 &> \alpha^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 + \delta^2 &> \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \quad (31)$$

ρ 에 의해 표현되는 영역은 시스템 복소근의 실수부가 허수부보다 크면 ($|\alpha| > |\beta|$) 그림 1(a)의 영역이 되고 허수부가 크면 ($|\alpha| \leq |\beta|$) 그림 1(b)의 영역이 된다.

s-평면에 그려지는 폐루프 복소근의 이동범위는 (29)에 의해 표현되는 영역과 (31)에 의해 표현되는 영역의 공통부분이다.

2. 폐루프의 서로 다른 두 실근의 이동범위

좌표평면에 그려지는 폐루프의 서로 다른 두 실근의 이동범위는 조건 (24)를 만족하는 θ 와 ρ 의 공통 영역으로 표현된다. (27)에서 θ 가 (24)를 만족할 조건은 (32)이다.

$$e_{e5}^2 - 4e_{e4}e_{e6} \geq 0 \quad (32)$$

ρ 가 양수가 될 조건은 (33)이다.

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 &> 2(\alpha^2 - \beta^2) \\ r_1 r_2 &> \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \quad (33)$$

ρ 에 의해 표현되는 영역은 시스템의 복소근의 실수부의 크기가 허수부보다 크면 ($|\alpha| > |\beta|$) 그림 2(a)의 영역이 되고 허수부가 크면 ($|\alpha| \leq |\beta|$) 그림 2(b)의 영역이 된다.

r_1, r_2 -평면에 그려지는 폐루프의 서로 다른 두 실근의 이동범위는 (32)에 의해 표현되는 영역과 (33)에 의해 표현되는 영역의 공통부분이다.

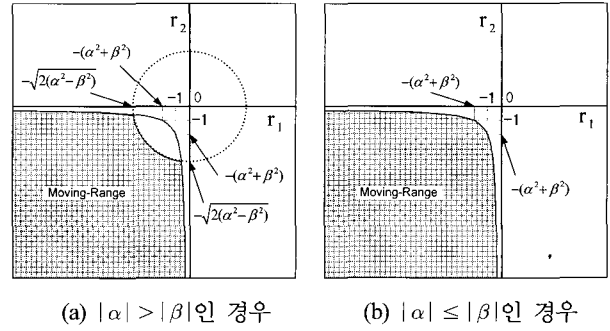


그림 2. ρ 에 의한 서로 다른 폐루프 두 실근의 이동범위.
 그림 2. Closed-loop real pole's moving-range by ρ .

V. 예제

제안한 방법은 좌표평면에 그려진 근의 이동범위와 설계 사양의 공통영역에서 원하는 폐루프 근을 선택하여 상태가중행렬을 계산하여 LQR 제어를 설계한다. 이 방법은 시스템의 근들 중에서 설계조건을 만족시키지 못하는 근만을 선택적으로 이동시킬 수 있다.

간단한 SISO 시스템에 기존의 방법으로 LQR 제어를 설계하여 응답특성을 분석하고, 응답특성을 개선하기 위한 새로운 LQR 제어를 제안한 방법으로 설계한다. 두 제어기의 모의실험 결과를 비교하여 제안한 방법의 타당성을 검증한다. 제안한 방법의 타당성 검증을 위한 SISO 시스템의 상태방정식은 (34)이다. 이 시스템의 설계사양은 응답특성에서 오버슈트(overshoot)가 30% ($\zeta > 0.35$)를 초과하지 않고 정상상태에 도달하는 시간이 6.0초($\zeta\omega_n > 0.67$)가 되도록 설정한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2.5 & -3.5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

먼저 (35)처럼 가중행렬을 선택하면 Riccati 방정식에 의해 LQR 제어기의 상태피드백 이득 K_0 는 (36)이 된다. 그림 4의 제어기 K_0 의 모의실험 결과를 보면 응답이 정상상태에 도달하는데 걸리는 시간이 13.0초이고 오버슈트가 55% 발생한다.

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1 \quad (35)$$

$$K_0 = [0.1926 \quad 0.1700 \quad 0.0832] \quad (36)$$

제어기 K_0 의 응답이 설계사양을 만족시키는 못하는 이유는 시스템 $A_1 (= A_0 - BK_0)$ 의 근들 중에서 복소근이 설계 사양의 영역 내에 있지 않기 때문이다.

$$s_1, s_2, s_3 = -1.0416, -0.5208 \pm j 1.5211 \quad (37)$$

시스템 A_1 의 근을 이동시키기는 LQR 제어기는 다음과 같이 두 가지 경우로 나눠 설계한다. 첫 번째는 시스템 A_1 의 복소근을 폐루프 복소근으로 이동시킨 후 실근을 실근으로 이동시키는 경우이고 두 번째는 복소근을 폐루프의 서로 다른 두 실근으로 이동시킨 후 실근을 실근으로 이동

시키는 경우이다.

1. 시스템의 복소근을 페루프의 복소근으로 이동시키는 경우

A_1 의 복소근($-0.5208 \pm j 1.5211$)을 원하는 페루프 복소근으로 이동시키고 실근(-1.0416)을 원하는 페루프 실근으로 이동시키는 상태가중행렬을 계산하여 LQR 제어를 설계한다.

1.1 복소근($-0.5208 \pm j 1.5211$)의 이동

시스템 A_1 이 복소근을 가지므로 (17)의 변환행렬 T_{11} 을 이용하여 A_1 을 대각행렬 A_{11}^* 로 변환한다. (29)와 (31)에 복소근($-0.5208 \pm j 1.5211$)을 대입하여 얻어지는 영역과 설계 사양에서 얻어지는 영역의 공통부분이 그림 3의 복소근의 이동범위이다.

이 범위에서 원하는 페루프의 복소근을 $-3.0 \pm j 1.0$ 로 선택하여 (25)와 (26)에 대입하면 $\theta, \rho, \tilde{Q}_{11}$ 이 계산되며 그 값은 표 1과 같다.

1.2 실근(-1.0416)의 이동

$A_{12}(=A_1 - BK_{11})$ 는 (17)의 변환행렬 T_{12} 에 의해 대각행렬 A_{12}^* 로 변환되고 변환된 시스템에 의해 실근(-1.0416)의 이동범위는 (38)이 된다[7].

$$r_s \leq -1.0416 \tag{38}$$

이 영역과 설계사양의 공통영역에서 -4 를 원하는 페루프 실근으로 선택하면 \tilde{Q}_{12} 가 계산된다[7].

$$\tilde{Q}_{12} = \begin{bmatrix} 106.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

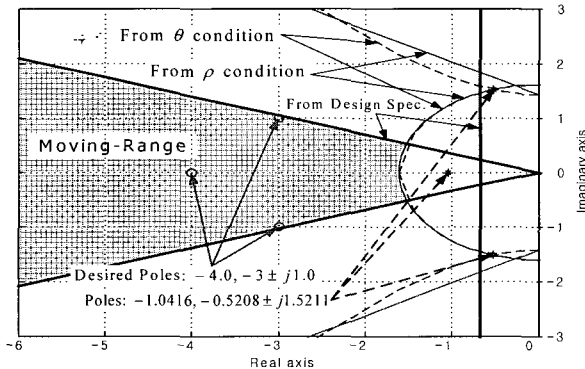


그림 3. 페루프 복소근의 이동범위.

그림 3. Closed-loop complex pole's moving-range.

표 1. 상태가중행렬 \tilde{Q}_{11} .

Table 1. State weighting matrix \tilde{Q}_{11} .

	θ	ρ	\tilde{Q}_{11}
1	3.6855°	47.9205	$\begin{bmatrix} 47.7225 & 3.07394 & 0 \\ 3.0739 & 0.1980 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	76.2362°	25.2131	$\begin{bmatrix} 1.4272 & 5.8264 & 0 \\ 5.8264 & 23.7859 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.3 새로운 LQR 제어기

설계조건을 만족하는 범위에서 선택된 근으로 이동시키는 상태가중행렬 Q_1 은 앞에서 계산한 상태가중행렬의 합으로 표현되며 그 값은 (40)이다.

$$Q_1 = Q_0 + \sum_{i=1}^2 (T_{1i}^{-T} \tilde{Q}_{1i} T_{1i}^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} 1593.750 & 945.131 & 104.055 \\ 945.131 & 561.860 & 67.118 \\ 104.055 & 67.118 & 35.000 \end{bmatrix} \tag{40}$$

또는

$$= \begin{bmatrix} 1593.750 & 1039.075 & 194.245 \\ 1039.075 & 742.241 & 153.704 \\ 194.245 & 153.704 & 35.000 \end{bmatrix}$$

계산된 상태가중행렬의 값이 두 개이지만 입력이 하나이기 때문에 제안한 방법으로 설계된 LQR 제어기의 상태피드백 이득((41)은 하나가 된다.

$$K_1 = [37.5 \ 30.5 \ 8.0] \tag{41}$$

1.4 모의실험

그림 4는 시스템의 초기조건이 $x(0) = [0 \ -1 \ 0]$ 일 때 상태피드백 이득 K_0 와 K_1 에 대한 모의실험 결과이다. 상태피드백 이득 K_0 를 적용한 모의실험의 응답특성은 오버슈트가 55%이고 정상상태 도달시간은 13.0초이다. 반면에 상태피드백 이득 K_1 에 대한 모의실험의 응답특성은 오버슈트가 25.9%이고 정상상태 도달 시간은 3.5초이다. 제안한 방법으로 설계된 LQR 제어기 K_1 은 55%의 오버슈트를 25.9%로 줄이고, 정상상태 도달시간도 13.0초에서 3.5초로 단축시켜 K_0 의 응답특성을 설계사양에 맞도록 개선하였다.

2. 시스템의 복소근을 페루프의 서로 다른 두 실근으로 이동시키는 경우

A_1 의 복소근($-0.5208 \pm j 1.5211$)을 원하는 페루프의 서로 다른 두 실근으로 이동시키고 실근(-1.0416)을 원하는 페루프 실근으로 이동시키는 상태가중행렬을 계산하여 LQR 제어를 설계한다.

2.1 복소근($-0.5208 \pm j 1.5211$)의 이동

시스템 A_1 이 복소근을 가지므로 (17)의 변환행렬 T_{21} 을 이용하여 A_1 을 대각행렬 A_{21}^* 로 변환한다. (32)와 (33)에 복

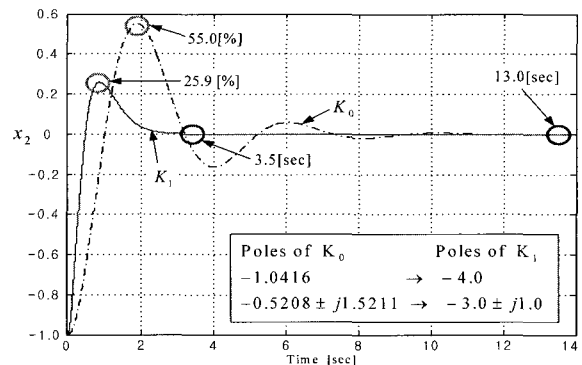


그림 4. 모의실험.

그림 4. Simulation.

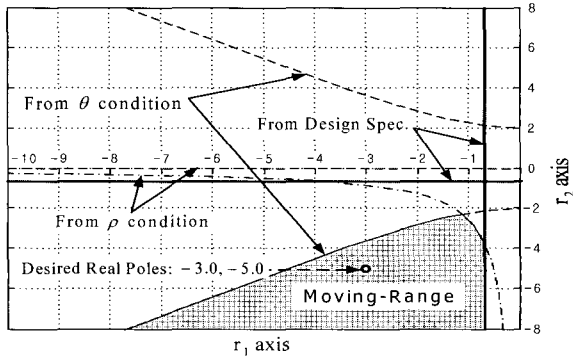


그림 5. 페루프 실근의 이동범위.
 그림 5. Closed-loop real pole's moving-range.

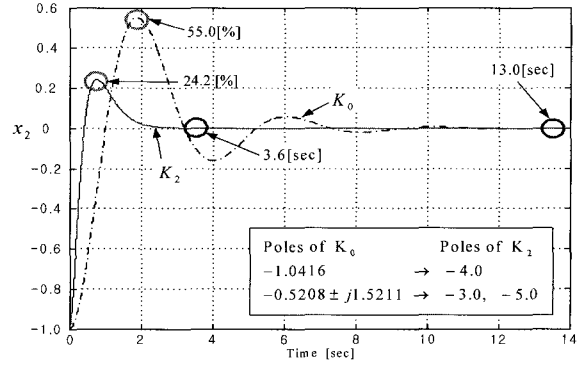


그림 6. 모의실험.
 그림 6. Simulation.

표 2. 상태가중행렬 \tilde{Q}_{21} .

Table 2. State weighting matrix \tilde{Q}_{21} .

	θ	ρ	\tilde{Q}_{21}
1	5.7609°	103.6668	$\begin{bmatrix} 102.6292 & 10.3191 & 0 \\ 10.3191 & 1.0376 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	72.3718°	55.8399	$\begin{bmatrix} 5.1212 & 16.1164 & 0 \\ 16.1164 & 50.7187 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

소근(-0.5208 ± j 1.5211)을 대입하여 얻어지는 영역과 설계 사양에서 얻어지는 영역의 공통부분이 그림 5의 복소근의 이동범위이다.

이 범위에서 원하는 페루프의 서로 다른 두 실근을 -3.0, -5.0로 선택하여 (27)과 (28)에 대입하면 θ , ρ , \tilde{Q}_{21} 가 계산되며 그 값은 표 2와 같다.

2.2 실근(-1.0416)의 이동

$A_{22}(=A_1 - BK_{21})$ 는 (17)의 변환행렬 T_{22} 에 의해 대각행렬 Λ_{22}^* 로 변환되고 변환된 시스템에 의해 실근(-1.0416)의 이동범위는 (42)가 된다.

$$r_s \leq -1.0416 \tag{42}$$

이 영역과 설계사양의 공통영역에서 -4를 원하는 페루프 실근으로 선택하면 \tilde{Q}_{22} 가 계산된다.

$$\tilde{Q}_{22} = \begin{bmatrix} 106.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

2.3 새로운 LQR 제어기

설계조건을 만족하는 범위에서 선택된 근으로 이동시키는 상태가중행렬 Q_2 는 앞에서 계산한 상태가중행렬의 합으로 표현되며 그 값은 (44)이다.

$$Q_2 = Q_0 + \sum_{i=1}^2 (T_{2i}^{-T} \tilde{Q}_{2i} T_{2i}^{-1}) = \begin{bmatrix} 3593.750 & 1918.274 & 128.745 \\ 1918.274 & 1024.240 & 67.806 \\ 128.745 & 67.806 & 53.000 \end{bmatrix} \tag{44}$$

또는

$$= \begin{bmatrix} 3593.750 & 2116.141 & 318.705 \\ 2116.141 & 1404.161 & 250.175 \\ 318.705 & 250.175 & 53.000 \end{bmatrix}$$

(45)은 상태가중행렬 Q_2 에 의해 계산되는 LQR 제어기의 상태피드백 이득이다.

$$K_2 = [57.5 \ 43.5 \ 10.0] \tag{45}$$

2.4 모의실험

그림 6는 시스템의 초기조건이 $x(0) = [0 \ -1 \ 0]$ 일 때 상태피드백 이득 K_0 와 K_2 에 대한 모의실험 결과이다. 상태 피드백 이득 K_0 를 적용한 모의실험의 응답특성은 오버슈트가 55%이고 정상상태 도달시간은 13.0초이다. 반면에 상태피드백 이득 K_2 에 대한 모의실험의 응답특성은 오버슈트가 24.2%이고 정상상태 도달 시간은 3.6초이다. 제안한 방법으로 설계된 LQR 제어기 K_2 는 55%의 오버슈트를 24.2%로 줄이고 정상상태 도달시간도 13.0초에서 3.6초로 단축시켜 K_0 의 응답특성을 설계사양에 맞도록 개선하였다.

VI. 결론

이 논문은 근의 이동범위를 기반으로 시스템의 복소근을 원하는 페루프의 서로 다른 두 실근으로 이동시키는 LQR 제어기를 설계하는 방법에 관한 것이다. 제어가능하고 관측 가능한 SISO와 MIMO 시스템이 서로 다른 근을 가지는 경우에 특별한 형태의 가중행렬을 이용하여 근의 이동범위와 근과 가중행렬의 관계식을 Hamiltonian 시스템의 특성방정식에서 유도하였다. 그리고 시스템의 복소근을 페루프 복소근으로 이동시키는 방법[6,7]과 실근을 이동시키는 Solheim의 방법을 함께 이용함으로써 시스템의 근을 근의 이동범위 내에 있는 원하는 페루프 근(실근, 복소근, 서로 다른 두 실근)으로 이동시키는 극배치 기능을 갖는 LQR 제어기 설계 방법을 제시하였다.

이 방법의 장점은 SISO와 MIMO 시스템에 관계없이 근과 가중행렬의 관계식이 하나의 수식으로 표현되고, 좌표평면에 그려지는 근의 이동범위에서 원하는 페루프 근을 직관적으로 선택하여 가중행렬과 LQR 제어기를 설계하는 것이다.

예제를 통해 이 방법이 기존의 시행착오적인 방법의

LQR 제어기 설계 방법과 Solheim 그리고 Fujinaka의 방법보다 체계적임을 예제를 통해 확인하였다.

앞으로 시스템의 모든 근을 이동시키는 LQR 제어기 설계 방법을 제시하기 위해 시스템의 서로 다른 두 실근을 한 쌍의 페루프 복소근으로 이동시키는 방법에 대한 연구가 요구된다.

참고문헌

[1] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues," *Int. J. Control*, vol. 15. pp. 143-160, 1972.

[2] M. Saif, "Optimal linear regulator pole-placement by weighting selection," *Int. J. Control*, vol. 50. No. 1, pp. 399-414, 1989.

[3] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Optimal Control*, Prentice-Hall, 1989.

[4] T. Fujinaka and H. Shibata, "Admissible region for pole

positioning with optimal regulator," *Proc. IEEE CDC*, Kobe, Japan, pp. 3631-3635, 1996.

[5] T. Fujinaka and S. Omatu, "Pole placement using optimal regulators," *T.IEE Japan*, vol. 121-C, pp. 240-245, 2001.

[6] 박민호, 홍석교, "LQR 제어기의 과도 상태 개선 방법에 관한 연구," 대한전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 2239-2241, 2004.

[7] 박민호, 홍석교, 이상혁, "근의 이동범위를 고려한 LQR 제어기 설계," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, 제 11 권 제 10 호, pp. 864-869, 2005.

[8] A. P. Sage, C. C. White, *Optimum System Control*, Prentice-Hall, 1977.

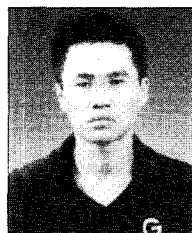
[9] K. Ogata, *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice-Hall, pp. 119-120, 1967.

[10] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, 3rd Ed. Harcourt Brace & Company, pp. 339-340, 1988.



박민호

1991년 아주대학교 제어공학과 졸업. 1993년 동 대학원 제어계측공학과 석사. 1999년 9월~현재 아주대학교 전자공학과 박사과정. 관심분야는 최적제어, Robust Control.



박문수

1998년 아주대 전자공학부 졸업. 2000년 동 대학원 석사. 2002년 동 대학원 박사수료. 2002년~현재 아주대 정보전자기술연구소 연구원. 관심분야는 시스템 판별, 로봇 및 무인 비행체의 비선형 적응 제어.



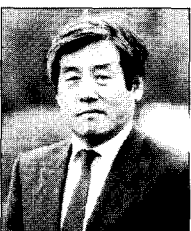
박덕기

1999년 아주대 전자공학과 졸업. 2001년 동 대학원 석사. 2001년~현재 동 대학원 박사과정. 관심분야는 추정이론, 비선형 제어, 모델링.



홍석교

1971년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1973년 동 대학원 석사. 1981년 동 대학원 박사. 1976년~현재 아주대학교 전자공학부 교수. 관심분야는 로봇제어, 컴퓨터 응용, 지능제어.



이상혁

1937년 5월 16일생. 1962년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1964년 동 대학원 석사. 1965년 Free University of Brussels 석사. 1973년 Free University of Brussels 박사. 1974년~2002년 8월 아주대학교 전자공학부 교수. 2002년

9월~현재 아주대학교 전자공학과 명예교수. 관심분야는 다변수제어, Robust Control.