

병렬형 모션 시뮬레이터의 기구학적 해석과 강인 궤적추종 PID 제어기의 설계

Kinematics and Robust PID Trajectory Tracking Control
of Parallel Motion Simulator

홍 성 일*
Hong, Seong-Il

ABSTRACT

This article suggests an inverse kinematics analysis of a two degree of freedom spatial parallel motion simulator and design methodology of the robust PID controller. The parallel motion simulator consists of a fixed base and a moving frame connected by two serial chains, with each serial chain containing one revolute joint and two passive spherical joint. First, an inverse kinematics problems are solved in order to find the joint variable necessary to bring the end effector to track the desired trajectory. Second, an inverse optimal PID controller is proposed to track trajectories in the face of uncertainty. And the H_{∞} optimality and robust stability of the closed-loop system is acquired through the PID controller. Finally numerical results show the effectiveness of the PID controller that is designed by square/linear tuning laws.

주요기술용어(주제어) : Inverse Kinematics(역기구학), Parallel Manipulator(병렬형 매니플레이터), H_{∞} Performance (H_{∞} 성능지수), Robust PID Control(강인 PID 제어)

1. 서론

Gough와 Whitehall^[1]의 유압모터에 의해 구동되는 6자유도 병렬형 매니플레이터(Parallel Manipulator)의 개발과 Stewart^[2]의 병렬형 항공기 시뮬레이터의 개발 이후로 모션 시뮬레이터(Motion Simulator)로부터 산업용 로봇에 이르기까지 병렬형 매니플레이

터는 광범위하게 사용되고 있다. 본 논문에서 사용된 모션 시뮬레이터는 병렬형 매니플레이터로서 직렬형 매니플레이터(Serial Manipulator)에 비해 큰 하중을 지지할 수 있는 장점이 있는 반면 구동영역(Workspace)이 작고 기구학적으로 복잡하다는 단점이 있다. 또 대부분의 모션 시뮬레이터는 6자유도 혹은 3자유도 운동을 하지만 본 논문에서 사용된 모션 시뮬레이터는 필요상 톨과 피치의 2자유도 운동이 가능하도록 하였으며 그 형상은 그림 1에 나타내었다. 모션 시뮬레이터는 크게 두 개의 프레임으로 구성되는데 하나는 상부 프레임으로 움직일 수 있는 동적프

† 2007년 4월 16일 접수~2007년 6월 15일 게재승인

* 국방과학연구소(ADD)

주저자 이메일 : hongsi@add.re.kr



[그림 1] 모션 시뮬레이터의 형상

레이미고 또 다른 하나는 하부 프레임으로 고정프레임이다. 상부 프레임으로 하여금 원하는 궤적을 추종하게 하기 위해서 역기구학 문제를 풀어 구동 모터에서 추종할 궤적을 생성하고 그 궤적을 추종하기 위해 강인 PID 제어기를 설계하기로 한다.

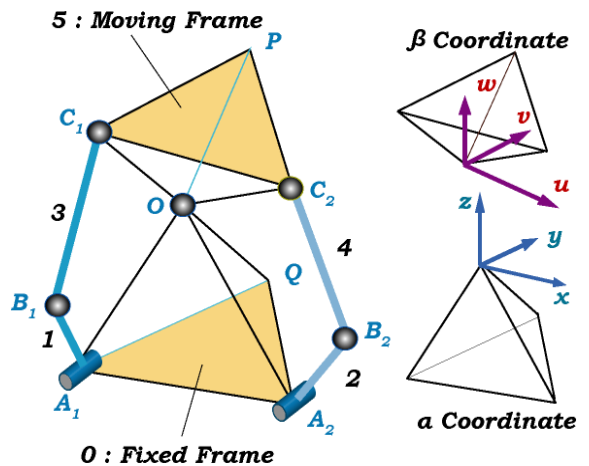
산업현장에서 사용하는 제어기의 90% 이상이 PID 제어기인데 이러한 형태의 제어기를 많이 쓰는 이유는 P, I, D, 각각 제어기의 역할이 물리적으로 이해하기가 쉽고, 제어 대상이 선형이든 비선형이든 관계없이 적용할 수 있으며 제어모델에 대한 정보가 없는 상태에서도 사용할 수 있는 장점이 있기 때문이다^[3~4]. Ziegler Nichols의 튜닝방법이 제시된 이후로 PID 튜닝에 관한 많은 체계적인 방법들이 연구되었지만 대부분 선형 시스템을 근간으로 하고 있고 또 PID 제어기가 어떤 성능조건(Performance Index)을 만족하는지 그리고 외란에 대해 얼마만큼 강인한 성질을 가지는지에 대해서도 여전히 의문이 남아있다.

PID 제어와 별도로 지난 수 십년간 시스템내에 존재하는 파라미터의 불확실성이나 예측할 수 없는 외란과 같은 외부적인 불확실성이 존재하는 가운데서도 안정성과 최적성능지수를 만족하는 비선형 강인 H_{∞} 제어기법에 대해 많이 연구되었다^[5~6]. 그러나 산업현장에서는 아직 광범위하게 사용되지 않은데 왜냐하면 비선형 H_{∞} 제어 문제를 풀기 위해서는 편미분 방정식으로 유도되는 Hamilton-Jacobi-Issac(HJI) 방정식을 풀어야하기 때문이다. 일반적으로 HJI 방정식은

풀기가 매우 어려우며 정리 자체에서도 해를 보장하지 않는다^[6]. 이러한 시점에서 PID제어 기법으로 H_{∞} 성능조건을 만족시키는 방법에 주목할 필요가 있다. HJI 방정식을 직접적으로 풀지않고 역최적(Inverse Optimal) 기법을 이용하여 간접적으로 접근할 수 있는데, 외란이 존재하며 비선형 Lagrange 방정식으로 표현되는 동역학 시스템의 궤적 추종 제어에서 H_{∞} 성능조건을 만족하는 PID제어기가 제시된 바 있다^(7~9). 본 논문에서는 이러한 역최적 기법을 근간으로 하여 시스템에 작용하는 불확실성의 영향을 최소화 하면서 H_{∞} 성능지수를 만족하는 PID 제어기를 설계하고자 한다.

2. 모션 시뮬레이터의 구조와 역기구학 해석

그림 2에서 보는 바와 같이 병렬형 모션 시뮬레이터는 동적 프레임(Moving Frame : 5번 링크)과 고정 프레임(Fixed Frame : 0번 링크)으로 구성되어있고 두 프레임은 각각 두개의 링크와 하나의 조인트로 연결되어있다. 동적 프레임 OC_1C_2P 와 고정 프레임 OA_1A_2Q 는 사면체 형태를 취하고 있으며 동적 프레임과 고정 프레임은 점 O 에서 유니버설 조인트(Universal Joint)로 연결되어있다. 링크 3번과 4번은 점 C_i 에서 Spherical Joint로 동적 프레임과 연결되



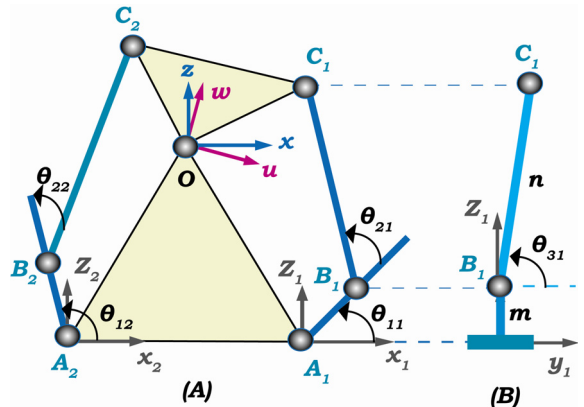
[그림 2] 2-DOF 모션 시뮬레이터의 구조와 좌표계

어있으며 링크 3,4는 다시 점 B_i 에서 Spherical Joint 로써 링크 1,2와 각각 연결되어있다. Spherical Joint B_i 에 연결된 링크 1,2는 A_i 에서 Revolute Joint를 이용하여 하부의 고정 프레임과 연결되어있다. 그리고 Revolute Joint는 모터에 의해 각 운동을 한다. 기구학적 해석을 위하여 두 개의 직교 좌표계를 사용하는데 좌표계 $\alpha(x,y,z)$ 는 고정 프레임(Fixed Frame) 0번 링크에 부여하고 $\beta(u,v,w)$ 는 동적 프레임(Moving Frame) 5번 링크에 그림 2와 같이 각각 부여한다.

먼저 동적 프레임 β 좌표계를 고정 프레임 α 좌표계와 일치시킨 다음 고정된 α 좌표계의 x,y 축을 중심으로 연속적으로 두 번 회전시킨다. 동적프레임 β 를 고정 프레임 α 의 y 축을 중심으로 ϕ 각도만큼 회전시키고 다시 x 축을 중심으로 ψ 각도만큼 회전시킨다. 여기서 일어나는 회전은 고정된 축을 중심으로 일어나기 때문에 회전형렬은 식 (1)과 같이 쓸 수 있다^[10].

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}R_{\beta}(\phi,\psi) &= R(\psi,x)R(\phi,y) \\ &= \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ s\psi s\phi & c\psi & -s\psi c\phi \\ -c\psi s\phi & s\psi & c\psi c\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 변환행렬(Transformation Matrix) ${}^{\alpha}R_{\beta}$ 의 α 와 β 는 변환의 순서를 나타낸다. 즉 β 좌표계에서 표현한 위치벡터를 α 좌표계에 대한 위치벡터로 변환하여 나타낸 것이다. 여기서 편의상 x 축에 대해 회전한 것을 롤(roll)이라 명하고 y 축에 대해 회전한 것을 피치(pitch)로 정의한다. 그림 3에서 관절각을 정의하기 위해서 또 다른 좌표계 (x_i,y_i,z_i) 를 고정 프레임의 A_i 점에 하나씩 더 부여하는데, x_i 의 축을 x 축에 평행이 되도록, y_i 축은 Revolute Joint의 축 방향으로, z_i 축은 z 축과 평행이 되도록 위치시킨다. 또 그림 3에서 보는 바와 같이 관절각(Joint Angle)을 정의해야하는데 x_i 축으로부터 $\overline{A_iB_i}$ 링크까지의 각도를 θ_{1i} 로, $\overline{A_iB_i}$ 의 연장선과 링크 $\overline{B_iC_i}$ 를 $x_i z_i$ 평면에 정사영시킨 선분이 이루는 각을 θ_{2i} 로 정의한다. 마지막으로 링크 $\overline{B_iC_i}$ 를 $y_i z_i$ 평면에 정사영시킨 선분과 y_i 축 사이의 각도를 θ_{3i} 로 정의한다. $i=1,2$ 에 대하여 각각 관절각 $\theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta_{3i}$ 가 정의되기 때문에 최종적으로



[그림 3] 모션 시뮬레이터의 관절각의 정의

6개의 관절각이 존재한다. 롤각 ψ 와 피치각 ϕ 에 대해 변환행렬 (1)이 정의되고 동적 프레임 $\beta(u,v,w)$ 좌표계에서 정의되는 벡터 ${}^{\beta}c_i = [c_{iu}, c_{iv}, c_{iw}]$ 를 고정 프레임의 $\alpha(x,y,z)$ 좌표계에 대해 표현하면 식 (2)와 같다.

$${}^{\alpha}c_i = [c_{ix}, c_{iy}, c_{iz}] = {}^{\alpha}R_{\beta} {}^{\beta}c_i \quad (2)$$

또한 고정프레임 α 에 대한 점 A_i 의 위치벡터는 ${}^{\alpha}a_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]$ 로 주어진다. 여기서 모터가 구동하는 각은 θ_{11} 과 θ_{12} 이며 링크 0,1,2,3,4,5에 의해 생기는 폐루프 방정식(Loop Closure Equation)은 다음과 같다.

$$\overrightarrow{A_i B_i} + \overrightarrow{B_i C_i} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \quad \text{for } i=1,2 \quad (3)$$

링크 $\overline{A_i B_i}$ 의 길이는 m 이며 링크 $\overline{B_i C_i}$ 의 길이는 n 이라고 두고 폐루프 방정식 (3)을 식 (2)를 이용하여 $\alpha(x,y,z)$ 좌표계로 표현하면 식 (4)와 같다.

$$\begin{bmatrix} m c \theta_{1i} + n s \theta_{3i} c(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ n c \theta_{3i} \\ m s \theta_{1i} + n s \theta_{3i} s(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ix} \\ c_{iy} \\ c_{iz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ p_{iz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서

$$\begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ p_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ s\psi s\phi & c\psi & -s\psi c\phi \\ -c\psi s\phi & s\psi & c\psi c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{iu} \\ c_{iv} \\ c_{iw} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

이다. 역기구학 문제에서는 각 ϕ, ψ 가 주어지기 때문에 식 (4)의 두 번째 행부터 풀면 θ_{3i} 를 얻을 수 있다.

$$\theta_{3i} = \cos^{-1} \frac{p_{iy}}{n} \tag{6}$$

$$= \cos^{-1} \frac{s\psi s\phi c_{iu} + c\psi c_{iv} - s\psi c\phi c_{iw} - a_{iy}}{n}$$

식 (4)의 양변을 제곱하여 더하면 식 (7)을 얻을 수 있고

$$2mns\theta_{3i}c\theta_{2i} + m^2 + n^2 = p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2 \tag{7}$$

θ_{3i} 가 식 (6)에서 결정되었으므로 식 (7)에서 θ_{2i} 를 구할 수 있다.

$$\theta_{2i} = \cos^{-1} \delta. \tag{8}$$

여기서 $\delta = (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2 - m^2 - n^2) / (2mns\theta_{3i})$ 이다. 식 (6)과 (8)에서 θ_{2i} 와 θ_{3i} 가 구해졌고 θ_{1i} 를 구하기 위해서 식 (4)의 첫 번째 행과 세 번째 행을 정리하면 연립방정식 (9)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (m + nc\theta_{2i}s\theta_{3i})c\theta_{1i} - (ns\theta_{2i}s\theta_{3i})s\theta_{1i} &= p_{ix}, \\ (ns\theta_{2i}s\theta_{3i})c\theta_{1i} + (m + nc\theta_{2i}s\theta_{3i})s\theta_{1i} &= p_{iz}. \end{aligned} \tag{9}$$

연립방정식 (9)에서 $c\theta_{1i}$ 와 $s\theta_{1i}$ 를 구하면 식 (10)과 같고

$$\begin{aligned} c\theta_{1i} &= \frac{p_{ix}(m + nc\theta_{2i}s\theta_{3i}) + p_{iz}ns\theta_{2i}s\theta_{3i}}{\Delta} \\ s\theta_{1i} &= \frac{-p_{ix}(ns\theta_{2i}s\theta_{3i}) + p_{iz}(m + nc\theta_{2i}s\theta_{3i})}{\Delta} \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $\Delta = m^2 + n^2s\theta_{3i}^2 + 2mnc\theta_{2i}s\theta_{3i}$ 이다. 따라서 식 (10)에서 θ_{1i} 를 구할 수 있다.

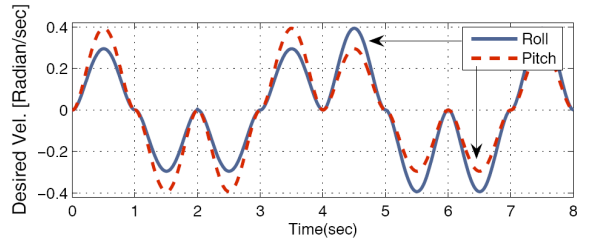
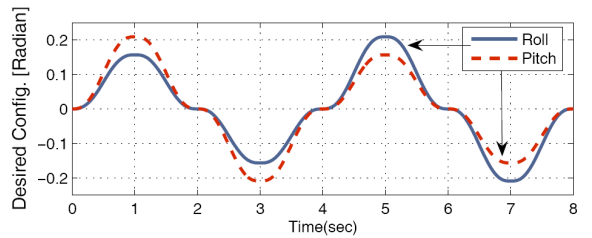
$$\theta_{1i} = \text{Atant2}(s\theta_{1i}, c\theta_{1i}). \tag{11}$$

상부 프레임이 움직여야하는 궤적 $\phi(t), \psi(t)$ 가 시간의 함수로 주어지면 모터에서 구동해야할 관절각

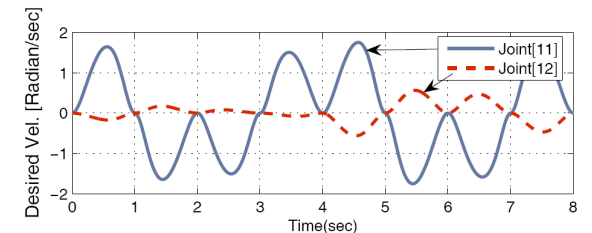
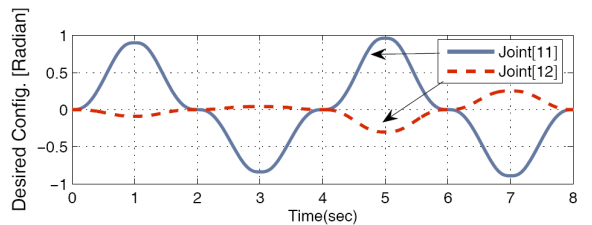
θ_{1i} 가 식 (11)로부터 구해진다. 그리고 그때 취해지는 4개의 관절각 θ_{2i} 와 θ_{3i} 는 식 (6)과 (8)에서 구할 수 있다.

본 논문에서 사용된 모션 시뮬레이터의 위치벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \beta_{c_1} &= [0.34, -0.502, 0.107]^T, \\ \beta_{c_2} &= [-0.34, 0.502, 0.107]^T, \\ \alpha_{a_1} &= [0.34, -0.441, -0.615]^T, \\ \alpha_{a_2} &= [-0.34, -0.441, -0.615]^T. \end{aligned} \tag{20}$$



[그림 4] 상부 프레임의 기준궤적과 기준속도



[그림 5] 관절각의 기준궤적과 기준속도

상부 프레임의 기준 궤적과 속도를 $\alpha(x, y, z)$ 좌표계를 기준으로 5차의 다항식으로 표현하였다. 초기 속도와 가속도 그리고 최종 속도와 가속도를 0으로 설정하였으며 그 궤적은 그림 4에 나타내었다. 역기구학 식 (6), (8), (11)을 이용하여 관절각의 궤적을 계산한 후에, 구동 관절각 θ_{11}, θ_{12} 의 궤적을 그림 5에 나타내었다.

3. 상태공간방정식

2자유도 모션 시뮬레이터의 운동방정식은 Lagrange 방정식으로 표현할 수 있다. Lagrange 방정식은 n 개의 일반화된 좌표계(Generalized Coordinate), 즉 $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in R^n$ 를 써서 식 (21)과 같이 표현할 수 있다.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + d(t) = \tau. \quad (21)$$

여기서 $M(q) \in R^{n \times n}$ 인 매니플레이터 관성질량이며, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in R^n$ 코리올리 힘(Coriolis and Centrifugal Forces)이다. 그리고 $g(q) \in R^n$ 는 중력힘(Gravitational Force)이고, $\tau \in R^n$ 는 입력 토크벡터이며, $d(t) \in R^n$ 는 미지의 외란이다. Lagrange 시스템에서는 관계식 $\dot{M} = C + C^T$ 가 항상 성립한다. 모션 시뮬레이터의 운동은 비교적 느린 속도영역에서 동작하기 때문에 시스템에 작용하는 외란은 비선형 마찰력을 주 외란요소로 고려한다. 궤적추종 제어에 있어 확장된 외란(Extended Disturbance)을 식 (22)와 같이 정의한다.

$$w(t, \dot{e}, e \int e) = M(q)(\ddot{q}_d + K_p \dot{e} + K_f e) + C(q, \dot{q})(\dot{q}_d + K_f e) + g(q) + d(t) \quad (22)$$

여기서 K_p, K_f 는 대각 행렬(Diagonal Matrix)이며 상수로 구성된다. $e = q_d - q$ 는 위치오차(Configuration Error)이며 위치벡터 $(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ 는 시간의 함수이다. 확장된 외란 (22)를 동적 시스템 (21)에 적용하면 궤적추종 시스템 모델은 식 (23)과 같이 쓸 수 있다.

$$M(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s = w(t, \dot{e}, e, \int e) + u. \quad (23)$$

여기서 $u = -\tau$ 이며 $s = \dot{e} + K_p e + K_f \int e dt$ 이다. 상태변수를 $x = [\int e^T, e^T, \dot{e}^T]^T \in R^{3n}$ 라고 정의하면 식 (23)은 상태공간방정식 (24)가 된다.

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)w + B(x, t)u \quad (24)$$

여기서

$$A(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -M^{-1}CK_f & -M^{-1}CK_p - K_f & -M^{-1}C - K_p \end{bmatrix}$$

$$B(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}.$$

4. 강인 PID 제어기의 설계

가. H_∞ 제어기

H_∞ 제어기는 불확실한 시스템의 강인 안정성을 보장하는 장점이 있다. 외란이나 플랜트의 불확실성이 존재할 경우 시스템의 입출력 관계식을 이용하여 에너지 게인 값이 설정된 γ 값보다 작게 만드는 것이다. 여기서 제안하는 강인 PID 제어기의 설계방법은 참고문헌 [7]에서 기술한 것을 따르기로 한다. 먼저 H_∞ 성능지수를 다음과 같이 두자.

$$J(t, x, u, w) = \lim_{t \rightarrow \infty} [2V(x, t) + \int_0^t (x^T Q(x)x + u^T R(x)u - \gamma^2 w^T w) d\sigma] \quad (25)$$

여기서 주어진 L_2 게인 $\gamma > 0$ 에 대해 아래 식 (26)의 HJI 방정식을 만족하고 $V(x, t) > 0$ 이며, $V(0, t) = 0$ 인 Lyapunov 함수가 존재한다고 하면

$$HJI = V_t + V_x A x + \frac{1}{2\gamma^2} V_x B B^T V_x^T - \frac{1}{2} V_x B R^{-1} B^T V_x^T + \frac{1}{2} x^T Q x = 0, \quad (26)$$

그에 따른 제어입력은

$$u = -R^{-1}B^T V_x^T \tag{27}$$

로 주어지고 이것은 H_∞ 성능지수 (25)를 최소화한다. 여기서 $V_t = \partial V / \partial t$, $V_x = \partial V / \partial x^T$ 이다. 일반적인 최적제어 이론에서는 상태가중행렬(State Weighting Matrix) $Q(x)$ 와 제어입력 가중행렬(Control Input Weighting Matrix) $R(x)$ 가 주어지고 HJI 방정식을 풀어 Lyapunov 함수를 구한 후 식 (27)을 이용하여 H_∞ 성능지수를 만족하는 제어를 설계한다. 하지만 앞에서 언급한 것처럼 HJI 방정식을 풀기가 어렵기 때문에 역으로 여러 개의 Lyapunov 함수 후보(Lyapunov Function Candidate) 가운데서 하나를 선택하여 $Q(x)$, $R(x)$ 를 찾아들어간다. Lyapunov 함수를 $V(x,t) = (1/2)x^T P(x,t)x$ 로 정의하고 Lyapunov 행렬 $P(x,t)$ 를 식 (28)로 둔다^[9].

$$P(x,t) = \begin{bmatrix} K_I M K_I + K_I K_P K & K_I M K_P + K_I K & K_I M \\ K_P M K_I + K_I K & K_P M K_P + K_P K & K_P M \\ M K_I & M K_P & M \end{bmatrix}$$

$K, K_P, K_I > 0$, 대각 상수행렬;
 $K_P^2 > 2K_I$; (28)

먼저 식 (26)의 HJI 방정식을 정리하여 미분 리카티 방정식(Differential Riccati Equation)을 유도해보자.

$$V_t = \frac{1}{2} x^T \frac{\partial P}{\partial t} x, \quad V_x = \frac{1}{2} x^T \frac{\partial P}{\partial x^T} x + x^T P$$

여기서 $P(x,t)$ 는 $x_3 = \dot{e}$ 의 함수가 아니므로

$$V_x = \frac{1}{2} x^T \left[\frac{\partial P}{\partial x_1} x \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} x \quad 0 \right] + x^T P$$

와 같이 쓸 수 있고

$$V_t + V_x A x = \frac{1}{2} x^T \frac{\partial P}{\partial t} x + \frac{1}{2} x^T P A x + \frac{1}{2} x^T A^T P x \tag{29}$$

$$+ \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} x & \frac{\partial P}{\partial x_2} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ * \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} x^T \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial P}{\partial x_k} \dot{x}_k + A^T P + P A \right\} x$$

$$= \frac{1}{2} x^T \{ \dot{P} + A^T P + P A \} x$$

가 된다. 그리고

$$V_x B = x^T P B + \frac{1}{2} x^T \left[\frac{\partial P}{\partial x^T} x \right] B = x^T P B \tag{30}$$

와 같이 표현할 수 있다. 식 (29)와 (30)을 이용하면 HJI 방정식 (26)은 식 (31)의 리카티 방정식이 된다.

$$HJI = \dot{P} + A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P \tag{31}$$

$$+ \frac{1}{\gamma^2} P B B^T P + Q = 0$$

식 (31)은 임의의 $Q(x)$, $R(x)$ 에 대해 성립하지 않는데 그 이유는 $V(x,t)$ 가 $Q(x)$, $R(x)$ 과 무관하게 선택되었기 때문이다. 제어입력 가중행렬 $R(x)$ 를 식 (32)와 같이 두면

$$R(x) = \left(K + \frac{1}{\gamma^2} I \right)^{-1} \tag{32}$$

상태변수가중행렬 $Q(x)$ 는 식 (31)에 식 (32)를 대입하고 $\dot{M} - C^T - C = 0$ 를 이용하면 구할 수 있다.

$$Q(x) = - \left(\dot{P} + A^T P + P A - P B K B^T P \right) \tag{33}$$

$$= \begin{bmatrix} K_I^2 K & 0 & 0 \\ 0 & (K_P^2 - 2K_I) K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$

여기서

$$\dot{P} + A^T P + P A = \begin{bmatrix} 0 & K_P K_P K & K_P K \\ K_P K_P K & 2K_P K & K_P K \\ K_P K & K_P K & 0 \end{bmatrix}$$

$$PBKB^T P = \begin{bmatrix} K_I^2 K & K_I K_P K & K_I K \\ K_I K_P K & K_P^2 K & K_P K \\ K_I K & K_P K & K \end{bmatrix}$$

식 (33)의 상태변수 가중행렬 $Q(x)$ 는 $K_P^2 > 2K_I$ 조건으로 인해 항상 양의 값을 갖는다. 식 (30)을 더 전개하면 다음과 같다.

$$x^T P B = x^T [K_I, K_P, I]^T = s^T. \quad (34)$$

H_∞ 성능조건을 만족하는 제어기는 식 (34)와 식 (32)를 이용하여 식 (27)을 전개하면 제어입력의 형태는 식 (35)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \tau = -u &= R^{-1} B^T V_x^T = R^{-1} B^T P x \\ &= \left(K + \frac{1}{\gamma^2} I \right) \left(\dot{e} + K_P e + K_I \int e \right) \\ &= \left(K + \frac{1}{\gamma^2} I \right) s \end{aligned} \quad (35)$$

식 (35)는 PID 제어기의 형태이다. 최적제어의 이론에 따르면 상태변수 가중행렬(State Weighting Matrix) $Q(x)$ 는 시스템의 상태변수에서 발생하는 오차에 얼마만큼 큰 가중치를 주어서 최소화 할 것인가와 관련이 있다. 가령 상태변수 가중행렬의 크기를 4배 크게 하면 상태변수에서 발생하는 오차는 절반으로 줄어들게 된다. 따라서 본 논문의 경우에는 상태변수에서 발생하는 오차를 줄이기 위해서는 식 (33)에서 $Q(x)$ 를 크게 해야하고, $Q(x)$ 를 크게 하려면 대각행렬에 공통으로 들어가 있는 K 값을 키우면 된다. 하지만 동시에 식 (32)의 제어입력 가중행렬 $R(x)$ 값이 작아지기 때문에 제어입력의 크기에는 크게 가중치를 두지 않겠다는 의도가 포함되므로 결과적으로는 더 큰 제어입력이 들어가게 된다. 반대의 경우는 K 값을 작게 하면 $R(x)$ 값이 커지게 되고 성능지수 J 에서 제어입력을 최소화하는데 더 비중을 두기 때문에 제어기 입력의 크기는 상대적으로 작아지나 상태변수에서 보다 큰 오차가 발생하게 된다. 결과적으로 가중행렬 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 에 공통으로 존재하는 K 값은 시스템 성능 즉 오차의 크기와 제어 입

력의 크기를 Trade off 시키는 역할을 한다. 그리고 γ 는 상태변수 가중행렬 $Q(x)$ 에는 영향을 주지 않으며 제어입력 가중치 $R(x)$ 에만 영향을 미침으로써 외란에 대한 강건성(Robustness)을 확보하는 요소가 된다.

나. 제곱/선형 튜닝규칙

본 절에서는 H_∞ 성능지수를 만족하는 PID 제어기 (35)의 튜닝을 위해 제곱/선형 규칙을 간략히 서술하고자 한다^[8]. PID 제어기를 Lagrange 시스템 (23)에 적용하면 폐루프 시스템은 식 (36)과 같이 쓸 수 있다.

$$M \dot{s} + Cs = w - \left(K + \frac{1}{\gamma^2} I \right) s \quad (36)$$

폐루프 시스템 (36) 또한 Lagrange 시스템이기 때문에 $\dot{M} = C^T + C$ 의 특성을 여전히 가진다. 양의 값을 갖는 함수 $\frac{1}{2} s^T M s$ 를 정의하고 이것을 식 (36)을 따라 미분하면 식 (37)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} s^T M s \right) &= \frac{1}{2} s^T \dot{M} s + \frac{1}{2} s^T M \dot{s} + \frac{1}{2} s^T M \dot{s}, \\ &= -s^T \left(K + \frac{1}{\gamma^2} I \right) s + s^T w, \\ &= -s^T \left(K + \frac{1}{2\gamma^2} I \right) s - \frac{\gamma^2}{2} \left| \frac{1}{\gamma^2} s - w \right|^2 + \frac{\gamma^2}{2} |w|^2, \\ &\leq -s^T \left(K + \frac{1}{2\gamma^2} I \right) s + \frac{\gamma^2}{2} |w|^2. \end{aligned} \quad (37)$$

관성 행렬 M 의 최대 고유값을 λ 라고 하고 대각행렬 K 의 최소값을 k 라고 하면 식 (37)은 다음과 같이 간략화 할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{2} |s|^2 \right) \leq - \left(k + \frac{1}{2\gamma^2} \right) |s|^2 + \frac{\gamma^2}{2} |w|^2.$$

위 부등식에 적분인자(Integration Factor) $e^{(2k\gamma^2 + 1)/(\lambda\gamma^2 t)}$ 를 곱하고, 구간 $[0, t]$ 에서 적분을 취하면 식 (38)과 같다.

$$\begin{aligned}
 |s(t)|^2 &\leq |s(0)|^2 e^{-\frac{2k\gamma^2+1}{\lambda\gamma^2}t} \\
 &+ \frac{\gamma^2}{\lambda} \int_0^t e^{-\frac{2k\gamma^2+1}{\lambda\gamma^2}(t-\sigma)} |w(\sigma)| d\sigma \\
 &\leq |s(0)|^2 e^{-\frac{2k\gamma^2+1}{\lambda\gamma^2}t} \\
 &+ \frac{\gamma^2}{\lambda} \|w\|_\infty^2 \frac{\lambda\gamma^2}{2k\gamma^2+1} (1 - e^{-\frac{2k\gamma^2+1}{\lambda\gamma^2}t}).
 \end{aligned} \tag{38}$$

부등식 $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$ 을 식 (38)의 우변에 적용하면 식 (39)가 얻어진다.

$$|s(t)| \leq |s(0)| e^{-\frac{k\gamma^2+0.5}{\lambda\gamma^2}t} + \frac{\gamma^2}{\sqrt{2k\gamma^2+1}} \|w\|_\infty. \tag{39}$$

궤적추종제어의 문제에서는 $s(0)$ 를 0으로 조절이 가능하기 때문에 복합오차 (Composite Error) 는 식 (40)에서처럼 확장된 외란의 L_∞ 노움에 의해 그 크기가 제한된다.

$$|s(t)| \leq \frac{\gamma^2}{\sqrt{2k\gamma^2+1}} \|w\|_\infty \tag{40}$$

식 (40)에서 복합오차의 크기 $|s(t)|$ 와 게인 (γ, k) 와의 비례 관계식 (41)을 얻을 수 있다.

$$|s(t)| \propto \frac{\gamma^2}{\sqrt{2k\gamma^2+1}} \|w\|_\infty \tag{41}$$

이 비례관계를 복합튜닝법칙이라 한다. 식 (41)에서 튜닝변수 k 의 값이 작은 경우에는 복합오차의 크기가 γ^2 에 비례하여 감소하고, k 의 값이 큰 경우에는 γ 에 비례하여 복합오차의 크기가 감소한다. 전자를 제곱규칙, 후자를 선형규칙이라고 부르기로 한다^[7].

$$\begin{aligned}
 |s| &\propto \gamma^2 \quad \text{큰 } k \text{ 값에 대하여} \\
 |s| &\propto \gamma \quad \text{작은 } k \text{ 값에 대하여}
 \end{aligned} \tag{42}$$

다. 확장된 외란 입력으로부터 상태변수로의 안정성 안정도를 판별하는 데 있어서 외란을 고려할 경우

입력으로부터 상태변수로의 안정성(ISS : Input to State Stability)을 이용하는 것이 유용하다^[10~11]. ISS는 제한된 크기를 가진 외부 입력이 시스템에 작용할 때 시스템의 상태변수가 제한된 크기 내에서 출력을 가질 때를 일컫는 말이다. 즉 외부입력, 시스템 섭동(Perturbation), 미지의 외란이 시간이 흐름에 따라 0의 값으로 접근해갈 때 시스템의 상태변수들이 평형점(Equilibrium Point)으로 접근하는 것이다. 본 절에서는 확장된 외란 입력에 대한 상태변수로의 안정성을 판별하고자 한다. 먼저 함수에 대해 정의를 하여야 하는데 연속 함수 $\beta[0, a] \rightarrow R_+$ 가 Strictly Increasing하는 함수이고 $\beta(0) = 0$ 이면 K 클래스 함수라고 한다. 또 연속함수 $\alpha : [0, a) \times R_+ \rightarrow R_+$ 가 고정된 값 s 에 대하여 r 의 매핑 $\alpha(r, s)$ 가 K 클래스 함수에 속하고 고정된 r 에 대하여 $s \rightarrow \infty$ 일 때 $\alpha(r, s) \rightarrow 0$ 이면 KL 클래스 함수라고 정의한다. 제어 시스템 (24)는 다음 조건 (43)을 만족하면 ISS하다고 말한다^[11].

$$|x(t)| \leq \alpha(|x(0), t) + \beta(\sup_{0 \leq \sigma \leq t} |w(\sigma)|). \tag{43}$$

여기서 α 는 KL 클래스 함수에 속하며 β 는 K 클래스 함수에 속한다. 그러면 이제 식 (39)와 식 (43)을 비교해보자. 식 (39)의 우변의 첫 번째 항은 KL 클래스 함수이며 두 번째 항은 K 클래스 함수이다. 따라서 식 (43)에서 논의한 것처럼 확장된 외란 입력으로부터 상태변수로의 안정성이 증명된다. 즉 EDISS (Extended Disturbance Input to State Stability)를 보장한다고 할 수 있다. 따라서 역최적 PID 제어를 시스템에 적용하여 튜닝을 하게되면 시스템은 EDISS 조건을 만족하여 항상 안정한 거동을 하는 장점을 가지게 된다.

식 (39)의 지수항은 $t \rightarrow \infty$ 에 따라 영으로 수렴하지만 외란 $w \neq 0$ 이기 때문에 복합오차는 영으로 수렴하지 않는다. 따라서 역최적 PID 제어를 적용한 페루프 시스템은 성능제한(Performance Limitation) 요소를 가진다. 다시 말하면 역최적 PID 제어기는 EDISS를 보장하지만 광역적 접근적 안정성(Globally Asymptotic Stability)을 보장하지는 않는다.

라. 최적값에 의한 성능예측

역최적 PID제어기는 성능지수 (25)를 최소화하며, 최적화 과정에서 얻어진 제어기를 적용하였을 경우 성능지수 J 의 크기는 거의 변화가 없다. 그리고 제어기가 페루프 시스템을 안정화 시키고 나면 확장된 외란도 거의 같은 값을 지니게 된다. 따라서 상태변수를 변수로 하는 J 값은 식 (45)에서와 같이 거의 변화가 없다고 생각할 수 있다.

$$\int_0^t [\mathbf{x}^T(\sigma)(\mathbf{Q}+\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x}(\sigma)]d\sigma \approx \text{상수} \quad (45)$$

위의 식 (45)에서 행렬은 식 (46)처럼 나누어 쓸 수 있다.

$$\mathbf{Q}+\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \equiv \mathbf{K}_{II} \mathbf{K}_{I} \mathbf{K}_{II}^{-1}, \quad (46)$$

여기서

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} k_I \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & k_P \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{I} = \begin{bmatrix} \left(k + \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} \right) \mathbf{I} & \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} \mathbf{I} & \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} \mathbf{I} \\ \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} \mathbf{I} & \left(k + \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} - \frac{2k_I k}{k_P^2} \right) \mathbf{I} & \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} \mathbf{I} \\ \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} \mathbf{I} & \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} \mathbf{I} & \left(k + \frac{\gamma^2}{k\gamma^2 + 1} \right) \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

식 (28)에서처럼 $k_P^2 > 2k_I$ 이므로 중간행렬 \mathbf{K}_{I} 는 k_P, k_I 에 거의 영향을 받지 않고 k, γ 에 영향을 받는다. 따라서 k, γ 가 변하지 않을 경우 식 (45)로부터 식 (46)과 같은 관계식을 얻는다.

$$\| \mathbf{K}_{II} \mathbf{x} \| \approx a \text{ constant} \rightarrow \| \mathbf{x} \| \propto \frac{1}{\mathbf{K}_{II}} \quad (46)$$

결과적으로 k_P 값이 두 배가 되면 k_I 값도 두 배 증가시키면 식 (46)에 따라 상태변수의 L_2 노움의 크기는 절반이 된다.

5. 수치모사

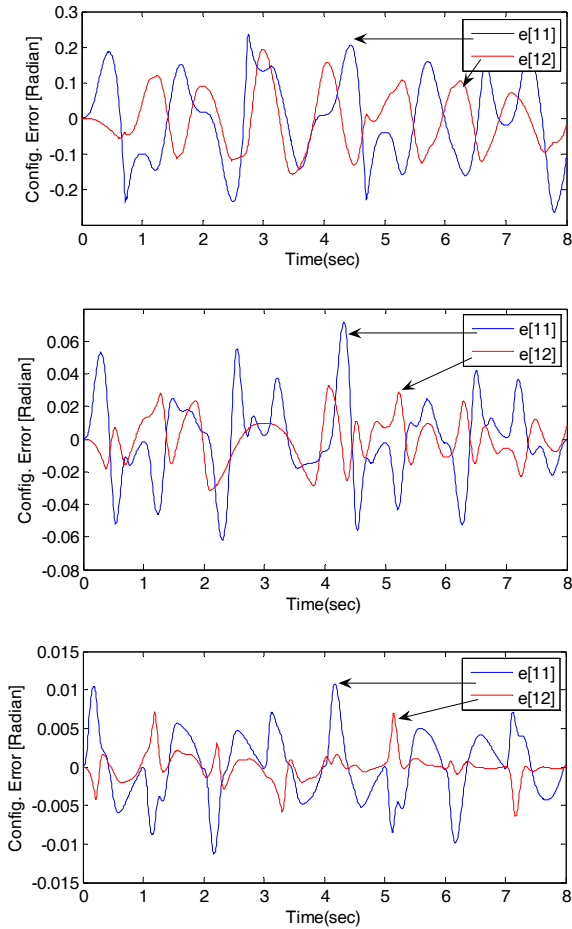
역최적 PID 제어기의 성능을 검증하기 위해서 MATLAB과 SimMechanics를 이용하여 수치모사를 수행하였다. 모션 시뮬레이터의 지지 부하는 750kg이며 외란으로 비선형 특성이 있는 쿨롱 마찰력과 점성 마찰력(Coulomb + Viscous Friction Force)을 고려하였다. 제어게인은 $\mathbf{K} = k\mathbf{I}, \mathbf{K}_P = k_P\mathbf{I}, \mathbf{K}_I = k_I\mathbf{I}$ 로 두고 $k = 2, k_P = 30, k_I = 120$ 로 설정하였다. 이것은 식 (28)의 조건을 만족한다. 먼저 $\gamma = 0.28 \rightarrow 0.14 \rightarrow 0.07$ 로 변화시켜가면서 수치모사를 수행하였는데 구동관절 θ_{11}, θ_{12} 에서 발생하는 각도 오차를 그림 6에 나타내었다. 그림에서 첫 번째 행에 있는 것은 $\gamma = 0.28$ 일 때의 각도 오차이며 두 번째 세 번째 행에 있는 것은 각각 $\gamma = 0.14, 0.07$ 일 때의 각도 오차이다. 그림 6에서 알 수 있듯이 γ 값이 $0.28 \rightarrow 0.14 \rightarrow 0.07$ 로 그 크기를 절반씩 줄여 감에 따라 최대 각도 오차 또한 $0.3 \rightarrow 0.07 \rightarrow 0.015$ 로 약 4분의 1씩 감소하여 k 값이 작을 때는 예러가 γ 의 제곱에 비례하여 작아지는 제곱규칙이 성립하는 것을 알 수 있다.

그리고 선형규칙이 성립하는 것을 확인하기 위하여 k 값을 점차 증가시켜 $k = 80$ 으로 두고 $k_P = 30, k_I = 120$ 으로 설정하였을 때 구동 관절에서 발생하는 각도 오차를 그림 7에 나타내었다. 식 (42)에서 예측한 바대로 γ 를 $0.28 \rightarrow 0.14 \rightarrow 0.07$ 로 그 크기를 절반씩 줄여갔을 때 최대 각도 오차는 $0.04 \rightarrow 0.02 \rightarrow 0.01$ 로 그 크기가 2분의 1씩 감소하는 선형규칙이 성립하는 것을 확인할 수 있다.

수치모사를 수행하는 과정에서 최대 각도오차는 선형/제곱 규칙이 성립하는 것을 확인하였지만 시간에 대한 평균적인 제어성능 또한 선형/제곱규칙이 성립하는지를 확인하기 위해 상태변수의 L_2 노움을 도입하기로 하고 다음과 같이 정의한다.

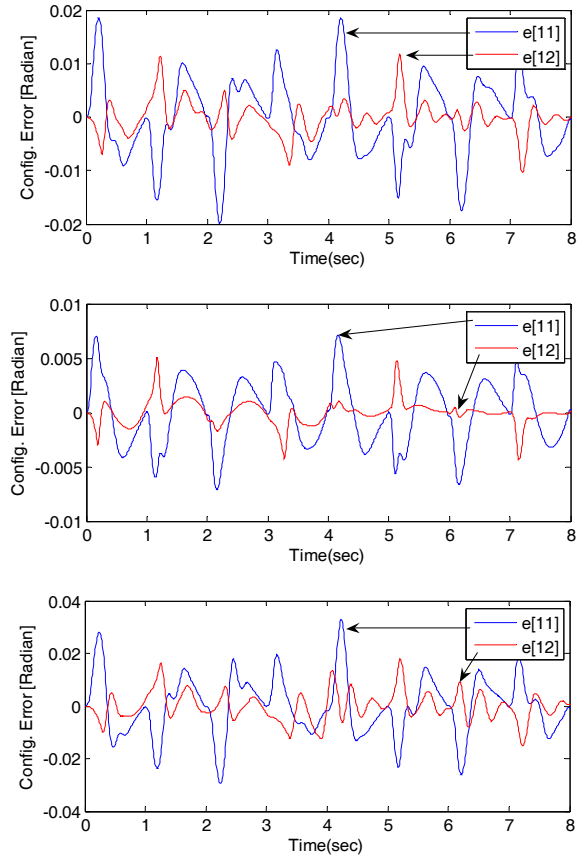
$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\int_0^t (\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \int \mathbf{e}^T \mathbf{e}) dt}$$

수치모사를 수행하면서 계산된 각도 오차의 L_2 노움을 계산하여 그 결과를 표 1에 정리하였다. 표에서 아래첨자 c 는 현재 행의 데이터를 나타내고 위첨자



[그림 6] $k=2, k_p=30, k_I=120$ 으로 설정하고 $\gamma=0.28, 0.14, 0.07$ 로 각각 제어입력을 주었을 때 각도오차(제곱규칙)

u 위쪽 행의 데이터를 나타낸다. 성능향상 비율은 위쪽 행의 데이터와 현재 행의 데이터의 비로 표현한 $\|x\|_u/\|x\|_c$ 혹은 $\|e\|_u/\|e\|_c$ 로 표시한다. 표 1을 보면 최대 각도 오차값 $\|e\|_\infty$ 과 평균적인 상태변수 오차값 $\|x\|$ 모두 근사적으로 선형/제곱규칙을 따르는 것을 확인할 수 있다. 즉 제곱규칙이 성립하는 경우 $k=2$ 일 때 γ 를 $0.28 \rightarrow 0.14 \rightarrow 0.07$ 로 절반씩 줄여나갔을 때 $\|x\|$ 값은 3.8528, 2.7899의 비율로 약 4배에 가까운 비율로 감소하였으며, $\|e\|_\infty$ 값 또한 3.8584, 6.00의 비율로 약 4배에 가까운 비율로 감소하는 것을 알 수 있다. 또 선형규칙이 성립하는 경우 $k=80$



[그림 7] $k=80, k_p=30, k_I=120$ 으로 설정하고 $\gamma=0.28, 0.14, 0.07$ 로 각각 제어입력을 주었을 때 각도오차(선형규칙)

일 때 γ 를 $0.28 \rightarrow 0.14 \rightarrow 0.07$ 로 절반씩 줄여나갔을 때 $\|x\|$ 값은 1.4593, 2.5307의 비율로 약 2배에 가까운 비율로 감소하였으며, $\|e\|_\infty$ 값 또한 1.5153, 2.4259 비율로 약 2배에 가까운 비율로 감소하는 것을 알 수 있다.

좀 더 정확하게 각도 오차가 감소하는 비율을 추정하기 위해서는 식 (41)을 사용하면 되고 예측값이란 항목으로 표 1에 나타내었다. 식 (41)을 가지고 성능향상 비율을 예측할 경우 수치모사결과와 유사한 경향을 보이고 있으며 식 (41)의 예측값과 실제 수치모사값이 가장 크게 차이가 나는 때는 $\|x\|$ 값의 경우 $k=80, \gamma=0.14$ 일 때 34%의 차이가 나며 $\|e\|_\infty$ 경우 $k=2, \gamma=0.07$ 일 때 54.3%의 차이가 난다. 예측

값과 수치모사 결과값이 54.3%로 그 차이가 다소 크게 나는 이유는 비선형 마찰력에 기인한 것으로 판단된다.

또한 최적값에 의한 성능예측식 (46)을 바탕으로 k_p , k_f 값의 변화가 성능에 어떻게 영향을 미치는지 수치적으로 확인하여 보았다. 먼저 k_p 값이 두 배가 되면 여기에 비례하여 k_f 값도 두 배로 증가시켜 주어야 한다는 것을 기억해야한다. 식 (46)에 의하면 k_p 값과 k_f 값을 30/120 → 45/180 → 60/240처럼 1.5배씩 증가시키면 각도 오차도 1.5배씩 감소할 것으로 예측

[표 1] γ 와 k 값의 변화에 따른 시뮬레이션 결과값. 여기서 u 와 c 는 위쪽 행의 데이터 값과 현재 행의 데이터 값을 각각 나타낸다.

k	γ	$\ x\ $	$\frac{\ x\ _u}{\ x\ _c}$	$\ e\ _\infty$	$\frac{\ e\ _u}{\ e\ _c}$	예측값 $\frac{\gamma^2}{\sqrt{2k\gamma^2+1}}$
2	0.28	32.8426		0.3542		
	0.14	8.5244	3.8528	0.0918	3.8584	3.6243
	0.07	3.0554	2.7899	0.0153	6.00	3.8894
20	0.28	15.2160		0.1757		
	0.14	5.7462	2.6480	0.0587	2.9932	2.6270
	0.07	2.3520	2.4431	0.0139	4.2230	3.2751
80	0.28	5.7800		0.0397		
	0.14	3.9608	1.4593	0.0262	1.5153	2.2104
	0.07	1.5651	2.5307	0.0108	2.4259	2.6270

[표 2] γ 와 k_p/k_f 값의 변화에 따른 시뮬레이션 결과 값. 여기서 u 와 c 는 위쪽 행의 데이터 값과 현재 행의 데이터 값을 각각 나타낸다.

γ	k_p/k_f	$\ x\ $	$\frac{\ x\ _u}{\ x\ _c}$	$\ e\ _\infty$	$\frac{\ e\ _u}{\ e\ _c}$	예측값
0.07	30/120	1.5651		0.0108		1.5
	45/180	1.4006	1.1174	0.0072	1.5000	
	60/240	1.1833	1.1836	0.0055	1.3091	

할 수 있는데 그 결과를 $\|e\|_\infty$ 값과 $\|x\|$ 값에 대해 표 2에 나타내었다. 표 2에서 보면 $\|x\|$ 값의 경우 k_p 값과 k_f 값을 30/120 → 45/180 → 60/240처럼 1.5배씩 증가시켰을 때 상태변수의 $\|e\|_\infty$ 값은 1.5000 → 1.3091 비율로 약 1.5배씩 감소하는 것을 알 수 있다. 식 (46)을 가지고 예측할 수 있는 성능향상 비율과 수치모사 결과 값의 최대 차이는 $\|x\|$ 의 경우 25.5%이며, $\|e\|_\infty$ 의 경우 12.7%로 예측 값과 수치모사 값이 비슷한 수준을 보임을 알 수 있다. 제어규칙, 선형규칙, 그리고 최적값에 의한 성능예측 식을 바탕으로 최종적으로 $\gamma = 0.07$, $k = 80$, $k_p = 60$, $k_f = 240$ 을 모션 시뮬레이터에 적용하였다.

6. 결론

본 논문에서는 모션 시뮬레이터의 기구학적 해석과 강인 PID 제어기의 설계 문제에 대해 다루었다. 먼저 역기구학 문제의 해를 구하여 구동링크에서 추종해야 할 궤적을 생성하였다. 그리고 역최적 기법을 이용하여 H_∞ 성능지수를 만족하며 마찰력으로 주어지는 외란에 대해 강인 안정성을 보장하는 PID 제어기를 설계하였다. 설계된 PID 제어기는 확장된 외란으로부터 상태변수로의 안정성을 보장한다. 성능제한 요소로부터 복잡튜닝 법칙을 제안하였고 그것으로부터 유도되는 선형/제어 규칙을 적용하여 제안된 제어기의 성능을 예측하고 또 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] V. E. Gough and S. G. Whitehall, "Universal tyre test machine", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 180, London, England, pp. 671~386, 1965.
- [2] D. Stewart, "A platform with six degrees of freedom", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 180, London, England, pp. 1671~1675, 1965.
- [3] K. J. Åström and Hägglund, *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*, Research Triangle Park, NC : Instrum. Soc. Amer., 1995.

- [4] K. J. Åström, Hägglund, C. C. Hang and W. K. Ho, "Automatic tuning and adaptation for PID controllers-A Survey", *IEEE Trans. Contr. Eng. Pract.*, Vol. 1, No. 4, pp. 699~714, 1993.
- [5] A. Isidori and A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, pp. 1283~1293, 1992.
- [6] A. J. Vander Schaft, " L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, pp. 770~784, June, 1992.
- [7] Y. Choi, W. K. Chung, I. H. Suh, "Performance and H_∞ optimality of PID trajectory tracking controller for Lagrangian systems", *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 17, No. 6, pp. 857~868, 2001.
- [8] Y. Choi and W. K. Chung, "Performance limitation and autotuning of inverse optimal PID controller for lagrangian systems", *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, Vol. 22, pp. 803~812, 2000.
- [9] J. Park and W. K. Chung, "Design of a robust H_∞ PID control for industrial manipulators", *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, Vol. 22, pp. 803~812, 2000.
- [10] L. W. Tsai, *Robot Analysis : The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, Wiley-Interscience, 1999.
- [11] M. Krstic and Z. H. Li, "Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 43, pp. 336~350, Mar. 1998.
- [12] E. D. Sontag and Y. Wang, "On characterizations of the input-to-state stability property", *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 24, pp. 351~359, 1995.